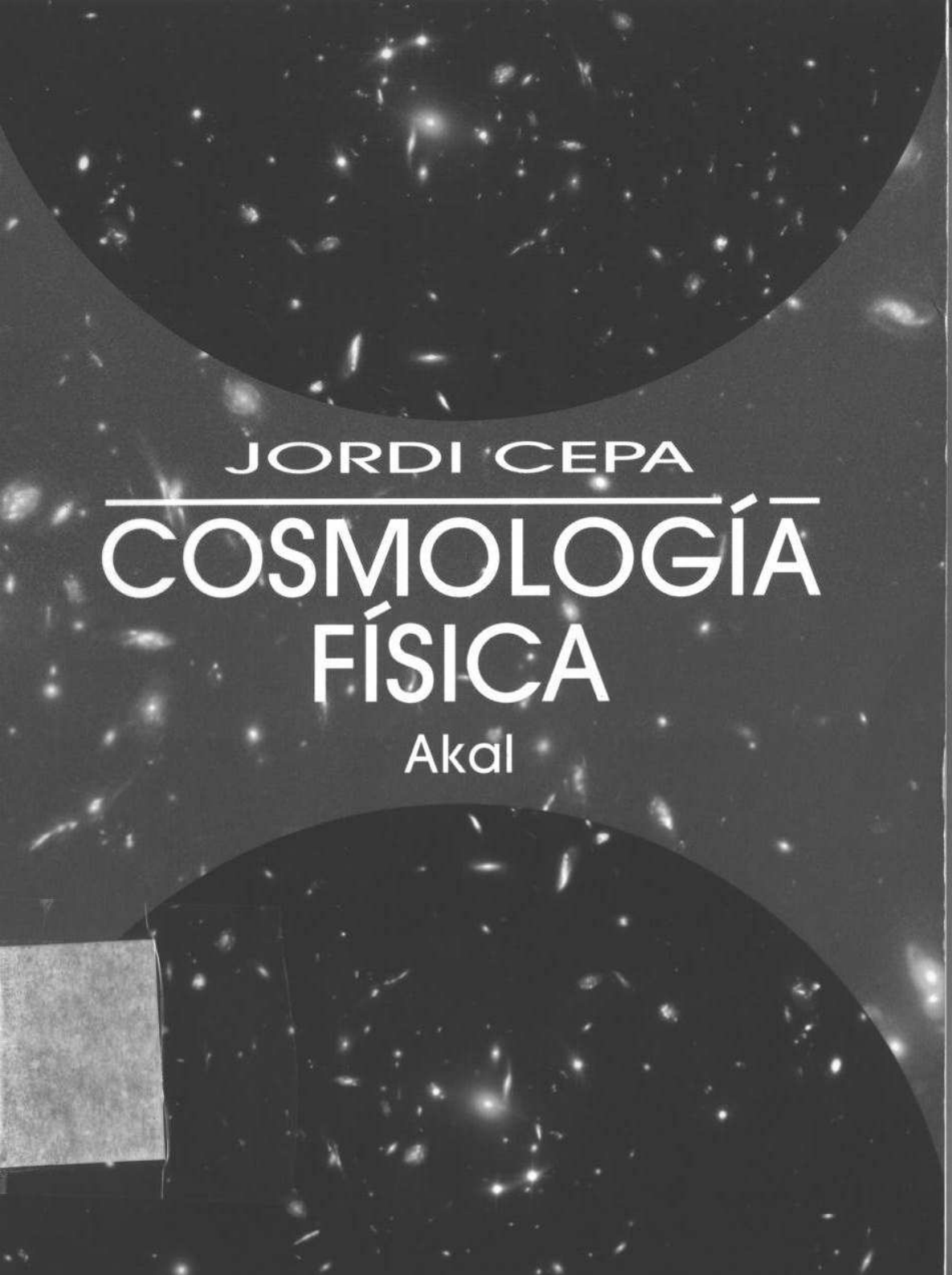


JORDI CEPA

COSMOLOGÍA FÍSICA

Akal

Diseño interior y cubierta: RAG

Imagen de cubierta:
© ESA / NASA / Keren Sharon (Universidad de Tel-Aviv) / Eran Ofek (CalTech);
reproducida con permiso de los autores.

Reservados todos los derechos. De acuerdo a lo dispuesto en el artículo 270 del Código Penal, podrán ser castigados con penas de multa y privación de libertad quienes reproduzcan sin la preceptiva autorización o plagien, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica, fijada en cualquier tipo de soporte.

Revisión científica: David Galadí-Enríquez

© Jordi Cepa, 2007
© Ediciones Akal, S. A., 2007

Sector Foresta, 1
28760 Tres Cantos
Madrid - España

Tel.: 918 061 996
Fax: 918 044 028

www.akal.com

ISBN: 978-84-460-2533-7

Depósito legal: M-10.641-2007
Impreso en Fernández Ciudad, S. L.
(Madrid)

Cosmología física

JORDI CEPA

-akal-

A mis padres.
Sin ellos este libro
no habría sido posible.

Imagen de cubierta: *Lente gravitatoria en el cúmulo de galaxias SDSS J1004+4112.*
El cúmulo de galaxias situado en el centro de la imagen se encuentra a siete mil millones de años-luz de distancia (desplazamiento al rojo 0.68). El efecto de lente gravitatoria inducido por la masa del cúmulo genera una imagen quíntuple de un cuásar situado más allá (a diez mil millones de años-luz, desplazamiento al rojo 1.74). Se aprecian además varias imágenes múltiples, en forma de arcos, de otras galaxias y objetos situados tras el cúmulo (la galaxia más distante identificada tiene desplazamiento al rojo 3.33). Observaciones obtenidas con el telescopio espacial Hubble en 2004 y 2005. Más información en: Sharon *et al.* (2005), *Astrophysical Journal Letters*, 629, L73-L76.

El telescopio espacial Hubble es un proyecto de cooperación internacional entre la Agencia Espacial Europea (ESA) y la Administración Nacional para la Aeronáutica y el Espacio de EE UU (NASA).
(c) ESA / NASA / Keren Sharon (Universidad de Tel-Aviv) / Eran Ofek (CalTech); reproducida con permiso de los autores.

Hay una teoría que afirma que si alguien descubriera lo que es exactamente el Universo y el porqué de su existencia, desaparecería al instante y sería sustituido por algo aún más extraño e inexplicable.

Hay otra teoría que afirma que eso ya ha ocurrido.

El restaurante del fin del mundo, Douglas Adams.

Contenido

Introducción 7

1 El universo observable **9**
- 1.1 ¿Qué es el universo? 9
- 1.2 La paradoja de Olbers o por qué el cielo nocturno es oscuro.... 10
- 1.3 La edad del universo 14
- 1.4 Determinación de distancias en el universo 18
- 1.5 El desplazamiento al rojo 25
- 1.6 La materia oscura del universo 53
- 1.7 La radiación cósmica de fondo 66
- 1.8 Las abundancias de elementos ligeros 73
- 1.9 La asimetría materia-antimateria 81
- 1.10 Resumen 83
- 1.11 Ejercicios 84
- 1.12 Bibliografía 85

2 La relatividad aplicada al universo **91**
- 2.1 La métrica 92
- 2.2 La relatividad general 97
- 2.3 Aplicación a la cosmología 103
- 2.4 Las ecuaciones de Fridman 120
- 2.5 La ecuación de estado 124
- 2.6 Implicaciones de las ecuaciones de Fridman y la ecuación de estado 130
- 2.7 Resumen 143
- 2.8 Ejercicios 146
- 2.9 Bibliografía 148

3 Modelos cosmológicos **149**
- 3.1 Universos de Einstein y de De Sitter 150
- 3.2 Universos euclídeos con una única ecuación de estado 152
- 3.3 Universos dominados por la masa en reposo 153

3.4 Universos dominados por radiación 160
3.5 Universos dominados por constante cosmológica 165
3.6 Universos dominados por otras energías oscuras 167
3.7 Universos simbióticos 168
3.8 El modelo estándar 172
3.9 Modelos alternativos 179
3.10 Resumen 187
3.11 Ejercicios 189
3.12 Bibliografía 192

4 Cosmometría 193

4.1 Distancias 193
4.2 La expansión del universo 217
4.3 Horizontes cosmológicos 227
4.4 Volumen 239
4.5 Cosmocartografía 243
4.6 Aplicación al modelo estándar 250
4.7 Resumen 257
4.8 Ejercicios 259
4.9 Bibliografía 261

5 El universo primordial o de las transiciones de fase 263

5.1 El origen del universo y la singularidad inicial 265
5.2 Unificación de interacciones 266
5.3 Transiciones de fase 276
5.4 La época de Planck 288
5.5 La época GUT 291
5.6 La época electrodébil 294
5.7 La época cuark 294
5.8 Problemas del modelo estándar 295
5.9 La inflación 303
5.10 Modelos sin inflación: el universo ecpirótico 315
5.11 Resumen 316
5.12 Ejercicios 317
5.13 Bibliografía 319

6 El universo temprano 321

6.1 Termodinámica en el universo temprano 321
6.2 Evolución del universo temprano 337

6.3 Época hadrónica 347
6.4 Época leptónica 349
6.5 Época fotónica 356
6.6 Época del Plasma. Formación del hidrógeno. 364
6.7 Época atómica. Desacoplamiento de los fotones. 366
6.8 Resumen 367
6.9 Ejercicios 368
6.10 Bibliografía 370

7 La radiación cósmica de fondo 371

7.1 La superficie de último esparcimiento 371
7.2 Mecanismos causantes de distorsiones globales del espectro 374
7.3 Caracterización de las anisotropías 379
7.4 Espectro de las fluctuaciones primordiales 384
7.5 Mecanismos causantes de anisotropías primarias 385
7.6 Anisotropías primarias de gran escala ($\Delta\theta > \Delta\theta_H$) 388
7.7 Anisotropías primarias de escala intermedia ($\Delta\theta_{ue} < \Delta\theta < \Delta\theta_H$) 391
7.8 Mecanismos que reducen las anisotropías primarias 397
7.9 Después de la combinación: anisotropías secundarias 401
7.10 Anisotropías terciarias 413
7.11 Resumen 413
7.12 Ejercicios 417
7.13 Bibliografía 419

8 El universo contemporáneo 422

8.1 Formación de estructuras en el universo 424
8.2 Más allá del universo contemporáneo: El futuro del universo 448
8.3 El futuro de la cosmología 450
8.4 Historia sinóptica de la cosmología moderna 456
8.5 Conclusión 458
8.6 Resumen 459
8.7 Resumen de las eras y épocas cosmológicas del modelo estándar 462
8.8 Ejercicios 463
8.9 Bibliografía 465

A Constantes 469
A.1 Físicas 469
A.2 Astronómicas 469

B Pedagogía 470
B.1 Principios pedagógicos 470
B.2 Organización 471
B.3 Diseño de cursos 471

Introducción

Todo libro precisa una justificación para su existencia. Éste no es una excepción. La primera razón es que, si bien hay disponibles multitud de textos en inglés dedicados a la cosmología y con distintos enfoques, no se han publicado todavía textos similares en español. El segundo motivo consiste en el interés del autor por proporcionar un texto que sea de amplia aplicación y fácil comprensión. En efecto, la cosmología abarca multitud de campos muy distintos: desde la física de partículas y sus modelos de unificación hasta las observaciones de galaxias del universo local y de cúmulos globulares de nuestra Galaxia, todo ello en el marco de la relatividad general. Unos textos se centran en la física de partículas, otros en las aplicaciones de la relatividad general a la cosmología, aún otros en la evolución de estructuras o la radiación cósmica de fondo. Lógicamente estos sesgos expresan la especialización del autor que los escribió. Eso es bueno para un texto especializado, pero no para un texto de carácter más general y didáctico. Los apartados en los que los autores, debido a su especialización, ahondan más en aspectos concretos, serán seguidos con dificultad por un lector no especialista. En cambio, otros aspectos no se tratarán o se tratarán con menor profundidad. Para paliar estos sesgos, he recurrido a varios textos y para cada capítulo o apartado me he guiado de los que según mi criterio proporcionan una aproximación más adecuada o de más fácil comprensión al problema. En múltiples ocasiones he recurrido a Internet para esclarecer aspectos más oscuros. He intentado, en suma, escribir un texto que tratase con suficiente detalle, pero de forma fácil de comprender, casi todos los aspectos de la cosmología. Que pudiera, incluso, constituir un texto de referencia. Finalmente, el tercer motivo de la existencia de este libro es que me apetecía escribirlo. Ese debería bastar, pero por si acaso he incluido los dos anteriores.

Por consiguiente, el destino de este libro es servir como herramienta para la docencia de la cosmología a un nivel de postgrado, pero también como material de referencia para el especialista. Está destinado a estudiantes universitarios con alguna formación básica en astrofísica, y no son imprescindibles conocimientos previos de relatividad general. De hecho, se ha procurado en todo momento que el libro sea autosuficiente. Partiendo de un nivel más simple, va progresando en grado de dificultad y algunos de los capítulos finales podrían impartirse a un nivel de doctorado. El texto está refrendado por años de experiencia docente del autor impartiendo esta asignatura, así como por los alumnos que lo han sufrido y que han servido de piedra de toque.

En uno de los apéndices se exponen los aspectos pedagógicos relevantes, junto con una pequeña guía para el uso de la obra en la docencia de cursos de Cosmolo-

gía, Astrofísica extragaláctica o incluso de Introducción a la astronomía. En la página personal del autor en Internet, http://webpages.ull.es/users/jcepano, se proporciona material adicional sobre el texto, actualizaciones, fe de erratas y otra información complementaria.

En cuanto a unidades y convenios, se han redefinido las unidades tomando $c = k = G = 1$, a fin de simplificar la notación de las ecuaciones de Fridman. Sin embargo, en el capítulo 6 se ha redefinido $\hbar = 1$, lo cual es incompatible con $G = 1$, de modo que en el capítulo 6 vuelve a aparecer la G en las ecuaciones de Fridman. La razón del cambio obedece siempre a la simplicidad de notación. Se han utilizado índices griegos para coordenadas espacio-temporales y latinos para coordenadas espaciales. Los subíndices cero indican valores actuales de una variable que depende del tiempo cosmológico. Finalmente, dado que se ha hecho desaparecer la constante de Boltzmann de las ecuaciones de Fridman, se ha elegido k para designar la curvatura riemanniana (espacio-temporal), mientras que ε representa el signo de la curvatura y a el factor de escala.

Es preciso señalar que en la exposición de los hechos y su interpretación se presenta una imagen ordenada, coherente y que puede dar la impresión de definitiva. Ello no necesariamente obedece a la realidad, sino a motivaciones pedagógicas y a una mayor simplicidad y claridad expositiva. Los descubrimientos no se han producido en el orden de exposición y así se intenta mostrar en la breve digresión histórica que se proporciona para cada uno. Además, existen fenómenos que por el momento no tienen explicación enteramente satisfactoria, postulados *ad hoc*, así como incoherencias que, reales o aparentes, indican que la cosmología no es ni mucho menos un edificio acabado y sin fisuras. Ésta ha sido la motivación que ha llevado a incluir un apartado de críticas al modelo estándar. En resumen: queda mucho por estudiar y, casi con seguridad, muchas sorpresas que el autor espera con ilusión, y ojalá que este texto transmita al lector parte de ese entusiasmo.

El mérito de este libro no es solamente el resultado de años de trabajo y de esfuerzo míos. Mi mujer me ha ayudado elaborando algunas de las ilustraciones del texto (las bonitas, porque las feas son mías). También a David Galadí-Enríquez se le debe reconocer el mérito de haber revisado el texto y aportado muchas sugerencias que han contribuido a mejorarlo. Sin embargo, y como se acostumbra a decir, los errores que pueda contener son solamente míos, aunque por supuesto lo voy a negar.

La Laguna, 17 de mayo de 2006

Capítulo 1 | EL UNIVERSO OBSERVABLE

1.1 ¿Qué es el universo?

La ciencia estudia los hechos y se nutre de las experiencias. No se ocupa de las causas, que son objeto de la filosofía. En cambio, el término cosmología se deriva de las palabras griegas, *kósmos*, o conjunto de todas las cosas creadas, y *lógos*, tratado. Desde un punto de vista etimológico, por tanto, la cosmología trata de todas las cosas creadas. Sin embargo, como se ha mencionado más arriba, la ciencia solamente nos permite estudiar los objetos de los cuales podemos obtener información de alguna manera objetiva y cuantificable. La astrofísica, como ciencia «observacional», que no «experimental», estudia el universo a partir de la radiación electromagnética y de las partículas que se detectan. De este modo, nos vemos forzados a definir el universo, en el ámbito científico, como «todo lo que detectamos». Claramente, «todo lo que detectamos» está incluido en «todo lo que existe», pero en general ambos conjuntos no son iguales. Además, lo que detectamos puede variar con el tiempo: algunos objetos que no pueden detectarse ahora podrían detectarse en el futuro, de otros que se detectan ahora puede que no recibamos información en el futuro, y aun otros puede que no los detectemos nunca[1]. Por otro lado, desde el punto de vista de la ciencia llamada cosmología, no se estudia únicamente el universo observable en un instante de tiempo concreto. Entonces, el objeto de estudio que es nuestro universo podría definirse como «todo lo que podemos ver en un momento cualquiera». No existe, o no he encontrado, un término que pueda definir con precisión este concepto. Por consiguiente, aunque en puridad el término «cosmología» no describa etimológicamente la ciencia objeto de la presente monografía, se seguirá utilizando por conveniencia y tradición[2].

La diferenciación entre cosmología y filosofía no se produce, en puridad, hasta bien entrado el siglo XX, con el descubrimiento de la expansión del universo y la aplicación de la teoría de la relatividad general a la descripción del mismo. La cosmología, como ciencia, puede establecer las fronteras del universo observable e incluso puede

[1] Esta detectabilidad en función del tiempo viene determinada por los conceptos de horizonte cosmológico que se estudiarán en el capítulo cuarto.

[2] Al fin y al cabo, la astronomía se nutre de la tradición: actualmente se siguen usando de manera habitual las magnitudes definidas por Hiparco hacia 140 a.C. como medida del brillo de un objeto.

inferir su evolución. Sin embargo, como diría Parménides y, ahora sí, hablando de filosofía, no tiene sentido considerar un «dentro» y «fuera» del universo. No puede existir un observador fuera de nuestro universo. Si existiera, no estaría, por definición, en conexión causal con el universo, por lo que no sabríamos de su existencia, ni él de la nuestra, ni podría «ver» la frontera de nuestro universo observable. Si dicho observador estuviera, en cambio, en conexión con nuestro universo, es decir, si se hubiera producido algún tipo de interacción (intercambio de fotones, por ejemplo), entonces formaría parte del universo, no estaría «fuera» del mismo. El universo, según nuestra definición en el ámbito científico, solamente tiene «dentro», no tiene «fuera».

En este capítulo se presentan una serie de hechos observables que, combinados con razonamientos cualitativos y principios básicos de física, permitirán, sin acudir apenas a ningún tipo de modelo teórico, deducir algunas características esenciales de nuestro universo[3]. Por consiguiente, estos hechos sientan la base de cualquier teoría sobre el origen del universo y deben explicarse como consecuencia natural de la misma. Es decir: sin recurrir a artificios *ad hoc*[4]. Entre estos hechos observables se tratarán:

1. La llamada paradoja de Olbers: ¿por qué el cielo es oscuro por la noche?
2. La edad del universo deducida a partir de la edad de sus constituyentes.
3. La medición de distancias en nuestro universo.
4. El desplazamiento al rojo de los espectros de las galaxias.
5. Las medidas de supernovas tipo Ia a grandes distancias.
6. La presencia de materia no luminosa en nuestro universo.
7. La radiación de fondo cósmico de microondas.
8. Las abundancias de determinados elementos químicos en el universo.
9. La sobreabundancia de materia con respecto la antimateria.

En capítulos posteriores se retomarán estos hechos, y se obtendrán ulteriores consecuencias de aplicación cosmológica. También se analizarán a la luz del llamado «modelo estándar», como consecuencias naturales del mismo.

1.2 La paradoja de Olbers o por qué el cielo nocturno es oscuro

En efecto, ¿por qué el cielo es oscuro por la noche? Estamos tan acostumbrados a que oscurezca cuando el Sol se pone que no le damos mayor importancia a este hecho. Es más, casi podríamos preguntar ¿y por qué no debiera ser oscuro? En este apartado se mostrará cómo una pregunta de tan aparente simplicidad tiene fuertes implicaciones en las características de nuestro universo y no es, en absoluto, tan fácil de analizar, como lo demuestran las publicaciones que incluso hoy día siguen apareciendo en revistas científicas internacionales.

La llamada paradoja de Olbers fue descubierta por Edmund Halley en 1720, aunque por aquel entonces la analizó de manera incorrecta. El primero en estudiarla bien fue Loys de Chéseaux en 1744, y la elaboró en su forma actual Heinrich Olbers en 1826.

En la época de Halley, ya Newton hizo notar que si el universo no estuviera uniformemente lleno de estrellas, se colapsaría debido a la atracción gravitatoria, empezando por las partes más densas. Sin embargo, Newton no se dio cuenta de que un universo con extensión ilimitada en el espacio y el tiempo y que estuviera uniformemente lleno de estrellas, incluso aunque la densidad de las mismas fuera muy baja, se caracterizaría por poseer una densidad de radiación catastróficamente grande.

Aunque hoy en día sabemos que la Galaxia está limitada en el espacio y en el tiempo, con un diámetro de ~30 kpc, un grosor medio de ~1 kpc y una edad de unos 13 Ga[5], y que, por consiguiente, el universo no está uniformemente lleno de estrellas, la paradoja de Olbers sigue en vigor, puesto que el mismo planteamiento es aplicable a las galaxias como la nuestra, en vez de a las estrellas.

La paradoja de Olbers puede plantearse formalmente partiendo de las siguientes hipótesis:

1. Un universo euclídeo,
2. que se extiende ilimitadamente por el espacio,
3. que ha existido siempre,
4. poblado por fuentes distribuidas uniformemente con una densidad n y una luminosidad media constante L.

En un universo euclídeo, el flujo f recibido procedente de una fuente de luminosidad L situada a una distancia D es $f = L/(4\pi D^2)$ y el número de fuentes en una corteza esférica de radio D y espesor dD es $dN = 4\pi n D^2 dD$, donde n es constante por hipótesis. Por tanto, el flujo total F recibido procedente de todas las fuentes del universo sería: $F = \int_0^\infty f dN = Ln\int_0^\infty dD$. Integral que diverge. En consecuencia, se recibiría una cantidad infinita de radiación.

Es preciso señalar que un universo de extensión espacial infinita no es condición suficiente para que la paradoja de Olbers tenga lugar. Es preciso que, además, no ten-

[3] Aunque no existe *tabula rasa* sino que el lector probablemente posea ya conocimientos por lo menos al nivel de divulgación.

[4] Hay que reconocer que, como se verá más adelante, algunos paradigmas de la cosmología moderna no cumplen con estas condiciones.

[5] 1 Ga ≡ 1 Giga año o 10^9 años.

ga un origen en el tiempo o que este origen sea suficientemente lejano. En efecto, el carácter finito de la velocidad de la luz puede evitar la paradoja de Olbers en un universo de extensión ilimitada pero con un origen suficientemente cercano en el tiempo, puesto que solamente se habría recibido la luz de las fuentes más próximas.

Como es notorio que el cielo nocturno es bastante más oscuro que el brillo del Sol, una o más de las hipótesis de partida, o incluso hipótesis no enunciadas pero implícitas en el razonamiento anterior, han de ser falsas:

1. Se ha supuesto que la extinción es nula: en el siglo XIX, lord Kelvin postuló que la solución de la paradoja estaba en la extinción debida al polvo. Sin embargo, en el equilibrio termodinámico que más tarde o más temprano se alcanzaría, la misma energía absorbida por el polvo debería ser reemitida a longitudes de onda mayores, pero el cielo en el infrarrojo tanto cercano como lejano sigue siendo bastante oscuro, como muestran las medidas obtenidas con distintos satélites. Además, como ya se ha visto que la energía recibida es infinita, el polvo sería destruido por la gran elevación de temperatura que resultaría.
2. El espacio podría no ser euclídeo: ésta no es la solución a la paradoja, ya que se ha supuesto, por hipótesis, que la densidad de fuentes es constante. En ese caso la curvatura no alteraría la densidad de energía significativamente. En efecto, consideremos un símil bidimensional: una distribución de fuentes luminosas sobre un plano y sobre una superficie curva. Si las fuentes se distribuyen uniformemente sobre ambas superficies, es decir, con densidad superficial constante, el número acumulativo de fuentes seguirá aumentando en ambos casos a medida que aumenta la distancia al observador.
3. La densidad de objetos luminosos o su luminosidad media disminuye con la distancia, en un mismo instante de tiempo dado: eso solamente sería posible con respecto a un punto del espacio. Luego seríamos unos observadores privilegiados, lo cual es difícilmente justificable.
4. La densidad de objetos luminosos o su luminosidad media varía con el tiempo, en cualquier punto del espacio: esa posibilidad implica una evolución de las fuentes luminosas. Es decir: las galaxias no han existido desde siempre, sino que existe un instante de tiempo a partir del cual se han formado y empezado a brillar.
5. El universo podría no ser estático: sabemos que el universo se expande. Entonces el desplazamiento al rojo del espectro de los objetos luminosos reduce la energía de los fotones recibidos. Además, un desplazamiento lo suficientemente alto trasladaría al rango óptico el límite de Lyman (91.2 nm), lo que reduciría drásticamente el número de fotones recibidos en dicho rango. En efecto, muy pocas estrellas tienen una temperatura lo suficientemente elevada como para producir fotones tan energéticos, y éstos serían absorbidos por el hidrógeno de la propia Galaxia o de las nubes intergalácticas en la línea de visión del observador. El espectro óptico se desplazaría, entonces, al infrarrojo.

Los dos últimos puntos son, por eliminación, los realmente responsables de resolver la paradoja de Olbers. Consideremos primero la posible evolución de las galaxias. Tomando el ajuste de Felten (1985) a las galaxias de campo[6] mediante una función de tipo Schechter[7], la distancia a la que la contribución de las galaxias dentro de ese volumen haría que el cielo fuese tan brillante como el Sol sería de 10^{33} km, lo que es equivalente a 10^{20} años-luz o 3×10^{13} Mpc (ejercicio 1.1). Por tanto, para que el cielo nocturno fuera tan brillante como el Sol, las galaxias deberían haber existido con la misma densidad y luminosidad que las actuales desde hace 10^{20} años. Sin embargo, una estrella como el Sol solamente vive unos 10^{10} años. Las estrellas menos masivas viven más tiempo, pero son menos luminosas e, incluso así, difícilmente seguirán produciendo reacciones nucleares pasados 10^{20} años[8]. Podría argumentarse que sería suficiente formar, en cada galaxia, una generación de $\sim 10^{10}$ estrellas de una masa media igual a la solar cada 10^{10} años hasta llegar a los 10^{20} años. Sin embargo, eso implicaría que la masa media de una galaxia debería ser de 10^{20} masas solares, lo cual queda completamente descartado por las observaciones[9]. Por consiguiente, los conocimientos de evolución estelar y de las masas de las galaxias bastarían para descartar que el cielo fuera tan brillante como el Sol, aun sin haber medido su brillo. También podemos asegurar que las galaxias que observamos han tenido un origen en el tiempo. Dado que existen medidas del fondo óptico de luz extragaláctica que indican que éste es del orden[10] de 2×10^{-4} erg/cm^2/s (Bernstein, Freedman y Madore 2002), con el mismo razonamiento anterior, y también suponiendo que la luminosidad y densidad media de las galaxias no varía con el tiempo y es igual a la local, la máxima distancia a la que podrían existir galaxias en estas condiciones o, lo que es lo mismo, una estimación de la edad máxima de las galaxias, sería de unos 10^{10} años (ejercicio 1.2), que concuerda en orden de magnitud con la edad de las estrellas más viejas de nuestra Galaxia.

---

[6] Entendiendo por tales las que no se encuentran en cúmulos de galaxias.

[7] La función de Schechter representa la distribución de luminosidades (L) de galaxias de la forma siguiente: $n(x)dx = \phi^* x^\alpha e^{-x} dx$ donde n es la densidad de galaxias, $x = L/L^*$ y L^*, ϕ^* y α son parámetros. Según Felten (1985): $L^* = 1.24 \times 10^{10}\, h^{-2}\, L_\odot$, $\phi^* = 1.2 \times 10^{-2}\, h^3$ Mpc^{-3}, $\alpha = -1.25$, donde $h = 0.65$.

[8] El tiempo de permanencia en la secuencia principal de una estrella de 0.1 masas solares es de 6×10^{12} años (Prialnik, 2000).

[9] No puede argumentarse que la mayor parte de esa masa haya sido eyectada fuera de la Galaxia por procesos violentos de formación estelar, porque en ese caso el medio intergaláctico sería extraordinariamente masivo y, desde luego, ese fenómeno ya se habría detectado. Tampoco puede argumentarse que las estrellas hayan sido recicladas puesto que no sería compatible con las abundancias de metales observadas.

[10] Despreciando la corrección bolométrica.

Respecto a la contribución de un universo en expansión a la resolución de la paradoja, será discutido más adelante, y se pondrá de manifiesto que es menos significativa que la evolución de las galaxias.

En conclusión, la paradoja de Olbers es un buen ejemplo de cómo, a partir de hechos observables, podemos establecer restricciones a los posibles modelos de universo. **La solución de la paradoja pone esencialmente de manifiesto la edad finita de las galaxias, aunque la expansión del universo contribuya también en menor medida a disminuir la luz del fondo del cielo.**

1.3 La edad del universo

El análisis de la paradoja de Olbers indica, por tanto, que el universo o, mejor dicho, los objetos que lo integran, tienen una edad limitada. Entonces, ¿cuál es esa edad? Los métodos de datación utilizados se basan bien en razones de abundancias de elementos radiactivos, la llamada nucleocosmocronología, bien en la edad de las estrellas deducida mediante modelos de evolución estelar. En ambos casos los métodos se basan en la simultaneidad y en la inmutabilidad. El primero en la simultaneidad de producción de los elementos radiactivos y en la inmutabilidad de las reacciones de desintegración radiactiva, y el segundo en la simultaneidad de la formación de las estrellas de un cúmulo globular y la inmutabilidad de las leyes de la evolución estelar. En ambos casos solamente dispondremos de una cota inferior a la edad del universo: el universo no puede ser más joven que sus constituyentes observados, pero sí puede ser más viejo.

1.3.1 Evolución estelar

Esta técnica se basa en la determinación de la magnitud absoluta del punto de abandono de la secuencia principal de las estrellas, que depende de la edad de la estrella, de su masa y de su metalicidad[11]. Efectivamente, las estrellas abandonan la secuencia principal en orden de masas empezando por las más masivas. Sin embargo, no es fácil determinar la masa de una estrella. Además, esta determinación introduciría incertidumbres añadidas al cálculo de la edad. Este inconveniente puede obviarse observando el conjunto de estrellas que componen un cúmulo globular. Por un lado, son las estrellas más viejas de la Galaxia (de población II), lo cual proporcionará una buena cota a la edad del sistema estelar. Por otro, puede considerarse como una excelente aproximación suponer que todas las estrellas del cúmulo se han formado simultáneamente y que cubren un rango de masas variado, por lo que la fotometría en dos colores permitirá localizar el punto de abandono sin necesidad de determinar las masas (figura 1.1). Entonces, mediante un ajuste por modelos de isocronas puede determinarse la edad, conocida la distancia, con una precisión del 10%. Sin embargo dicha edad depende del contenido en metales. Los modelos indican que existe una dependencia de la forma,

$$\log t = 1.035 + 2.085\,(0.3 - Y) - 0.03\,(\log Z + 3), \qquad (1.1)$$

donde t es la edad en unidades de 10^9 años e Y y Z son las abundancias de helio y metales con respecto al hidrógeno, respectivamente. Las abundancias pueden medirse directamente o bien estimarse mediante ciertas suposiciones. Por ejemplo, la abundancia de helio puede estimarse a partir de la razón R entre el número de estrellas en la rama horizontal y en la rama de gigantes rojas:

$$Y = 0.3 - 0.39 \log(f/R), \qquad (1.2)$$

donde el valor de f depende del modelo. Con este tipo de métodos se obtiene que la edad del cúmulo globular más viejo de nuestra Galaxia es de unos 13.1±1.2 Ga (Sa-

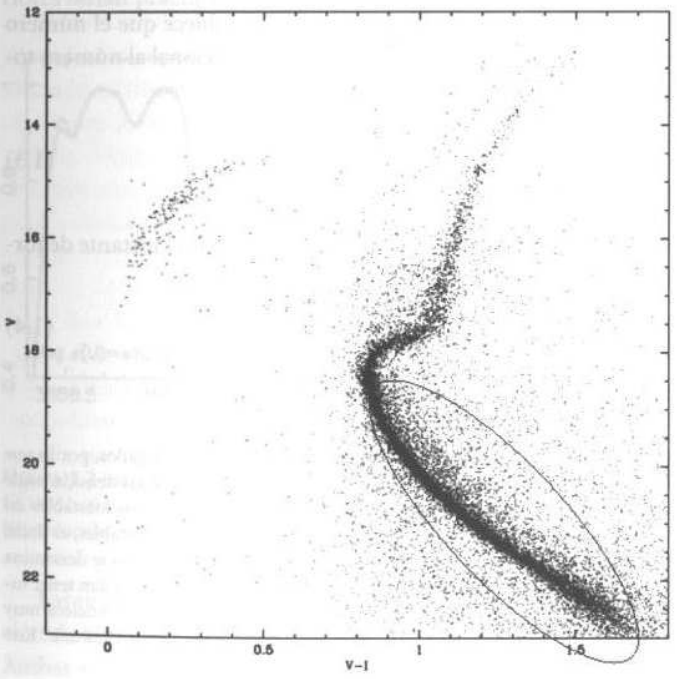


Figura 1.1 Diagrama esquemático color-magnitud para un cúmulo globular típico. En ordenadas se ha representado la magnitud en V y en abscisas el color V–I. Cuando las estrellas de la secuencia principal, consumidoras de hidrógeno, agotan dicho elemento en su núcleo, se desvían de la secuencia principal (marcada con un óvalo en la figura) y pasan a la rama de gigantes rojas, donde consumen hidrógeno en capa y producen más helio. En un momento dado, el helio que se acumula en el núcleo empieza a quemarse con lo que la estrella pasa a la rama horizontal. Al agotarse el helio evoluciona a enana blanca. Figura adaptada de Von Braun *et al.*, 2002, figura 8.
Reproducido con permiso de la American Astronomical Society.

[11] Entendida como la abundancia, relativa al hidrógeno, de todos los elementos más pesados que el helio.

laris y Weiss 2002), valor que concuerda con el recientemente encontrado por Gratton *et al.* (2003) de 13.4±1.0 Ga. Sin embargo, Imbriani *et al.* (2004) afirman que esta edad debe incrementarse en 0.7-1.0 Ga debido a su reciente estimación del momento en que se inicia el ciclo CNO, que marca el abandono de la secuencia principal. En este caso, la edad de los cúmulos globulares galácticos sería de 14.3±1.0 Ga.

Las incertidumbres más importantes de este método radican en la determinación de la distancia del cúmulo, el ajuste de la isocrona a los datos y el modelo (efecto de las abundancias y de la convección y las opacidades utilizadas).

1.3.2 Nucleocosmocronología

En la explosión de una supernova se producen elementos radiactivos de vida larga mediante captura de neutrones por elementos pesados, el llamado proceso r[12]. Dichos elementos enriquecen el medio interestelar que servirá de material de partida para la siguiente generación de estrellas. Por consiguiente, la observación de razones de isótopos de estos elementos en estrellas de la población II proporcionará una estimación del momento en que se generaron los elementos, que es anterior a la formación de dichas estrellas pero posterior a la formación del universo. Cabe esperar, por consiguiente, que las edades así estimadas sean mayores que las deducidas a partir de los cúmulos globulares.

El procedimiento se basa en la ley de Rutherford, que establece que el número n de núcleos de un cierto elemento que se desintegra es proporcional al número total de núcleos presentes,

$$\mathrm{d}n = -\frac{n}{\tau}\mathrm{d}t, \tag{1.3}$$

donde τ es la vida media del elemento. Contando el tiempo desde el instante de formación del elemento,

$$n = m\exp(-t/\tau), \tag{1.4}$$

donde m es el número de núcleos inicial.

[12] La repulsión coulombiana impide las reacciones de fusión de núcleos muy cargados, por lo que la síntesis de los elementos más pesados tiene lugar por captura de neutrones. Cuando las densidades de neutrones son suficientemente bajas como para que entre captura y captura los núcleos inestables así generados puedan β-desintegrarse, se generan máximos de abundancias de elementos estables, es decir, con capas cerradas que tienen un *número mágico* de neutrones. Este tipo de nucleosíntesis se denomina *proceso s*. En cambio, cuando las densidades de neutrones son tan altas como para que puedan tener lugar sucesivas capturas de neutrones antes de que ocurra la desintegración β, se sintetizan núcleos muy inestables de vidas medias muy cortas, que generan elementos más pesados tales como Th, Pu, U. Este tipo de nucleosíntesis se denomina *proceso r*.

Por consiguiente, si dos elementos a y b se producen simultáneamente, tenemos,

$$\frac{n_a}{n_b} = \frac{m_a}{m_b}\exp\left[-t(\tau_a^{-1} - \tau_b^{-1})\right], \tag{1.5}$$

de donde,

$$t = \frac{\tau_a\tau_b}{\tau_b - \tau_a}\left[\ln\left(\frac{m_a}{m_b}\right) - \ln\left(\frac{n_a}{n_b}\right)\right]. \tag{1.6}$$

Las cantidades m_a y m_b proceden de predicciones de modelos de formación de elementos por el proceso r, de ahí que sea preciso considerar pares de elementos, puesto que los modelos predicen abundancias relativas. Las cantidades τ_a y τ_b se miden en laboratorio. Por tanto, estas cuatro cantidades dependen del elemento que se trate, mientras que n_a y n_b proceden de las observaciones de espectros estelares.

Las vidas medias de ambos elementos tienen que ser del orden de la edad que se pretende medir, por ejemplo, ^{232}Th y ^{238}U, con vidas medias de 14.05 Ga y 4.468 Ga, respectivamente. Elementos con vidas medias mucho menores ya no existirían en cantidades apreciables o fácilmente medibles, como sería el caso del ^{235}U. En cambio, las razones de la ecuación (1.5) en elementos con vidas medias muy superiores serían prácticamente iguales.

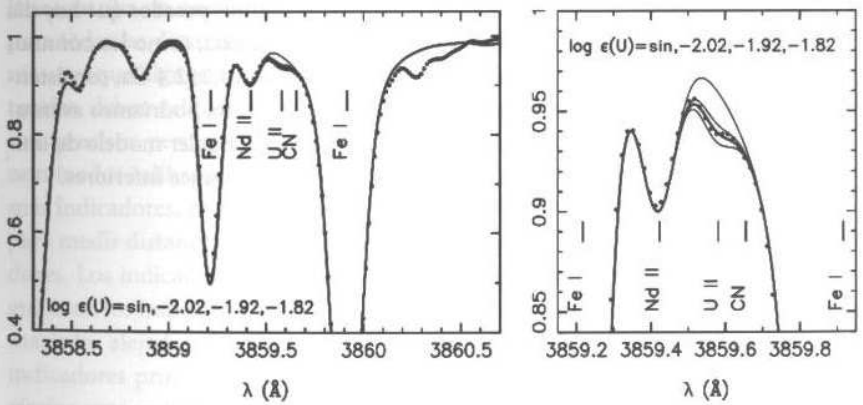


Figura 1.2 Línea de absorción del uranio (UII 3859 Å) en la estrella del halo pobre en metales CS31082-001, utilizada, junto con líneas de torio, en la determinación de la edad. De Hill *et al.*, 2002. Reproducido con permiso de Springer Science and Business Media.

Las principales incertidumbres de las que adolece este método son: la determinación de abundancias y las razones de producción inicial predichas por los modelos. Ambas se minimizan eligiendo parejas de elementos próximos en número atómico.

La incertidumbre en la determinación de las abundancias es debida a que se deducen de unas pocas líneas de absorción de los elementos que corresponden al mismo o a distintos estados de ionización a partir de modelos de atmósferas estelares.

Las medidas obtenidas a partir del ^{238}U en estrellas de población II (figura 1.2) proporcionan una edad de las primeras estrellas y, por tanto, una cota inferior a la edad de universo de 14.0±2.4 Ga (Hill *et al.*, 2002).

1.3.3 Conclusión

Aunque ambas estimaciones ofrezcan cotas inferiores a la edad del universo, puesto que son determinaciones de edades de la Galaxia o de sus estrellas precursoras, contribuyen a descartar o a introducir restricciones a modelos cosmológicos. El universo no puede ser más joven que sus constituyentes observados, pero sí más viejo. ¿En qué cantidad? Depende del momento de la formación de los primeros cúmulos globulares o, en el caso de la nucleocosmocronología, de la generación de las primeras estrellas del universo. No se conoce con seguridad en qué momento se empezaron a formar los primeros cúmulos globulares, aunque parece que fue del orden o anterior a los primeros 0.5 Ga (véase capítulo octavo). En este caso, podría estimarse que la edad del universo es del orden de 14.8±1.0 Ga. Por otro lado, parece que las primeras estrellas aparecieron cuando el universo tenía a lo sumo 0.2 Ga (véase capítulo octavo). Si esa primera generación de estrellas dio lugar a las explosiones de supernovas cuyos procesos *r* generaron los elementos pesados que hoy día se observan en las estrellas de la población II de nuestra Galaxia, como los cúmulos globulares, entonces la edad del universo sería del orden de 14.2±2.4 Ga, consistente con la anterior, aunque con mayor incertidumbre. Por tanto, podríamos aventurar que **la edad del universo es del orden de 14.8±1.0 Ga.** Cualquier modelo de universo tiene que ser compatible con edades del mismo orden, nunca inferiores.

1.4 Determinación de distancias en el universo

1.4.1 Introducción

Sabido que los constituyentes del universo tienen una edad finita y una vez estimada dicha edad, procede preguntarse acerca de la distribución de galaxias a nuestro alrededor. ¿Es ésta uniforme o presenta estructura? La astronomía estudia fundamentalmente la ubicación angular de objetos en la esfera celeste. En el caso de los objetos más próximos pertenecientes a nuestra Galaxia, la variación de su posición debido a la paralaje permite deducir sus distancias. Sin embargo, la cosmología precisa determinar las distancias de objetos extragalácticos. Este cartografiado del universo local proporcionará claves muy valiosas acerca del origen de las estructuras materiales de nuestro universo y de la evolución del mismo.

Los métodos utilizados pueden agruparse, generalmente, en dos técnicas:

1. El uso de relaciones bien definidas entre una cantidad y la luminosidad. Por ejemplo, entre el periodo de variación de una estrella variable (cefeidas, estrellas tipo RR Lyrae...) y la luminosidad, o bien la constancia de la función de luminosidad de determinados objetos (nebulosas planetarias, regiones HII, cúmulos globulares...). Estas relaciones permiten inferir la magnitud absoluta o la luminosidad de un objeto. La medida directa de la magnitud aparente o el brillo proporcionará entonces el módulo de distancia o el cuadrado de la distancia, respectivamente.
2. Invariabilidad del tamaño físico de determinados objetos. Por ejemplo, las mayores regiones HII extragalácticas, o las galaxias de un cúmulo. En este caso la distancia se deduce a partir de la estimación del tamaño físico y la medición del tamaño angular aparente. La relación entre ambas cantidades permite determinar la distancia.

1.4.2 La escala de distancias

La causa fundamental de incertidumbre en la medida de distancias a objetos lejanos estriba en que no puede usarse un mismo método o indicador de distancia para todas las distancias, sino que hay que usar indicadores distintos según la lejanía. Aunque algunos indicadores puedan utilizarse para un amplio rango de distancias, deben calibrarse previamente mediante otros indicadores. Los indicadores más precisos, pero que sólo se pueden utilizar en los tramos más cortos, son los denominados **calibradores**. Como su nombre indica, permiten calibrar todos los demás indicadores, en particular los llamados indicadores **primarios**, que se utilizan para medir distancias a objetos demasiado alejados como para emplear los calibradores. Los indicadores primarios sirven, a su vez, para calibrar los indicadores siguientes, los indicadores **secundarios**, que permiten medir distancias a objetos demasiado alejados como para aplicar indicadores primarios. Finalmente, los indicadores primarios y secundarios se utilizan para calibrar los indicadores **terciarios**, que se emplean para medir las distancias de los objetos más lejanos. Debido a esta estructura de dependencia, establecida formalmente por De Vaucouleurs en 1978, se acostumbra a hablar de la **escala de distancias**. Con posterioridad se han desarrollado indicadores secundarios que permiten alcanzar grandes lejanías y que han sustituido a los indicadores terciarios.

Desde un punto de vista histórico, las primeras determinaciones de distancias se obtuvieron utilizando la técnica de la paralaje, que permite llegar hasta distan-

cias del orden de 1 kpc. Este método, junto con los ajustes de ZAMS[13] a cúmulos globulares (GC), que alcanzan hasta el orden de la decena de kpc, constituyen los **calibradores** que proporcionan las distancias absolutas utilizadas para la calibración de los indicadores **primarios**, que a su vez están constituidos por:

- Estrellas variables con una relación definida entre el periodo y la luminosidad (cefeidas, estrellas tipo RR Lyrae, estrellas tipo W Virginis). Son los indicadores primarios por antonomasia.
- Estrellas de luminosidades bien definidas, como las de la rama horizontal o las explosiones de novas. En estas últimas, el método se basa en la relación existente entre la luminosidad del máximo y el tiempo que tardan en descender 2 magnitudes su brillo.

Estos indicadores primarios permiten determinar las distancias a las galaxias más próximas, pero sólo mientras sea posible distinguir en ellas estrellas individuales. Aunque el telescopio espacial *Hubble* ha ampliado este intervalo, los indicadores primarios permiten llegar típicamente hasta distancias comparables a la del cúmulo de Virgo (20 Mpc). El nuevo atlas de Sandage y Bedke (1995) ofrece un buen ejemplo de una muestra de galaxias utilizada para la determinación tradicional de distancias.

Utilizando las galaxias más próximas con distancias determinadas a partir de indicadores primarios, se calibran los indicadores **secundarios** que se basan en:

- La luminosidad característica de las estrellas más brillantes de una galaxia, como las gigantes rojas o las supergigantes azules o rojas más brillantes. Se supone que este último tipo de estrellas termina teniendo la misma masa y, por tanto, la misma luminosidad, debido a procesos de pérdida de masa. Por ejemplo, se acostumbra a considerar que las estrellas más brillantes de las galaxias de tipo Sc tienen luminosidades similares.
- La constancia del diámetro medio de las tres regiones HII más brillantes de una galaxia.
- El máximo de la función de luminosidad (LF) de los cúmulos globulares de las galaxias tiene lugar a una luminosidad fija (figura 1.3).
- Las funciones de luminosidad de nebulosas planetarias (PN) de una galaxia presentan un máximo en la luminosidad que pueden alcanzar (figura 1.4). La dificultad inherente a este método reside en distinguir nebulosas planetarias de otras regiones en emisión tales como regiones HII compactas, especialmente en galaxias distantes. La discriminación requiere utilizar distintas líneas de emisión además de la del [OIII] a 5007 Å, característica de este tipo de objetos.

[13] *Zero Age Main Sequence* o secuencia principal de edad cero.

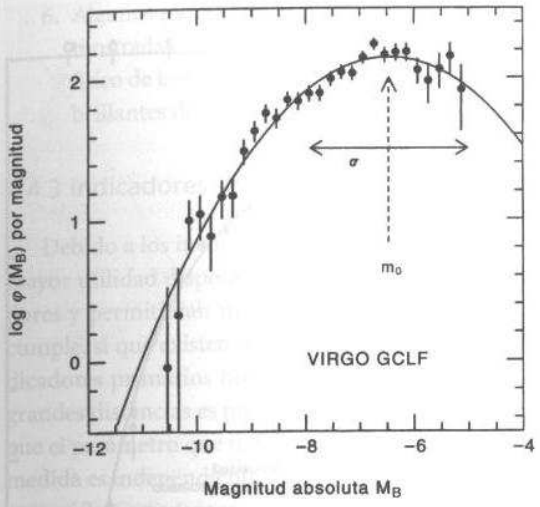


Figura 1.3 Función de luminosidad de unos 2000 cúmulos globulares alrededor de cuatro galaxias elípticas gigantes del cúmulo de Virgo. La distribución presenta un máximo a una magnitud absoluta dada, lo que permite obtener el módulo de distancia. De Jacoby *et al.*, 1992.
Copyright 1992, Astronomical Society of the Pacific, reproducido con permiso de los Editores.

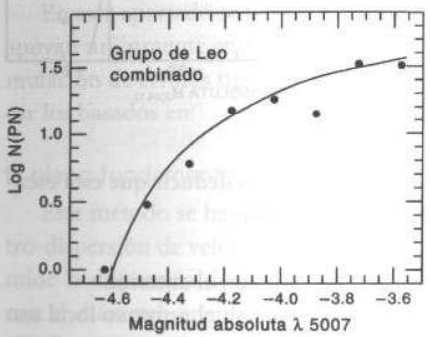


Figura 1.4 Función de luminosidad de nebulosas planetarias de las galaxias del grupo de Leo I. El ajuste de una función de luminosidad proporciona el módulo de distancia, dado que existe un límite para la luminosidad máxima que pueden presentar las nebulosas planetarias. De Ciardullo, Jacoby y Ford, 1989.
Reproducido con permiso de la American Astronomical Society.

Los indicadores **terciarios** se apoyan en los secundarios y permiten llegar todavía más lejos. Se basan en la luminosidad o el diámetro constantes de la galaxia más brillante de un cúmulo (figura 1.5). Además de las incertidumbres generales presentes en la escala de distancias, estos métodos adolecen de la falta de base física de la correlación utilizada y de dos posibles sesgos observacionales: el efecto Scott (Scott, 1957) y el efecto Bautz-Morgan. En el primer caso, a grandes distancias se distinguen más fácilmente los cúmulos más ricos (con mayor número de galaxias), y sucede que la luminosidad de la galaxia más brillante de un cúmulo está relacionada con la riqueza del cúmulo. En el segundo, los cúmulos se dividen en al menos cinco clases, y dentro de cada clase la luminosidad de la galaxia más brillante es distinta, y por tanto a grandes distancias no se observan todas las clases de cúmulos con la misma facilidad. Por estos motivos, los indicadores terciarios han sido sustituidos por indicadores secundarios de largo alcance (1.4.3), más fiables.

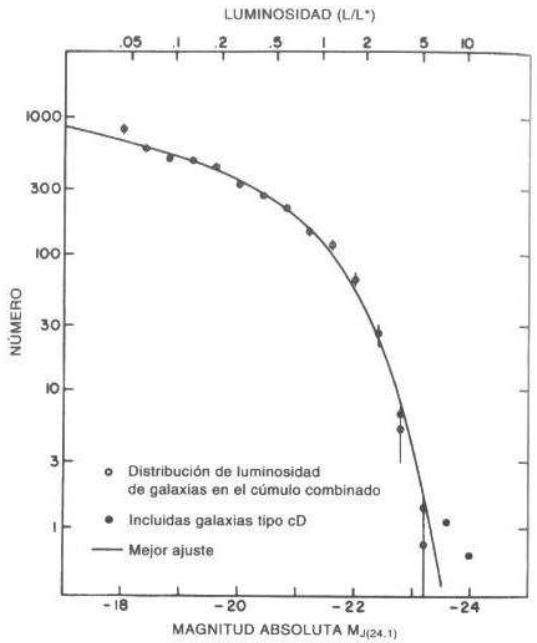


Figura 1.5 Función de luminosidad de las galaxias de distintos cúmulos. Como en el caso de las nebulosas planetarias, la función de luminosidad de un cúmulo dado permite obtener, a partir del ajuste, el módulo de distancia del cúmulo. Tomado de Schechter, 1976.
Reproducido con permiso de la American Astronomical Society.

A partir de lo expuesto hasta ahora, y *a priori*, podemos deducir que esta escala de distancias tendrá las siguientes dificultades inherentes:

1. La propagación de errores al calibrar un indicador con el anterior.
2. La suposición de que las propiedades de los objetos en el universo local son las mismas que a grandes distancias, donde ya podrían intervenir efectos evolutivos. En efecto, la luz que nos llega de objetos más lejanos refleja el estado de dichos objetos en un tiempo anterior, debido al carácter finito de la velocidad de propagación de la luz.
3. La extinción, si se utilizan métodos basados en la luminosidad.
4. El sesgo de Malmquist[14].
5. La dificultad de medir diámetros de objetos difusos si se utilizan métodos basados en tamaños invariables. Esto es especialmente cierto a grandes distancias, donde el error cometido aumenta considerablemente debido a la disminución de la resolución espacial.

[14] A grandes distancias se detectarán esencialmente las galaxias y cúmulos de galaxias más brillantes, mientras que las correlaciones de brillos y tamaños con la distancia no han sido deducidas exclusivamente para los objetos más brillantes.

6. Algunos métodos se basan en suposiciones razonables, pero que no han sido demostradas sin ambigüedad. En algunos casos, incluso, se desconoce el mecanismo físico de la correlación (tamaños o luminosidades invariables de las galaxias más brillantes de un cúmulo, por ejemplo) en que se basa la medida de distancias.

1.4.3 Indicadores secundarios de gran alcance

Debido a los inconvenientes que presenta la escala de distancias, resultaría de la mayor utilidad disponer de indicadores que solamente se apoyasen en los calibradores y permitieran medir a grandes lejanías. Si bien la primera condición no se cumple, sí que existen indicadores de gran alcance que solamente se apoyan en indicadores primarios bien establecidos como es el caso de las cefeidas. Para medir grandes distancias es preciso disponer de indicadores suficientemente luminosos, y que el parámetro que defina el indicador pueda medirse con facilidad. Si además la medida es independiente de efectos evolutivos, o bien existe un procedimiento para corregirlos, estaríamos en presencia de un indicador casi ideal.

En este apartado se pasará revista a algunos indicadores de gran alcance que se apoyan únicamente en indicadores primarios. De esta manera se minimiza la acumulación de errores típica de la escala de distancias. Entre otros, podríamos destacar los basados en:

El plano fundamental

Este método se basa en la invariancia del plano fundamental (relación diámetro-dispersión de velocidades) de las galaxias elípticas (figura 1.6). En este caso, se mide la dispersión de velocidades y se deduce el diámetro físico, que se compara con el diámetro angular medido. Los objetos en que se basa el método (galaxias elípticas) son suficientemente luminosos como para detectarse a grandes distancias, pero la medida de la dispersión de velocidades requiere espectroscopia de una resolución considerable, lo que limita su alcance. Además, está en discusión la influencia de efectos evolutivos en esta relación.

Las fluctuaciones de brillo superficial

Este método resulta de aplicación si se admite que la luminosidad y la densidad de las estrellas más brillantes de una galaxia no evolucionan con el tiempo, es decir: no varían con la distancia. Además hay que admitir que la proyección de la densidad de estrellas sobre el plano tangente definido por la línea de visión (la integral sobre la línea de visión) es independiente de la orientación de la galaxia relativa al observador. Entonces se deduce que el número de estrellas que captura cada elemento de imagen de un detector depende solamente de la distancia (figura 1.7). En estas circunstancias, las fluctuaciones estadísticas del brillo superfi-

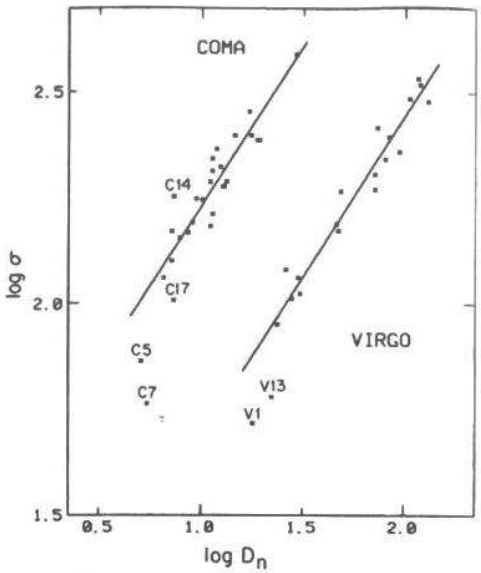


Figura 1.6 Proyección del plano fundamental de las galaxias elípticas de los cúmulos de Virgo y Coma. La relación entre la dispersión de velocidades σ en km/s y el diámetro D en segundos de arco permite obtener distancias utilizando como patrón el plano fundamental calibrado con otros indicadores, mediante la medida de las velocidades de dispersión de una galaxia dada. Efectivamente, el ajuste de los cúmulos de Virgo y Coma arroja rectas paralelas cuya separación corresponde a la distancia que separa ambos cúmulos. Tomado de Dressler *et al.*, 1987.
Reproducido con permiso de la American Astronomical Society.

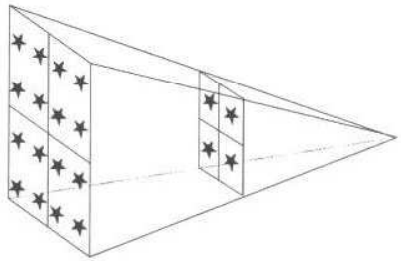


Figura 1.7 Si la densidad de estrellas de una galaxia permanece constante, y su proyección sobre la línea de visión es independiente de la orientación, el número de estrellas que ve cada elemento de un detector depende de la distancia.

cial[15] de un elemento de imagen a otro dependerán, según la estadística de Poisson, del inverso de la raíz cuadrada del número de estrellas que ve cada elemento de imagen. Por consiguiente, aunque el brillo superficial de un objeto no dependa de la distancia, existirá una relación entre la amplitud de las fluctuaciones de brillo entre distintos elementos de la imagen de la galaxia y la distancia a la misma. Esta relación requiere una calibración con indicadores primarios, y se aplica en galaxias elípticas a fin de minimizar la contribución de efectos evolutivos, variaciones de metalicidad (que alteren la luminosidad de estrellas de un mismo tipo espectral), efectos de orientación y variaciones de extinción de objeto a objeto. También es preciso evitar que aparezcan otros objetos cerca de la línea de visión que puedan provocar efectos de lente o interferir en la fotometría. Basándose en las hipótesis de partida, la principal limitación del método residirá en los efectos evolutivos.

[15] Por unidad de ángulo sólido.

La relación Tully-Fisher

La relación Tully-Fisher se basa en la correlación entre la anchura de la línea de 21 cm de galaxias espirales y su luminosidad. El fundamento físico de este método radica en que la anchura de la línea de 21 cm, que es relativamente fácil de medir en ondas de radio, da una indicación de la velocidad máxima de la curva de rotación, que a su vez está determinada por la masa total de la galaxia. Supuesto que no exista evolución, la relación masa/luminosidad de las galaxias espirales es constante, lo cual establece una dependencia entre el campo de velocidades y la luminosidad. Aunque las galaxias espirales son objetos luminosos, la relación Tully-Fisher presenta el inconveniente de que la anchura del campo de velocidades se mide bien en galaxias de canto, pero en contrapartida en éstas la extinción es grande. Por ese motivo se recurre a la luminosidad infrarroja, menos afectada por la extinción (figura 1.8). Aunque existen indicios contradictorios acerca de efectos evolutivos (véase, por ejemplo, Conselice *et al.* 2005, Ziegler *et al.*, 2002 y Vogt y Phillips, 2002), parece que este método puede aplicarse a distancias considerables con fiabilidad. Finalmente, la relación Tully-Fisher mediante la medida del campo de velocidades utilizando la espectroscopia de rendija en el óptico o infrarrojo adolece de un inconveniente adicional: las incertidumbres en el ángulo de posición de la rendija, que generan subestimaciones del campo de velocidades.

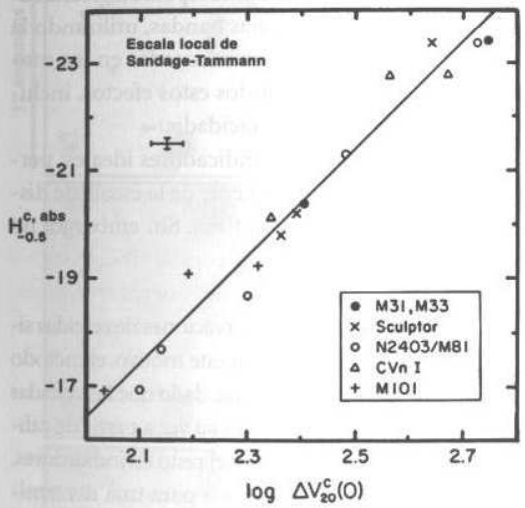


Figura 1.8 Relación Tully-Fisher infrarroja utilizada por Aaronson y Mould (1983). En el eje de abscisas se ha representado la anchura de la línea de 21 cm. El ajuste proporciona la magnitud absoluta y, por tanto, el módulo de distancia, dada la anchura de la línea de 21 cm.
Reproducido con permiso de la American Astronomical Society.

Las supernovas de tipo Ia

El indicador más destacado y que cubre un mayor rango de distancias lo constituyen las supernovas tipo Ia (SNIa). Al contrario que las demás supernovas (o supernovas gravitatorias), cuyos progenitores son estrellas de gran masa, las Ia proceden de sistemas binarios compuestos por una enana blanca y una gigante roja que se encuentran

suficientemente próximas como para que se produzca captura de masa de la gigante roja por parte de la enana blanca, al llenar la primera el lóbulo de Roche de su compañera. Cuando la acreción es suficiente como para que se supere el límite de Chandrasekhar, se produce una implosión gravitatoria que desencadena la fusión termonuclear del carbono/oxígeno de la enana blanca. Este mecanismo de explosión es, en principio, suficientemente simple como para que los modelos predigan luminosidades con la fiabilidad necesaria. Este tipo de supernovas puede distinguirse espectroscópicamente de otros tipos con relativa facilidad. Se caracterizan por conformar una clase bastante homogénea desde el punto de vista espectroscópico y fotométrico, con magnitudes absolutas en B de -19.4 ó -19.5 y colores $B-V\approx 0$. Además, a partir del espectro es posible establecer si una supernova se halla antes o cerca del máximo, o bien después del máximo. La gran luminosidad del máximo, su relativa uniformidad, junto con la posibilidad de determinar si se ha observado el mismo o no, sitúa a las supernovas Ia como indicadores privilegiados para determinación de grandes distancias de forma casi independiente de la escala de distancias, evitando así gran parte de sus inconvenientes.

No obstante, el máximo de luminosidad de las supernovas Ia depende de Δm_{15} (el incremento en magnitudes en la banda B 15 días después del máximo, es decir, depende de la forma de la curva de luz), del color $B-V$, de determinados índices espectroscópicos y del tipo morfológico y color de la galaxia huésped. Afortunadamente, a partir de observaciones de la curva de luz en varias bandas, utilizando la base de datos observacionales e introduciendo las variables adecuadas en los modelos, es posible corregir la luminosidad del máximo de todos estos efectos, incluso de la extinción y de efectos evolutivos debidos a la metalicidad.

En estas circunstancias las SNIa podrían calificarse de indicadores ideales: permiten observar a grandes distancias de forma casi independiente de la escala de distancias, y permiten corregir de extinción y de efectos evolutivos. Sin embargo, no carecen de incertidumbres:

- La luminosidad del máximo debe calibrarse a partir de observaciones de cefeidas situadas en galaxias huéspedes de supernovas Ia cercanas. Por este motivo, el método no es completamente independiente de la escala de distancias, dado que las cefeidas no constituyen un calibrador absoluto, sino que se calibran a su vez a partir de calibradores absolutos. Éste es un problema que comparten con el resto de indicadores.
- La determinación de la forma de la curva de luz, necesaria para una determinación fiable de la luminosidad del máximo, aumenta sus errores fotométricos no solamente con la distancia, sino también con el tiempo transcurrido desde el máximo. De hecho, a menudo las supernovas no se separan fácilmente de la galaxia huésped (figura 1.9) y es preciso sustraer un modelo de galaxia para determinar la magnitud de la estrella (figura 1.10).
- La validez de los modelos evolutivos de la curva de luz.

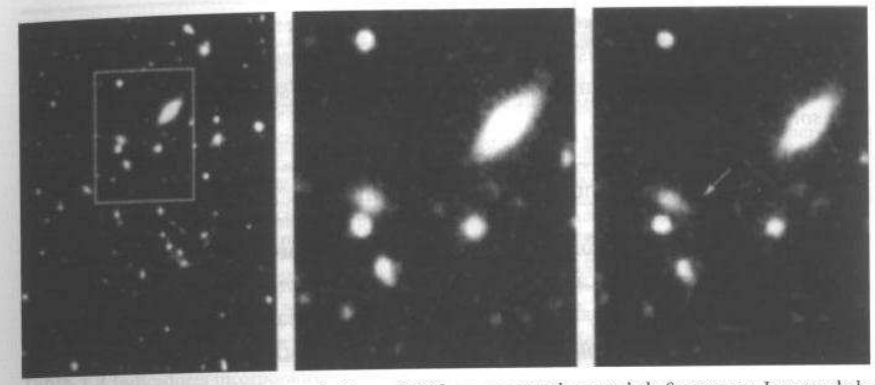


Figura 1.9 Supernova Ia, en una galaxia a z=0.66 Imagen central: antes de la Supernova. Imagen de la derecha: después de la explosión. La Supernova se indica por una flecha. Nótese la dificultad en la obtención de la fotometría, en especial para la determinación de la curva de luz, de brillo progresivamente decreciente con el tiempo. Tomado de Hoger, Kirshner y Suntzeff, 1999.

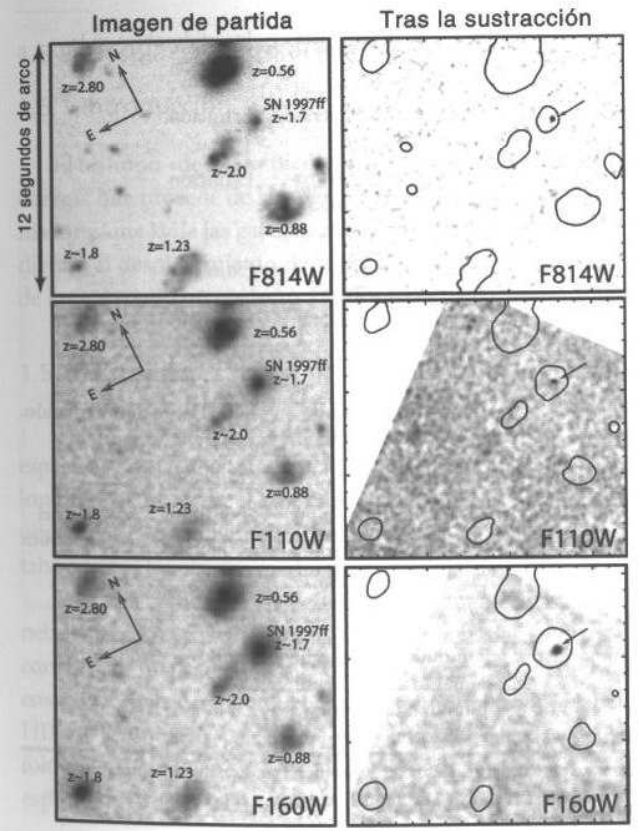


Figura 1.10 Izquierda: observaciones de la SNIa 1997ff a z~1.7 con el telescopio espacial *Hubble* en distintos filtros, superpuesta con la imagen de la galaxia huésped. Derecha: imágenes de la supernova, señalada con una flecha, una vez sustraído un modelo de las galaxias de la imagen, situadas a distintos desplazamientos al rojo. Tomado de Riess *et al.*, 2001. Reproducido con permiso de la American Astronomical Society.

Finalmente, un inconveniente añadido es que no permiten determinar la distancia a una galaxia de nuestra elección, a no ser que detectemos una SNIa en ella. Por este motivo, **más que un indicador de distancias, las supernovas Ia constituyen una *sonda cosmológica*.**

1.4.4 Resumen de los indicadores de distancia

Las siguientes tablas resumen los principales indicadores y el rango de distancias que cubren. Todos los indicadores pueden considerarse *prima facie* afectados por la evolución. Sin embargo, en algunos de ellos la dependencia podría ser lo bastante débil (relación Tully-Fisher, por ejemplo) o susceptible de corrección (caso de las SNIa).

Tipo	Alcance	Indicador	Método	Limitaciones
Calibrador (de los indicadores primarios)	La Galaxia	Estrellas, cúmulos	Paralaje trigonométrica, secular, dinámica o estadística	Cinemática del Sol. Extinción
			Ajuste de la secuencia principal	Incertidumbres en la secuencia
Primarios	Virgo = 20 Mpc (galaxias próximas)	Cefeidas I y II, RR Lyr	Relación entre el periodo y la luminosidad	Extinción
		Novas	Luminosidad máxima-tiempo en disminuir 2 magnitudes	Extinción
		Rama horizontal	Luminosidad fija	Extinción
Secundarios	100 Mpc (10 Mpc)	Gigantes rojas y supergigantes rojas y azules	Luminosidad fija	Extinción
		LF de PN	Parámetros de la LF	Difícil de medir. Extinción. Precisión del ajuste
		LF de GC	Máximo de L fija	Extinción.
		Regiones HII	Las mayores tienen un tamaño fijo	Son difusas. Depende del tipo morfológico. Estadística
Terciarios	>>100 Mpc (40 Mpc)	Diámetros de galaxias	Tamaños fijos	Depende del tipo morfológico
		Luminosidades de galaxias	Luminosidades fijas de la más brillante de un cúmulo o de un mismo tipo morfológico	Extinción. Evolución

Tabla 1.1 Indicadores utilizados para establecer la escala de distancias siguiendo la definición de De Vaucouleurs (1978). El alcance entre paréntesis corresponde al estimado como válido en la época en que De Vaucouleurs publicó su artículo.

Indicador	Método	Limitaciones
Fluctuaciones de brillo superficial	Fluctuaciones estadísticas de brillo píxel a píxel	Obtención de la señal suficiente y efectos evolutivos
Plano fundamental de galaxias elípticas	Relación dispersión de velocidades-diámetro	Dificultad de medir tamaños y dispersiones de velocidad a grandes distancias
Tully-Fisher (espirales)	Relación anchura 21 cm-luminosidad	Extinción. Compromiso entre galaxias de cara y de canto. Ángulo de posición de la rendija en el óptico-infrarrojo
SNIa	Relación entre forma de la curva de luz-luminosidad	Errores fotométricos. Incertidumbres en correcciones evolutivas

Tabla 1.2 Indicadores incorporados con posterioridad a De Vaucouleurs (1978), en orden del rango de distancias que permiten cubrir. Los tres últimos cubren un gran rango de distancias y se apoyan en indicadores primarios (cefeidas típicamente) para su calibración. De entre ellos las SNIa son los que permiten alcanzar las mayores distancias, del orden de 10 Gpc.

1.5 El desplazamiento al rojo

1.5.1 Introducción

El término «desplazamiento al rojo» se utiliza para indicar que la distribución de energía que procede de las galaxias lejanas está desplazada hacia longitudes de onda mayores que la de las galaxias más próximas, lo que se acostumbra a cuantificar midiendo el desplazamiento de líneas de emisión u absorción presentes en el espectro de las galaxias, con respecto a la posición de las mismas líneas en el laboratorio.

1.5.2 Historia

Vesto Slipher midió por primera vez, entre 1912 y 1925, líneas de emisión en los espectros de 40 «objetos nebulares». Sorprendido, constató que líneas espectrales cuya longitud de onda en el laboratorio era λ se observaban situadas a una longitud de onda $\lambda_0 > \lambda$. Es decir, los espectros se habían «desplazado al rojo». Este fenómeno afectaba a todos los objetos medidos en aquellos años, salvo la nebulosa de Andrómeda.

Por aquel entonces, ni siquiera estaba establecida la naturaleza de dichos objetos nebulares como galaxias similares a la nuestra. Los «objetos nebulares» o «nebulosas» constituían una categoría que englobaba una gran variedad de objetos tanto galácticos, consistentes en nebulosas de emisión o reflexión, planetarias, bipolares, regiones HII, etc.; como extragalácticos, consistentes en galaxias de todas las clases y tipos morfológicos. Los objetos nebulares que estudió Slipher pertenecían al tipo de «nebulosas espirales», es decir, lo que en la actualidad conocemos como galaxias espirales.

Posteriormente, Edwin Hubble y Milton Humason (personaje singular que pasó de ser el mulero que transportaba material y suministros a Mount Wilson a ser el portero del observatorio, luego el asistente de Hubble y finalmente su colaborador) extendieron la lista de Slipher a más galaxias pertenecientes a distintos cúmulos, y encontraron que no existía ninguna cuyo espectro estuviera desplazado al azul.

Además, Hubble buscó estrellas variables cefeidas[16] en las galaxias con z medidos, con lo que podía determinar su distancia D, y halló así que el desplazamiento al rojo z, definido como

$$z = (\lambda_0 - \lambda) / \lambda \tag{1.7}$$

era proporcional a la distancia (figura 1.11), es decir,

$$z = \mathrm{k}\, D \equiv (H_0/c)\, D. \tag{1.8}$$

Esta relación se denomina **ley de Hubble** y la constante de proporcionalidad H_0 se llama **constante de Hubble** y tiene unidades del inverso del tiempo (en rigor, hercios, Hz) que se acostumbran a expresar en km/s/Mpc (kilómetros por segundo y por megapársec). Los primeros resultados fueron publicados en 1929, y ya en 1931 se habían ampliado a 32 galaxias.

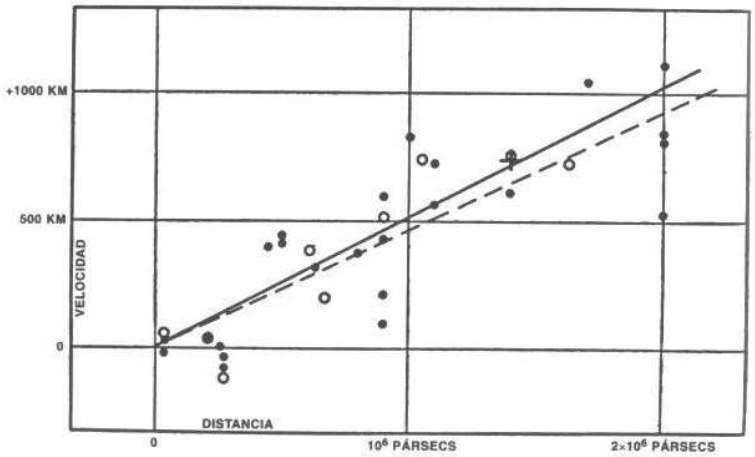


Figura 1.11 Gráfica procedente de una de las primeras publicaciones de Hubble (1936b) y que muestra la relación lineal entre la distancia y la llamada velocidad de recesión de las galaxias.

[16] Ya mencionadas someramente en el apartado 1.4, las cefeidas son estrellas variables que se caracterizan por tener una relación fija entre el periodo de variación, que se puede determinar con relativa facilidad mediante la curva de luz, y la luminosidad. Por consiguiente, a partir de la curva de luz se infiere la luminosidad, y con ésta y la magnitud aparente medida puede determinarse la distancia a la estrella, que será la misma que la de la galaxia huésped.

Nótese que Hubble medía z a partir de las líneas de los espectros y D a partir de los periodos de las cefeidas mediante su relación periodo-luminosidad. Por consiguiente, **la ley de Hubble, que se basa en las observaciones y no se dedujo de ningún modelo, en puridad relaciona desplazamientos al rojo con distancias, no «velocidades» con distancias.** Como se verá más adelante, asociar una velocidad, la llamada «velocidad de recesión», al desplazamiento al rojo, puede considerarse válido siempre que no se interprete como un efecto Doppler debido a una cinemática, lo cual es una interpretación carente de fundamento aunque desafortunadamente bastante extendida y posiblemente generada por gráficos como el de la figura 1.11.

Actualmente hay medidos del orden de 10^6 desplazamientos, de los cuales sólo unos 10 son negativos, es decir, son desplazamientos al azul, que corresponden en su totalidad a objetos del Grupo Local[17].

1.5.3 Propiedades del desplazamiento al rojo

Cualquier explicación de la causa del desplazamiento al rojo deberá dar cuenta de las características observadas siguientes:

a) El desplazamiento es siempre hacia longitudes de onda más largas, salvo en el caso de objetos del Grupo Local.
b) El desplazamiento no depende de la frecuencia: de las observaciones de un mismo objeto en microondas, UV, etc. se infiere siempre el mismo desplazamiento al rojo.
c) El desplazamiento es lineal con la distancia al objeto para los objetos más próximos (en los cuales las distancias han sido medidas por métodos independientes).
d) Los desplazamientos son isótropos, no dependen de la dirección en la que se encuentra el objeto sino sólo de la distancia, con las salvedades que se mencionan en (1.5.8), y que corresponden al universo local.
e) Finalmente, aunque no sea observable, por un principio anti-antropocéntrico es deseable que las anteriores características se verifiquen desde cualquier punto del universo. En caso contrario, habría que justificar a qué podría deberse nuestra situación privilegiada.

[17] Se denomina Grupo Local al formado por unas 30 galaxias situadas a menos de 1 Mpc de la Galaxia. Consta de 3 espirales (la Galaxia, Andrómeda y M33), 13 irregulares (las más brillantes son las Nubes Mayor y Menor de Magallanes), y elípticas enanas pequeñas y débiles. El Grupo Local se halla en proceso de colapso y Andrómeda y la Galaxia se aproximan a una velocidad de 119 km/s. Se prevé que colisionen en unos 6.3 Ga.

1.5.4 Interpretaciones

Si aceptamos el principio de equivalencia, es decir, si admitimos que la causa del desplazamiento al rojo ha de ser un fenómeno físico que tiene cabida dentro de las mismas leyes que rigen el universo local o, lo que es lo mismo, que las leyes de la física son las mismas en todo el universo, podemos reducir la interpretación del desplazamiento al rojo, esencialmente, a cuatro posibilidades.

Modelos de «luz cansada». Consisten en fabricaciones *ad hoc* para buscar explicaciones alternativas al desplazamiento al rojo. En todas ellas la luz pierde energía en función de la distancia que recorre, lo cual cumple con la condición de que resulte un desplazamiento al rojo isótropo. Sin embargo, cada uno de los distintos modelos de luz cansada propuestos presenta uno o varios de los siguientes inconvenientes: i) hay que postular interacciones electromagnéticas desconocidas, o nuevas partículas, ii) el esparcimiento de los fotones emborronaría la imagen de fuentes lejanas, fenómeno que no se observa, iii) la pérdida de energía depende de la longitud de onda, iv) se requieren altas densidades de materia en el medio intergaláctico, que no se han observado, y v) la pérdida de energía en los modelos no resulta lineal con la distancia, sino exponencial. La misma interpretación, y los mismos inconvenientes, aparecen si se intenta explicar el desplazamiento al rojo atribuyendo al fotón una masa finita (que los experimentos de laboratorio indican que sería menor que 10^{-27} eV).

Efectos gravitatorios estáticos. Según la relatividad general, los fotones cambian de energía al desplazarse en un campo gravitatorio heterogéneo. Dicho cambio no depende de la longitud de onda, pero sí depende a primer orden de la diferencia de potencial gravitatorio entre el emisor y el receptor. Por este motivo, esta causa no ofrece una explicación verosímil del desplazamiento al rojo, puesto que: i) un desplazamiento al rojo general implicaría que todos los objetos emisores tuvieran un campo gravitatorio más intenso que el nuestro, ii) para conseguir isotropía se requeriría que los objetos situados a la misma distancia tuvieran el mismo campo, iii) para obtener proporcionalidad con la distancia sería preciso que el potencial del emisor dependiera de la distancia que lo separa de nosotros, por lo que finalmente también terminaríamos en un sistema de referencia privilegiado.

Movimiento de las fuentes respecto al observador. En este caso, el desplazamiento al rojo se interpretaría como debido al efecto Doppler causado por la cinemática de las fuentes. Podríamos distinguir tres tipos de causas que podrían explicar esas velocidades:

a) Movimientos causados por interacción gravitatoria entre las fuentes. Cabría esperar, sin embargo, que este tipo de movimientos fuesen aleatorios. En este caso debería observarse el mismo número de desplazamientos al rojo que al azul y sin ninguna distribución determinada. Tampoco puede explicarse así por qué los desplazamientos al rojo observados son proporcionales a la distancia[18]. Finalmente, los objetos más alejados se desplazarían a velocidades relativistas y, en esta interpretación, las heterogeneidades en la distribución de la materia solamente pueden generar velocidades (siempre aleatorias) del orden de 10^{-3}c (ejercicio 1.3).
b) Movimientos debidos a condiciones iniciales: no constituye una hipótesis satisfactoria desde el punto de vista científico considerar que las condiciones iniciales del universo fueron tales que las galaxias que lo forman tuvieran velocidades proporcionales a la distancia a nosotros.
c) Movimientos causados por una explosión: tampoco es una hipótesis satisfactoria, puesto que en una explosión, si las protogalaxias ya estuvieran formadas, recibirían un impulso de una fuerza F que actúa en un tiempo dt. Es decir, adquirirían un momento $dp=Fdt$. Si todas las galaxias recibieran el mismo impulso, las menos masivas adquirirían más velocidad. Si en cambio el impulso que recibieran dependiera del tamaño (y por ende de la masa, para una densidad constante), las galaxias de masas parecidas adquirirían velocidades parecidas. En ambos casos no podría obtenerse una proporcionalidad con la distancia. Si en vez de protogalaxias se considerase un fluido más o menos homogéneo, lo que podría constituir una hipótesis más realista, los fenómenos de turbulencia que se generarían, que son altamente no lineales, provocarían fácilmente anisotropías en la constante de Hubble. En resumen, en cualquier caso difícilmente se conseguiría una proporcionalidad de la velocidad con la distancia para todos los objetos. Finalmente, en esta interpretación existiría un sistema de referencia absoluto: el punto «cero» de la explosión, lo que es conceptualmente insatisfactorio puesto que privilegiaría un sistema de referencia con respecto a otros.

Evolución de la métrica. Es, prácticamente, la única opción disponible. Consistiría en una variación de la propia medida de la distancia[19] en función del tiempo. Consideremos, a modo de hipótesis, que las distancias se ven afectadas por un «factor de escala» que varía con el tiempo. En este caso, las distancias radiales D que nos separan de los objetos del universo y que llamaremos distancias **propias** vendrán dadas por

$$D = a\, r \tag{1.9}$$

[18] Si se interpretase que las velocidades de recesión son debidas a la atracción gravitatoria de una gran masa situada a gran distancia, existiría anisotropía. Si la masa se distribuyera con simetría esférica perfecta, existiría un sistema de referencia privilegiado, centrado con respecto a dicha distribución, y además el campo en el interior sería nulo.

[19] También llamada métrica, y que según la teoría general de la relatividad viene determinada por la distribución de masas. De ahí que se también se denomine como «efectos gravitatorios dependientes del tiempo».

donde $a=a(t)$ es el **factor de escala,** una función del tiempo, y r es una coordenada radial que llamaremos **comóvil**. En este caso, la **velocidad de recesión,** que dependerá del tiempo, para un objeto de coordenada comóvil fija, será

$$\dot{D} = \dot{a}\, r. \tag{1.10}$$

Luego, para cada instante de tiempo dado, las velocidades de recesión son proporcionales a las coordenadas comóviles. Dado que las coordenadas comóviles son proporcionales a las coordenadas propias a través del inverso del factor de escala (1.9), entonces,

$$\dot{D} = \frac{\dot{a}}{a} D \equiv HD, \tag{1.11}$$

expresión equivalente a (1.8) si $cz = \dot{D}$, donde H es una función del tiempo cuyo valor en el instante actual es el de la denominada constante de Hubble H_0. Por tanto, en esta hipótesis, las distancias propias de galaxias o cúmulos de galaxias variarán con el tiempo debido a variaciones del factor de escala, sin menoscabo de los movimientos peculiares, puramente cinemáticos, que puedan tener superpuestos a dicha variación de la métrica y que representan variaciones con el tiempo de la distancia comóvil r.

Como **la velocidad de recesión no representa una cinemática,** no está limitada a valores menores que la velocidad de la luz. De hecho, no se han impuesto sobre el factor de escala condiciones *a priori* que pudieran acotar la función H. La velocidad de la luz sí limita, en cambio, los movimientos peculiares asociados a variaciones con el tiempo de la coordenada comóvil r, con implicaciones que se analizan en 1.5.8.

Por consiguiente, **el incremento de este factor de escala con el tiempo causaría el desplazamiento al rojo, pero no por efecto Doppler, sino porque el factor de escala afecta a las longitudes de onda de la misma manera que a las distancias propias.** En efecto, la luz de longitud de onda λ_0 que nos llega de un objeto en el instante actual t_0 en que el factor de escala es a_0, habrá sido emitida con una longitud de onda λ en un instante de tiempo t en que el factor de escala era a. La relación entre ambas longitudes de onda será igual a la relación entre distancias propias en los instantes t_0 y t, que vendrá dada (1.9) por la relación entre los factores de escala correspondientes a dichos instantes:

$$\frac{a_0}{a} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 + z. \tag{1.12}$$

Según esta expresión, la luz que llega de un objeto que presente $z = 1$ fue emitida en un instante en que el universo tenía un factor de escala mitad que el actual, lo que en general no implica que su edad sea la mitad que la actual salvo en el caso particular de que el factor de escala fuera lineal con respecto al tiempo.

Nótese que en esta interpretación la ley de Hubble (1.8) solamente tiene validez en la medida en que la expresión $cz = \dot{D}$ sea válida, mientras que la ecuación (1.11) sería válida siempre que lo fuera la (1.9). En un caso general, la distancia es una función del desplazamiento al rojo que, como se verá más adelante, es distinta para distintos modelos cosmológicos. Su derivada, $\dot{D}$, será por la regla de la cadena una función de z y de la derivada de z, donde esta última puede ponerse en función de z y de $H(z)$ mediante la derivación de (1.12). En suma, la dependencia de $\dot{D}$ con z no será en general lineal con el desplazamiento al rojo. Para cualquier modelo se verifica, sin embargo, que para distancias pequeñas la velocidad de recesión es proporcional al desplazamiento al rojo, lo que permite recuperar la ley de Hubble como una aproximación local.

El desplazamiento al rojo no es una predicción de ningún modelo, sino un hecho observable que está firmemente establecido y ampliamente corroborado y cuya interpretación más verosímil lo considera el resultado de la expansión del universo. La ley de Hubble es una aproximación, mientras que la proporcionalidad de la velocidad de recesión con la distancia es siempre válida.

1.5.5 Independencia con respecto al observador en la evolución de la métrica

Como ya hemos mostrado, la interpretación más verosímil del desplazamiento al rojo no consiste en que las galaxias se muevan unas con respecto a otras, sino en que el universo se expanda. Dicho de otro modo, las galaxias ocupan posiciones fijas, llamadas comóviles, en el universo, pero la expansión del espacio cambia la distancia propia entre ellas en función de tiempo. Esa expansión de la «regla de medida» o métrica del universo explica, sin más, la proporcionalidad de la velocidad de recesión con la distancia desde cualquier punto del universo. Consideremos por ejemplo (figura 1.12), que varias galaxias O, A, B, C, D, están separadas entre sí una misma distancia l en un cierto tiempo t. En un tiempo $t+dt$ todo el universo se ha expandido uniformemente y la distancia entre galaxias contiguas es ahora $l+dl$. En ese caso, puede comprobarse fácilmente que la velocidad de recesión resultante con respecto a una cualquiera de ellas es proporcional a la distancia (figura 1.12).

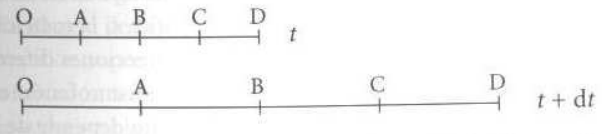


Figura 1.12 Debido a la expansión del universo, los objetos A, B, C y D separados entre sí una distancia propia l estarán separados una distancia $l+dl$ un tiempo dt más tarde. Visto por un observador O, la velocidad de recesión con que se alejan los objetos es proporcional a la distancia al observador. Este fenómeno es independiente de la posición del observador. Es decir, sería visto de la misma manera por observadores situados en cualquiera de los objetos.

Efectivamente, en un tiempo t las galaxias están separadas entre sí una distancia propia l. Es decir, las galaxias A, B, C y D están separadas del observador O por una distancia propia l, $2l$, $3l$ y $4l$, respectivamente. Al cabo de un tiempo dt la distancia propia entre galaxias contiguas habrá aumentado en dl. Por tanto, las respectivas distancias a O serán $l+dl$, $2(l+dl)$, $3(l+dl)$ y $4(l+dl)$. Por consiguiente, su velocidad de recesión, siempre radial, debida a la expansión del universo será v, $2v$, $3v$ y $4v$, siendo $v = dl/dt$. En este caso, la constante de Hubble es $(dl/dt)/l$. Por tanto, la velocidad de recesión es proporcional a la distancia a O. La misma relación se verificaría con el observador situado en cualquier otra galaxia, como se deduce de la figura 1.12. Sin embargo, la posición de las galaxias no ha variado, lo que ha cambiado es el tamaño de las divisiones de la regla de medida. Esta independencia del observador y de la dirección de observación se verificará siempre que el factor de escala no dependa de la posición ni de la dirección, sino solamente del tiempo.

1.5.6 El desplazamiento al rojo como una evolución de la métrica

La interpretación del desplazamiento al rojo como una evolución de la métrica permite dar cuenta de todas las propiedades del desplazamiento al rojo descritas al principio de esta sección:

a) El desplazamiento es siempre hacia longitudes de onda más largas, salvo en el caso de objetos del Grupo Local: en este último caso los movimientos peculiares dominan sobre la expansión de la métrica. A distancias suficientemente grandes, los movimientos peculiares son despreciables frente a la expansión.
b) El desplazamiento al rojo de un objeto no depende de la longitud de onda en que se observe. Efectivamente, sólo depende de la distancia.
c) El desplazamiento es lineal con la distancia al objeto: la misma métrica garantiza esta propiedad en los objetos con desplazamientos al rojo no muy grandes. Cuando la distancia es muy grande, vemos el universo en un instante de tiempo anterior en el que la función H tenía un valor distinto de H_0 y ya no se verifica la linealidad.
d) Los desplazamientos son isótropos, no dependen de la dirección en la que se encuentra el objeto sino sólo de la distancia: se verifica si la métrica es isótropa, es decir, el factor de escala no es distinto en direcciones diferentes.
e) Desde cualquier punto del universo se observará el mismo fenómeno si la métrica es homogénea, es decir, si el factor de escala no depende de la posición sino solamente del tiempo.
f) No existe un sistema de referencia privilegiado, dado que es el universo como un todo el que se expande. Dicho de otro modo, no existe un centro con respecto al cual el universo se expanda, como ocurriría en el caso de una explosión.

En resumen:

1. La existencia del desplazamiento al rojo y sus características indican que existe una evolución de la métrica, que da lugar a la denominada **expansión del universo.**
2. Esta expansión se traduce en una **variación de las distancias propias en función del tiempo** que se denomina «velocidad de recesión» para distinguirla de una velocidad propiamente cinemática resultado de una variación de las distancias comóviles en función del tiempo.
3. Esa expansión sugiere un origen definido en el tiempo para el universo (extrapolando a instantes de tiempo anteriores al actual), llamado con poco acierto **Gran Explosión**[20].

La denominación Gran Explosion es, efectivamente, poco acertada, porque la palabra *explosión* induce a pensar que existirá un centro de la misma y un observador externo que pueda observar dicha explosión mientras sucede. Sin embargo, ni existe un centro, como ya se ha comentado más arriba, ni puede existir un observador externo, puesto que si dicho observador fuera capaz de «ver» la explosión, significaría que está en contacto causal con el universo y por tanto se hallaría también sumido en la expansión, sin poder discernir el centro de la misma. Como ya se ha establecido en la introducción a este capítulo, el universo no tiene «fuera», solamente tiene «dentro». La denominación Gran Explosión se conserva, una vez más, por tradición, y por ser más popular que «instante inicial».

Dicho de otro modo, hablar de «Gran Explosión» induce a interpretar el desplazamiento al rojo como un efecto cinemático, mientras que referirse a la «expansión del universo» invita a interpretarlo como una evolución de la métrica en el marco de la relatividad general.

Las diferencias entre la interpretación del desplazamiento al rojo como un efecto Doppler o como una evolución de la métrica, ni son sutiles ni carecen de consecuencias. Por ejemplo, la interpretación del desplazamiento al rojo como un efecto Doppler causado por movimientos cinemáticos (que ya ha sido anteriormente descartada basándose en otras argumentaciones) limitaría la velocidad de recesión a la velocidad de la luz. En el caso de la expansión de la métrica, los objetos pueden tener velocidades de recesión superiores a las de la luz, puesto que la expansión no se corresponde con una variación temporal de las coordenadas comóviles. Cuando la velocidad de recesión es superior a la de la luz, la luz de estos objetos no nos llegará, a no ser que la expansión se desacelere o se revierta en una etapa posterior de la evolución del universo.

[20] En inglés *Big Bang*. Expresión despectiva acuñada por la Némesis del universo en expansión y partidario de la teoría del estado estacionario (véase capítulo tercero), sir Fred Hoyle, en un programa radiofónico de la BBC de los años cincuenta.

1.5.7 La estaticidad de la métrica a escala local

Sin embargo, si todas las distancias en el universo variaran por igual, no seríamos capaces de detectar la expansión, dado que los patrones de longitud se expandirían en la misma proporción y no mediríamos cambios en la distancia. Podría argumentarse que, dado que la velocidad de la luz es constante, podríamos medir las distancias utilizando el tiempo que tarda un rayo de luz en recorrerlas. Sin embargo, las unidades de tiempo estarían afectadas en la misma medida por la expansión. Es decir: las longitudes serían mayores pero mediríamos el mismo intervalo de tiempo en el recorrido del rayo de luz puesto que nuestras unidades de tiempo habrían aumentado en la misma proporción. Para comprobar esta afirmación basta con revisar las definiciones de segundo de tiempo. Si se utiliza una fracción del periodo orbital de la Tierra en torno al Sol, acorde con la definición de año trópico, el periodo de la órbita aumentaría, puesto que aumentaría la distancia Tierra-Sol. En este caso, los «segundos» aumentarían de duración paulatinamente. Si se utiliza la moderna definición de segundo basada en un número dado de periodos de la radiación correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de ^{133}Cs, la duración del segundo también aumentaría, puesto que al crecer la longitud de onda debido a la expansión de los orbitales atómicos, aumentaría el periodo en la misma proporción. Finalmente, por el mismo motivo tampoco podríamos detectar el desplazamiento al rojo de las fuentes, puesto que en el tiempo transcurrido entre la emisión de un fotón con una longitud de onda λ correspondiente a una cierta transición atómica, y su recepción con una longitud de onda λ_0 un tiempo después, las órbitas atómicas de los átomos del receptor se habrían expandido y la longitud de onda en reposo de esa misma transición atómica ya no sería λ sino λ_0 (ejercicio 1.5). Por consiguiente, no es correcto afirmar que la expansión de las distancias entre planetas del Sistema Solar, entre moléculas, etc. ocurre de forma tan paulatina y sea tan sutil que no pueda ser detectada, sino que **es la invariabilidad de los patrones locales de longitudes y tiempos, incluyendo las longitudes de onda de las transiciones medidas en el laboratorio, lo que permite detectar la expansión del universo. En caso contrario seríamos incapaces de advertirla.**

Cabe preguntarse, por tanto, cuál es la razón de que la evolución de la métrica no afecte a las distancias medidas en la Tierra, entre planetas del Sistema Solar, estrellas de nuestra Galaxia o galaxias de un cúmulo, es decir: que la métrica sea localmente estática. La respuesta es que la acumulación de masa gravitatoria detiene la expansión. La expansión tampoco afecta a las distancias entre átomos de una molécula, la corteza electrónica y el núcleo o entre los constituyentes del núcleo, aunque éstos se hallen lejos de cualquier masa. Ello es debido a que a estas escalas espaciales dominan los efectos cuánticos. En suma, podríamos concluir que la expansión del universo actúa a grandes distancias, sobre objetos no vinculados netamente por otro tipo de interacciones, por ejemplo entre galaxias o cúmulos de galaxias separados por distancias suficientemente grandes[21]. Por este motivo, los fotones que se desplazan dentro del Sistema Solar o de la Galaxia no sufren desplazamiento al rojo de índole cosmológica. Mientras un fotón se halle dentro de una misma galaxia o cúmulo de galaxias, no sufrirá desplazamiento al rojo, solamente lo sufrirá cuando se desplace entre galaxias de campo o entre cúmulos de galaxias distantes.

Sin embargo, aunque la expansión del universo no afecte a las longitudes y tiempos a escala local, entendiendo por local la escala galáctica o intracumular, mientras que sí afecta a objetos situados a grandes distancias, sin vinculación gravitatoria neta, existe un estado intermedio entre ambas situaciones en que la cinemática causada por las interacciones gravitatorias se superpone a la expansión del universo, causando las llamadas anisotropías en el flujo de Hubble. En nuestro caso este intervalo intermedio de distancias se extiende desde las distancias características del Grupo Local, del orden de 1 Mpc, hasta las distancias que nos separan de los cúmulos masivos más próximos, que se hallan a unos 50 ó 100 Mpc.

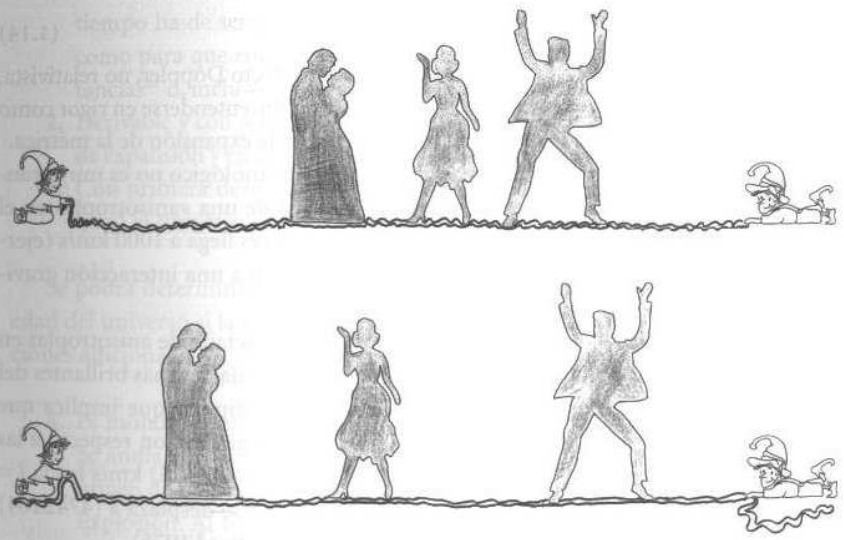


Figura 1.13 La expansión del universo no afecta a objetos vinculados por interacciones. En una pista de baile con un suelo de goma elástica que está sometido a tracción (equivalente al universo en expansión), las parejas que bailan agarradas (objetos vinculados por gravedad) no se separan mientras que las que bailan sueltas sí. Tomen debida nota los aficionados al baile que busquen pareja estable.

[21] Las distancias entre las galaxias de un cúmulo no vienen afectadas por la expansión del universo al dominar su mutua atracción gravitatoria y la cinemática interna del cúmulo. Se puede considerar que todas las galaxias de un mismo cúmulo se encuentran a la misma distancia de nosotros, puesto que las distancias entre cúmulos son mayores que sus tamaños. Este argumento es también aplicable al Grupo Local.

1.5.8 Anisotropías en el flujo de Hubble

La expansión de todo el universo es, por tanto, responsable del cambio en la longitud de onda de la radiación que contiene. Esta misma expansión es la que hace aumentar la separación entre galaxias y cúmulos de galaxias con una velocidad de recesión proporcional a la distancia. Este campo de velocidades radiales constituye el denominado **flujo de Hubble**. La velocidad radial observada será, por tanto, la composición de dicho flujo con los movimientos peculiares radiales causados por la variación de la coordenada radial comóvil r, como se deduce de derivar (1.9), teniendo en cuenta (1.11), suponiendo que ahora r puede variar con el tiempo,

$$v_{\text{observada}} = \dot{D} = \dot{a}r + a\dot{r} = HD + av_{\text{comóvil}} = v_{\text{recesión}} + v_{\text{peculiar}}, \tag{1.13}$$

expresión que puede transcribirse de forma aproximada en términos del desplazamiento al rojo, dividiendo (1.13) por la velocidad de la luz,

$$z_{\text{observado}} = z_{\text{cosmológico}} + z_{\text{peculiar}}, \tag{1.14}$$

donde la velocidad radial peculiar sí que constituye un efecto Doppler, no relativista, mientras que nótese que la «velocidad de recesión» no debe entenderse en rigor como una velocidad, y no es más que una manera de expresar la expansión de la métrica.

De (1.14) resulta que si el desplazamiento al rojo cosmológico no es muy grande, la componente peculiar puede detectarse en forma de una «anisotropía» en el flujo de Hubble. Esta componente peculiar, que raras veces llega a 1000 km/s (ejercicio 1.3), puede ser debida a una velocidad inicial o bien a una interacción gravitatoria con otras galaxias suficientemente próximas.

El efecto Rubin-Ford constituyó el primer indicio detectado de anisotropías en el flujo de Hubble. Medidas obtenidas a partir de las 184 galaxias más brillantes del cúmulo de Sculptor indican que existe una anisotropía dipolar que implica que nuestra Galaxia se está moviendo con respecto a este conjunto. Con respecto a las más alejadas de la muestra se mueve a una velocidad de (454±125) km/s hacia $l = 163°\pm15°$, $b = -11°\pm14°$ y con respecto las más próximas se desplaza a (474±164) km/s hacia $l = 167°\pm20°$, $b = 5°\pm20°$ (Rubin, Thonnard y Ford 1976).

En general, la velocidad de recesión de un objeto debe corregirse de las siguientes contribuciones peculiares:

1. La llamada **anomalía local**, una corrección de 360 km/s en las velocidades medidas desde el Grupo Local hasta distancias equivalentes a unos 700 km/s (10 Mpc, aproximadamente). Se supone debida a la contribución de sobredensidades de galaxias en Puppis, Fornax y Eridanus así como a una subdensidad local (Lahav *et al.*, 1993).
2. La caída del Grupo Local hacia el cúmulo de Virgo (situado a unos 20 Mpc).
3. La influencia del hipotético Gran Atractor, un exceso de densidad en la distribución de galaxias con un total de unas $5\times10^{16}\,M_\odot$, dominado por las galaxias del cúmulo de Norma, que se halla a unos 5000 km/s del Grupo Local (unos 80 Mpc), según Would, Kraan-Korteweg y Fairall (1999).

Estas correcciones perderán importancia en el caso de objetos situados a desplazamientos al rojo suficientemente altos.

1.5.9 La expansión y la edad del universo

Aunque por el momento no conozcamos la dependencia funcional del factor de escala con respecto al tiempo para distintos modelos cosmológicos, es posible inferir algunas de sus propiedades. En efecto, ha de cumplir las condiciones siguientes:

1. De variación lenta. Es decir: el valor de la primera derivada con respecto al tiempo ha de ser pequeño. En caso contrario, $H(t)$ podría variar tan rápido como para que encontrásemos desviaciones de la ley de Hubble a cortas distancias[22] o, incluso, variaciones del valor de H_0 a escalas de tiempo humanas.
2. Derivable y con segunda derivada. En efecto, el universo tendrá una velocidad de expansión y en general una aceleración (positiva o negativa) en la expansión.
3. Con primera derivada positiva en el instante actual puesto que en la actualidad el universo se expande, no se contrae.

Se podrá determinar una relación cualitativa entre la constante de Hubble y la edad del universo si la evolución temporal del factor de escala cumple estas condiciones adicionales:

4. Es monótona creciente hasta el instante actual.
5. Se anula para un cierto instante de tiempo que se hará corresponder con el origen de tiempos cosmológico $t = 0$, correspondiente al instante de la Gran Explosión. Al tiempo medido desde dicho origen se le llamará **tiempo cosmológico** y será el utilizado a lo largo del texto.

La relación entre la constante H_0 y la edad del universo se infiere desarrollando en serie el factor de escala en un entorno de la edad actual del universo t_0, y truncando el desarrollo en el primer término. Así se obtiene $a \approx a_0 + \dot{a}_0\,(t - t_0)$. Considerando (ítem 5) que el universo tiene un origen de tiempo cosmológico $t = 0$ para el cual $a = 0$,

[22] A distancias grandes sí se ha detectado una variación significativa (1.5.11).

puede extrapolarse la expresión hasta dicho tiempo y obtener una estimación de la edad del universo por la aproximación por la tangente a la evolución del factor de escala,

$$t_0 \approx H_0^{-1} \qquad (1.15)$$

dada la definición de H (1.11) y que $H_0 = H(t_0)$ es la constante de Hubble. Es decir: el inverso de la constante de Hubble proporciona una estimación de la edad del universo que será tanto más aproximada cuanto más lineal sea la expansión.

Lógicamente, la ecuación (1.15) sólo será exacta si la expansión es constante, es decir, la primera derivada del factor de escala es constante. En general, (1.15) **proporcionará una cota superior o inferior a la edad del universo,** dependiendo del signo de la segunda derivada del factor de escala, es decir: de **si el universo está en un estado de expansión desacelerada o acelerada,** como puede verse en la figura 1.14. En un caso mixto en que el universo fuera primero desacelerado y luego acelerado, o viceversa, será una cota inferior o superior dependiendo de la época de observación.

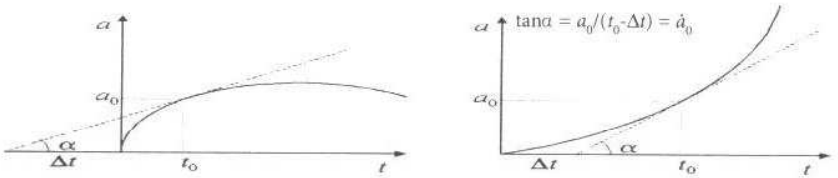


Figura 1.14 Evolución del factor de escala en un universo en expansión desacelerada (izquierda) y en un universo en expansión acelerada (derecha). Dado que $\tan\alpha = a_0/(t_0-\Delta t) = \dot{a}_0$, entonces $t_0 - \Delta t = H_0^{-1}$, donde $\Delta t < 0$ cuando la expansión es desacelerada y $\Delta t > 0$ cuando es acelerada. Por tanto, el inverso de la constante de Hubble supone una cota superior a la edad del universo en el primer caso y una cota inferior en el segundo.

Cabe señalar que, *a priori*, no puede descartarse un modelo de universo en expansión acelerada. Se discutirá más adelante sobre esta posibilidad en (1.5.11).

Para concluir, es relevante señalar que, debido a errores de calibración, a principios de los años cincuenta el valor que se medía para la constante de Hubble era del orden de 250 km/s/Mpc, muchísimo más alto que el valor que se admite en la actualidad. Un universo en expansión desacelerada con esa constante de Hubble tendría una edad inferior a 4 Ga, mientras que en aquel entonces ya se sabía, mediante dataciones radiactivas, que la edad de las rocas más antiguas de la corteza terrestre era de 4.5 Ga. Esa incompatibilidad causó no pocos problemas a los primeros partidarios de la teoría de la Gran Explosión, y motivó que surgiera la teoría del estado estacionario[23].

[23] Teoría que parte de la hipótesis de que el universo es homogéneo e isótropo no sólo espacialmente, sino también en el tiempo. Un universo semejante es incompatible con una expansión, a no ser que se produzca creación de materia a fin de mantener su densidad constante en el tiempo. En el capítulo tercero se estudiará dicho modelo cosmológico.

1.5.10 Determinación de la constante de Hubble

Determinar el valor de la constante de Hubble es, por consiguiente, esencial en cosmología al establecer un indicador de la edad del universo, así como de las distancias a galaxias próximas. Tradicionalmente se ha determinado H_0 a partir de la escala de distancias (1.4.2). En la actualidad existen métodos alternativos que, con sus propias limitaciones, proporcionan una estimación de esta constante de forma casi independiente de la escala de distancias. En cualquier caso, como H es una función del tiempo (expresión 1.11 de 1.5.4) deben utilizarse objetos suficientemente próximos a fin de evitar que al observar objetos más lejanos H varíe. Sin embargo, los objetos más próximos también estarán más afectados por anisotropías del flujo de Hubble, lo que tradicionalmente ha complicado la determinación de H_0.

La escala de distancias

Este método es en apariencia el más directo. Una vez determinada la distancia a un objeto, la medida de su desplazamiento al rojo permite deducir la constante de Hubble. Sin embargo, dicho método, además de las incertidumbres ya recogidas en (1.4.2) y de las asociadas a las correcciones de las anisotropías del flujo de Hubble (1.5.8), adolece de las siguientes fuentes de error:

1. La rotación galáctica, es decir, el efecto cinemático de la rotación del Sol alrededor de nuestra Galaxia.
2. La cinemática local de nuestra Galaxia.
3. Corrección del espectro debido al desplazamiento al rojo, puesto que se precisa el espectro completo para determinar con propiedad distancias basadas en la luminosidad (4.1.3). Análogamente, en los métodos basados en los diámetros, éstos dependen de la longitud de onda a la que se observa y, por tanto, fijada la longitud de onda de observación, del desplazamiento al rojo.

Las dos primeras correcciones pueden obviarse si se utilizan objetos situados a distancias suficientemente grandes como para que los efectos locales sean despreciables, pero entonces la tercera corrección incrementa grandemente su importancia.

Además, la situación es todavía más compleja, porque los investigadores que trabajan en este campo no siguen la escala de distancias en el mismo orden, no utilizan todos los indicadores, ni emplean los mismos indicadores. Incluso investigadores que aplican el mismo método obtienen distintos resultados para la constante de Hubble según las calibraciones a las que recurran y las correcciones consideradas. Por estos motivos, surgió en los años setenta una de las más conocidas controversias cosmológicas entre Sandage y Tamman, partidarios de una constante de Hubble del orden de 50 km/s/Mpc es decir, de un universo «viejo» y De Vaucouleurs, que abogaba por un universo más joven, con una constante del orden de 100 km/s/Mpc. A dicha lucha se

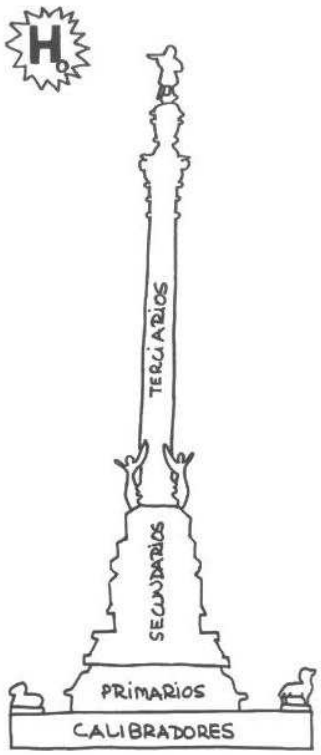


Figura 1.15 La escala de distancias conduce a la determinación de H_0. Esquema del monumento a Colón ubicado en el puerto de Barcelona, frente a las Ramblas.

incorporaron Tully y Fisher con su conocida relación, que parecía apoyar los resultados de De Vaucouleurs. Mientras De Vaucouleurs acusaba a Sandage de cometer inconsistencias lógicas y de incurrir en argumentos circulares, y Tully acusaba a Sandage de despreciar indebidamente la cartografía de las masas próximas al Grupo Local, Sandage acusaba a De Vaucouleurs de caer en el sesgo de Malmquist y a Tully y Fisher de despreciar la extinción. A finales de los setenta, Aaronson, Huchra y Mould empezaron a aplicar la relación Tully-Fisher utilizando medidas infrarrojas, novedosas en aquella época[24] y menos afectadas por la extinción. Utilizando esta técnica, a mediados de los ochenta Aaronson *et al.* hallaron una vez más un valor del orden de 100 km/s/Mpc para la constante de Hubble, estableciendo la necesidad de corregir los efectos del supercúmulo de Virgo para evitar reducir dicha constante a valores próximos a los obtenidos por Sandage, que despreciaba dicha influencia. La tabla 1.3 resume los distintos valores de la constante de Hubble obtenidos por distintos equipos hasta el año 1997. Este enfrentamiento llegó a cotas insospechadas y generó odios difícilmente comprensibles para personas situadas fuera de los círculos especializados, con tendencia a idealizar la imagen del científico hasta eliminar sus atributos humanos. Incluso algunos astrónomos utilizaban el valor promedio de 75 km/s/Mpc para no ganarse las antipatías de los distintos partidos en disputa, consiguiendo solamente ganarse la animadversión de todos ellos. La controversia continuó hasta mediados los noventa, cuando nuevos indicadores (lentes gravitatorias y nuevas calibraciones de SNIa) que evitaban en parte la escala de distancias, así como la contribución de los datos del telescopio espacial *Hubble*, contribuyeron a aquietar las aguas (tabla 1.4).

[24] El desarrollo tecnológico y el avance de la astrofísica se hallan intrínsecamente ligados: el desarrollo de la astrofísica depende de la existencia de medidas más y más precisas de objetos más y más débiles. Para eso es necesario disponer de nuevas tecnologías aplicadas a la instrumentación de telescopios más y más potentes.

Año	H_0 (km/s/Mpc)	Método	Referencia
1929	530	Cefeidas	Hubble
1936	526	Galaxias más brillantes en cúmulos	Hubble (1936a)
1954	263	Recalibración de cefeidas	Baade
1955	180	Magnitudes de galaxias	Sandage
1958	75	Cúmulos y estrellas más brillantes de galaxias	Sandage
1968	75±19	Galaxias E más brillantes en cúmulos	Sandage[25]
1975	56.9±3.4	Magnitudes de galaxias Sc	Sandage y Tammann
1977	80	Relación Tully-Fisher en el azul	Tully y Fisher
1979	100±10	Indicadores terciarios	De Vaucouleurs y Bollinger[26]
1979	61±4	Relación Tully-Fisher infrarroja	Aaronson, Huchra y Mould
1982	50±7	SNI	Sandage y Tammann
1982	95±10	Escala de distancias	De Vaucouleurs
1983	100±10	Escala de distancias	De Vaucouleurs
1984	55±9	Relación Tully-Fisher infrarroja	Sandage y Tammann
1986	90	Relación Tully-Fisher infrarroja	Aaronson *et al.*[27]
1988	56±12	Novas	Sandage y Tammann
1988	56±13	Tully-Fisher	Sandage
1988	42±11	Galaxias S luminosas	Sandage
1990	52±2	Varios métodos combinados	Sandage y Tammann
1992	45±9	SNI	Sandage *et al.*
1992	57±7	SNI	Branch y Tammann
1993	88.8±5.7	Promedio de varios autores	De Vaucouleurs
1996	50±4	Galaxias más brillantes	Sandage
1996	56±5	Luminosidades de galaxias	Sandage (2 artículos)

Tabla 1.3 Resumen de algunos valores de la constante de Hubble obtenidos por distintos equipos hasta 1996, con especial énfasis en los obtenidos por Sandage y De Vaucouleurs y colaboradores, a fin de reflejar una de las controversias cosmológicas del siglo pasado. Destacan los elevados valores iniciales, muy problemáticos con la edad del universo. Dichos valores se debían a diversos errores, entre los cuales el más conocido es el cometido por Hubble de confundir, en la galaxia de Andrómeda, las cefeidas de tipo II con cefeidas de tipo I, cuya relación periodo-luminosidad es distinta. A continuación se observa una progresiva disminución, hasta llegar a la controversia entre los distintos valores de la constante de Hubble. Aunque esta controversia se inició en años anteriores, los primeros artículos del grupo de De Vaucouleurs se publicaron en 1979 porque, al parecer, los editores pusieron trabas a la publicación de sus medidas debido al prestigio científico de Sandage. La fase culminante de la controversia se produjo en la década de los ochenta. Incluso corrían chistes diciendo que Sandage había publicado un artículo cuyo único texto consistía en la repetición continuada a lo largo de varias páginas de la frase «H_0 is 50».

[25] En dicho artículo Sandage ya sugiere que H_0 puede valer 50 km/s/Mpc.

[26] Parece que los editores de las revistas no quisieron publicar antes este artículo debido a la influencia de Sandage.

[27] Nótese la discrepancia entre este valor y el anterior, obtenido por Sandage y Tamman, a pesar de utilizar la misma técnica.

Supernovas tipo Ia

Como ya se ha tratado en 1.4.3, las supernovas tipo Ia constituyen indicadores muy valiosos que permiten soslayar de un modo eficaz las incertidumbres de la escala de distancias, así como corregir de extinción y efectos evolutivos, al menos en buena medida. Además, la gran luminosidad del máximo permite sondear hasta muy lejos. Una vez determinada la distancia, es posible medir el desplazamiento al rojo de la galaxia huésped y derivar el valor de la constante de Hubble. Branch (1998) proporciona un valor conservador de 60±10 km/s/Mpc utilizando medidas de distintos autores.

Lentes gravitatorias

Incluso antes de que se descubrieran las lentes gravitatorias ya existían las primeras técnicas para medir la constante cosmológica a partir de las mismas (Refsdal, 1964). El método se basa en la variabilidad no periódica que presentan los cuásares y su gran luminosidad, que permite observarlos a grandes distancias. Cuando la visual de un cuásar se encuentra muy cerca de una galaxia más próxima, se observan imágenes múltiples del mismo, debido al efecto de lente gravitatoria que produce la galaxia que se encuentra en la línea de visión (figura 1.16). Dado que la luz que forman las distintas imágenes del cuásar ha seguido distintos caminos, existirá un desfase temporal en la variación de la curva de luz de cada imagen. Dado un modelo de distribución de masas de la lente y un modelo cosmológico, es posible obtener la distancia al cuásar a partir del desfase y, por tanto, el valor de la constante de Hubble midiendo el desplazamiento al rojo del cuásar (figura 1.17).

Las ventajas del método saltan a la vista:

- La física, basada en la relatividad general, es clara y bien establecida.
- Evita la propagación de errores propia de la escala de distancias.
- Permite medir distancias a objetos muy lejanos, con lo que evita las alteraciones locales del flujo de Hubble.

Pero reparemos también en sus inconvenientes:

- Depende del modelo de lente que se aplique. Hasta principios de los noventa, los distintos modelos de distribución de masa proporcionaban medidas con una imprecisión en la medida de H_0 de hasta un factor dos o más. A partir de esa fecha los modelos teóricos han permitido eliminar en gran parte esta ambigüedad. Además, las medidas obtenidas a partir de distintos sistemas de lentes permiten una comprobación de la consistencia interna del método.
- El método de la curva de luz de lentes gravitatorias es largo y laborioso.
- Es difícil encontrar candidatos que cumplan las características requeridas de brillo de las imágenes y que éstas no se hallen demasiado cercanas entre sí o a

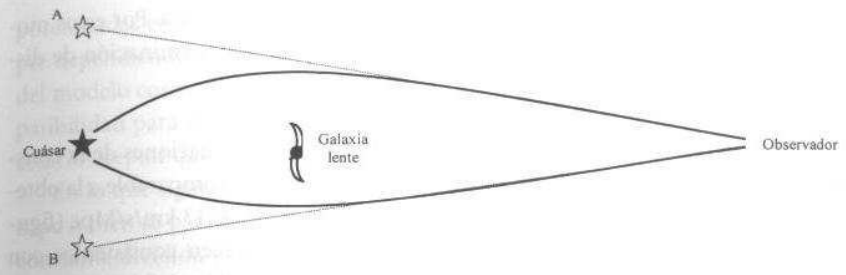


Figura 1.16 La luz proveniente de un cuásar es vista por un observador como si la emitieran dos cuásares A y B, debido al efecto de lente gravitatoria causado por el campo gravitatorio de una galaxia situada en la línea de visión entre el cuásar y el observador. Dado que los cuásares son variables y que el camino óptico de A y B es distinto, las curvas de luz de A y de B están desfasadas. El desfase depende del valor de H_0, asumiendo un modelo cosmológico y un modelo de la distribución de masa de la lente gravitatoria.

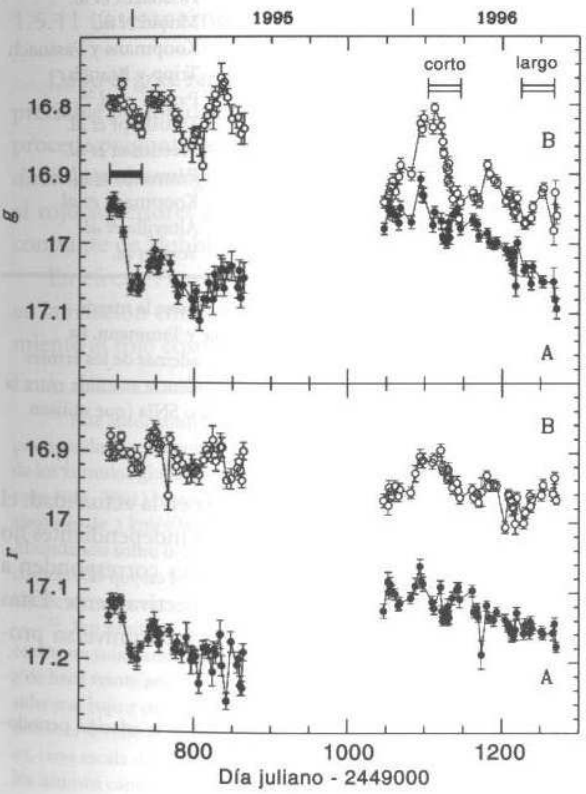


Figura 1.17 Curva de luz de las imágenes A (puntos negros) y B (puntos blancos) del cuásar 0957+561, en los filtros *g* y *r*. La barra horizontal de la izquierda marca una variación de luminosidad que se observa 417 días más tarde *(corto)* favoreciendo la predicción de rango más corto frente a la previsión de un retraso mayor *(largo)*, de 540 días. Ésta puede considerarse la primera predicción robusta del valor de H_0 utilizando el método de lentes gravitatorias. Tomado de Kundic *et al.*, 1997. Reproducido con permiso de la American Astronomical Society.

la lente, a fin de que la fotometría sea suficientemente precisa. Por estos motivos las lentes gravitatorias no son muy útiles para la determinación de distancias.

Kundic *et al.*, 1997 proporcionan una de las primeras estimaciones de la constante de Hubble utilizando dicho método, con una precisión comparable a la obtenida mediante la escala de distancias, y ofrecen un valor de 64±13 km/s/Mpc (figura 1.17). Estimaciones posteriores con otros sistemas parecen consistentes con dicho valor. Por ejemplo Fassnacht *et al.*, 1999 obtienen 59±8 km/s/Mpc.

Resumen

Año	H_0 (km/s/Mpc)	Método	Referencia
1997	64±13	Lentes gravitatorias	Kundic *et al.*
1997	51±13	Lentes gravitatorias	Keeton y Kochanek
1998	60±10	SNIa	Branch
1999	59±8	Lentes gravitatorias	Fassnacht *et al.*
1999	68±6	Cefeidas	Mould *et al.*
1999	63±7	Lentes gravitatorias	Koopmans y Fassnach
1999	62±5	SNIa	Tripp y Branch
2000	58.5±6.3	SNIa	Parodi *et al.*[28]
2000	63±32	Efecto Sunyaev-Zeldovich	Mauskopf *et al.*
2001	72±8	HST Key Project	Freedman *et al.*
2002	63±15	Lentes gravitatorias	Fassnacht *et al.*
2003	75±7	Lentes gravitatorias	Koopmans *et al.*
2004	68-74±10%	Cefeidas[29]	Altavilla *et al.*
2005	61±7, 70±5	Lentes gravitatorias[30]	York *et al.*

Tabla 1.4 Algunos valores de la constante de Hubble obtenidos desde 1997. Nótese la mayor concordancia entre ellos, incluso por parte de equipos que incluyen a Sandage y Tammann. La discrepancia de valores entre equipos que utilizan el mismo método depende, además de los errores de medida, del modelo de lente, en el caso de lentes gravitatorias y de la dependencia asumida entre la relación periodo-luminosidad y el color o la metalicidad en el caso de cefeidas o SNIa (que utilizan cefeidas como calibradores).

En conclusión, la controversia parece relativamente zanjada en la actualidad: el valor de la constante de Hubble obtenido por distintos métodos independientes no es ni 50 ni 100 sino del orden de 60-70 km/s/Mpc. Estos valores corresponden a una estimación de la edad del universo de unos 16-14 Ga, respectivamente. Estas cifras podrían ser compatibles con las estimaciones de la edad del universo proporcionadas en el apartado 1.3.3, teniendo en cuenta el intervalo de error, y siempre dependiendo de la variación del factor de escala con el tiempo, que es función del modelo cosmológico. Como se verá en el siguiente capítulo, existe una incompatibilidad para determinados modelos cosmológicos. En ese caso, podría ser necesario aceptar que la expansión ha de ser acelerada.

En lo que sigue se admitirá un valor de la constante de Hubble[31] de 65 km/s / Mpc o bien se parametrizarán algunos resultados en función del valor h de dicha constante dividido por cien: $h=H_0/100$ km/s/Mpc.

Finalmente cabe destacar que, en puridad, las lentes gravitatorias y las SNIa no son propiamente indicadores de distancias, puesto que no permiten medir distancias a cualquier galaxia, sino únicamente a aquellas sometidas al efecto lente o para las que se ha registrado el estallido de una supernova. Pero sí puede afirmarse que las lentes constituyen un método para la determinación de H_0 y que las supernovas, como ya se ha indicado, constituyen una sonda para determinar parámetros cosmológicos, como se analizará a continuación.

1.5.11 Las supernovas tipo Ia a distancias cosmológicas

Dado el gran rango de distancias que permiten alcanzar las SNIa y la nada despreciable posibilidad de corregir dicho indicador de extinción y efectos evolutivos, procede preguntarse qué sucede con las supernovas que se observan a las llamadas *distancias cosmológicas,* que podríamos situar arbitrariamente[32] a desplazamientos al rojo superiores a 0.5. Es decir: ir más allá de la determinación del valor de la constante de Hubble y preguntarse cómo varía ésta con el tiempo.

En efecto, H es una función del tiempo que, como se trató en 1.5.4, interviene en la relación entre desplazamiento al rojo y distancia. Un objeto con un desplazamiento al rojo cosmológico z suficientemente elevado se observa con una edad an-

[28] Incluye a Sandage y a Tammann.

[29] El valor exacto entre 68 y 74 depende de la influencia de la metalicidad en la relación periodo-luminosidad, pero no corrigen dicha relación de la influencia del color.

[30] El resultado depende del proceso de análisis de las imágenes ópticas.

[31] Este autor considera que el tan aceptado valor de la constante de Hubble $H_0 = 72$ km/s/Mpc, proporcionado por el equipo de W. Freedman, es demasiado alto como para ser compatible con las edades de los cúmulos globulares galácticos, como se discute en el capítulo quinto. Los mismos autores (Freedman *et al.*, 2001) reconocen que puede tener un error sistemático de hasta 7 km/s/Mpc, además de uno aleatorio de 3 km/s/Mpc. Parece que el error sistemático cometido es en el sentido de sobrevalorar H_0. Abundando sobre la aceptación de dicho valor para H_0, parece que Koopmans *et al.* (2003) por fin han conseguido que las lentes gravitatorias proporcionen un valor parecido al de Freedman *et al.* (2003) en vez de un valor sistemáticamente menor.

[32] Tan arbitrariamente como los términos alto, medio y bajo desplazamiento al rojo. Dichos conceptos no solamente dependen del autor, sino que son función del tiempo: el bajo z de hoy no es el bajo z de hace veinte años. A riesgo de caer en la obsolescencia, y de manera también arbitraria, podría considerarse bajo z como menor que unas décimas, y alto z como un valor mayor que la unidad. Esas definiciones se refieren a los sistemas estelares extragalácticos, no a la evolución termodinámica del universo, cuya escala de desplazamientos al rojo es superior en varios órdenes de magnitud, como se verá en los últimos capítulos.

terior a la actual, correspondiente a una época en la que tanto el factor de escala como su derivada, y por tanto H, tenían otro valor. Por consiguiente, el cociente entre el desplazamiento al rojo medido a partir del espectro de dicho objeto y la distancia a la que se encuentra es distinto del valor de la constante de Hubble H_0. Solamente es igual a ella para desplazamientos al rojo pequeños. Esta dependencia de H con el tiempo permite determinar el modelo cosmológico que más se ajusta a nuestro universo (figura 1.18).

Sin embargo, a finales de los años noventa se encontraron indicios de que las SNIa a distancias cosmológicas eran más débiles de lo esperado, es decir, se hallaban más lejos de lo que correspondería a su desplazamiento al rojo para un universo desacelerado (Riess *et al.* 1998, Perlmutter *et al.*, 1999), aunque las barras de error todavía eran compatibles con una expansión desacelerada. De hecho, se «decidió» que **el universo se hallaba en expansión acelerada** mediante una democrática votación en un congreso científico celebrado en mayo de 1998. Posteriores observaciones de SNIa a mayores desplazamientos al rojo (z~1.7 en Riess *et al.*, 2001) han corroborado este hecho, sin necesidad de recurrir a otro referéndum, y han permitido descartar una expansión desacelerada de manera más científica, siempre que los modelos evolutivos utilizados para las supernovas sean correctos (figura 1.18).

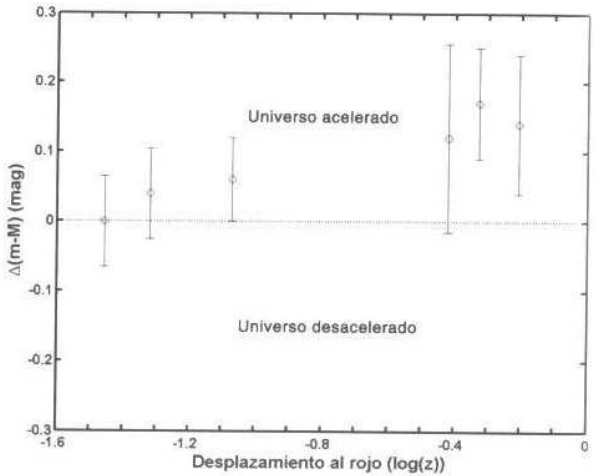


Figura 1.18 Representación del módulo de distancia frente al desplazamiento al rojo para distintas SNIa. La zona situada bajo la línea de puntos representa los modelos de universo desacelerado. Los círculos, que representan las medidas de supernovas Ia, favorecen un universo acelerado. Adaptado de Riess *et al.*, 2001.

1.5.12 La distribución de materia luminosa

La constante de Hubble constituye una herramienta muy valiosa, no solamente para acotar la edad del universo, sino para estimar distancias a objetos próximos de manera relativamente sencilla: basta con un espectro que muestre líneas de emisión o absorción que puedan ser identificadas y que permitan obtener el desplazamiento al rojo de esa galaxia. De esta manera, se puede analizar la distribución de galaxias alrededor de la nuestra, una vez tenidas en cuenta las correcciones al flujo de Hubble para los objetos más próximos. La determinación de las distancias a un número de galaxias suficientemente elevado como para representar una muestra significativa, y hasta una distancia suficientemente elevada como para descartar heterogeneidades locales, proporcionará una buena cartografía de la distribución de galaxias e, incluso, de la distribución espacial de masas.

Un buen cartografiado es difícil de ejecutar, dado que las galaxias de menor brillo superficial y las más pequeñas serán las más difíciles de detectar, y tanto más cuanto más lejos se encuentren. Dado que este tipo de galaxias puede representar una población importante en número y en masa, este efecto introduce un sesgo, el sesgo de Malmquist (figura 1.19), que limita la cartografía a distancias relativamente cercanas, a fin de que ésta sea representativa. Por otro lado, la cobertura de una región suficientemente amplia del cielo requiere una gran cantidad de tiempo de observación. Aspecto éste que es especialmente cierto porque no solamente es preciso obtener imágenes en distintas bandas fotométricas para identificar la naturaleza del objeto y determinar sus coordenadas, sino que es necesario, además, obtener espectros para determinar su desplazamiento al rojo. Por este motivo, los cartografiados que cubren una gran área del cielo acostumbran a ser menos profundos que los que cubren un área más reducida.

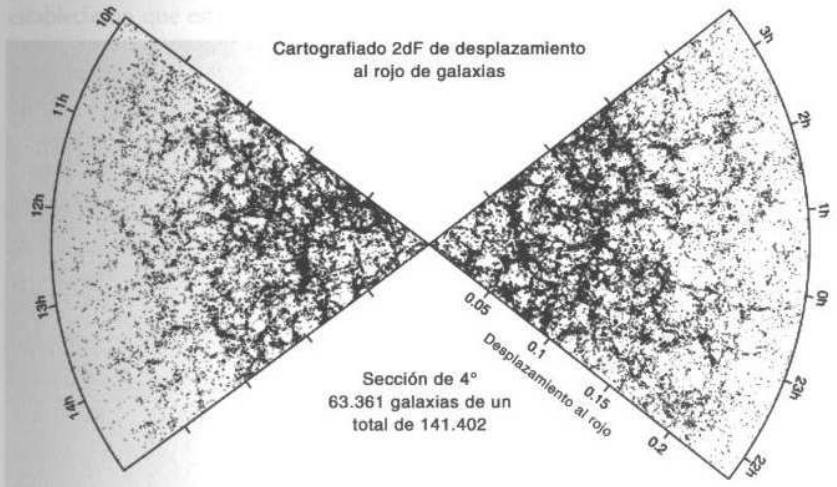


Figura 1.19 Cartografiado realizado con el instrumento 2dF (2 degree Field) en el Observatorio Anglo-Australiano. Se muestran las posiciones de 63.361 galaxias. La disminución del número de galaxias con la distancia no es real sino un efecto de selección: a medida que aumenta la lejanía solamente se detectan galaxias más y más brillantes, por lo que el número observado disminuye. Se observan vacíos, nudos y filamentos, pero la distribución puede considerarse homogénea a escalas del orden de 150 Mpc. Tomado de Colless *et al.* (2001).
Reproducido con permiso de Blackwell Publishing.

Los distintos cartografiados ya realizados o en proceso de ejecución muestran una imagen del entorno de nuestra Galaxia (figura 1.19) que presenta las siguientes características:

- «Muros» o «filamentos» con alineaciones de galaxias y una alta densidad de objetos.
- Grandes «vacíos» con densidades muy bajas de objetos, delimitados por las paredes y filamentos y con un tamaño del orden de 30 Mpc, aunque algunos de ellos pueden llegar a más de 100 Mpc. El más destacado es el vacío de Bootes, de unos 75 Mpc.
- Cúmulos de galaxias con un tamaño característico del orden de 10 Mpc.
- Supercúmulos de galaxias con un tamaño del orden de 150 Mpc.

Esta heterogeneidad a pequeña escala desaparece si se consideran elementos de volumen de un tamaño característico del orden de 150 Mpc (figura 1.19). **A estas escalas el universo puede considerarse homogéneo**, al menos hasta allí donde cabe dar por razonablemente completos los cartografiados.

Respecto a la estructura angular, los cartografiados de gran campo, y por tanto menos profundos (figura 1.20), muestran estructuras de tamaños no superiores a unos pocos grados en el cielo, que indican **isotropía en el universo local** a estas escalas angulares.

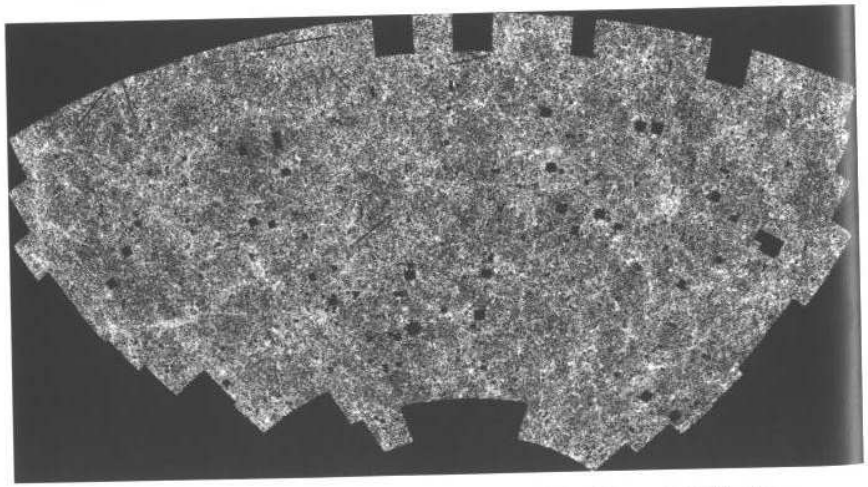


Figura 1.20 Cartografiado APM de galaxias en el universo local (Maddox *et al.*, 1990). Cubre aproximadamente un área de 100°×50° alrededor del polo sur galáctico. Contiene unos 2 millones de galaxias. La intensidad de cada elemento de imagen ha sido escalada según el número de galaxias en el mismo (a más galaxias, más blanco). Los huecos oscuros representan zonas excluidas porque contienen estrellas brillantes. El universo local muestra estructura angular, pero la distribución de galaxias puede considerarse isótropa a escalas de unos pocos grados.

1.6 La materia oscura del universo

Ya sabemos cuál es la edad aproximada del universo, o al menos una cota superior a la misma. También se conoce la distribución de las galaxias próximas, que puede considerarse homogénea a una escala suficientemente grande, y que su desplazamiento al rojo es aproximadamente proporcional a la distancia. Incluso estamos en condiciones de calcular la densidad de luminosidad que representan las galaxias a través de la función de Schechter. Sin embargo, procede preguntar cuál es la densidad de masa del universo. La respuesta a esa pregunta, objeto del presente apartado, requiere conocer la masa de las galaxias y si toda la masa está representada por ellas o hay otros objetos que desconocemos. Intuitivamente puede suponerse que la evolución de nuestro universo está ligada a su densidad, de ahí la importancia de la respuesta.

1.6.1 Historia e indicios

Desde la perspectiva que nos da la historia, podemos distinguir cuatro líneas de indicios independientes a favor de la existencia de masa no luminosa, o más propiamente «no emisora», en el universo: la «masa perdida» en cúmulos de galaxias, las curvas de rotación de los discos de galaxias, el análisis de la cinemática de pares de galaxias y la estabilidad de los discos de las galaxias. En 1961, y no antes, Neyman, Page y Scott establecieron que estas líneas apuntaban a un único fenómeno: la llamada «materia oscura», no emisora. Hasta entonces se daba por supuesto que toda o la mayor parte de la masa de una galaxia estaba representada por la masa de las estrellas que la componen, detectable en el rango óptico, llamada también «masa luminosa».

El problema de la masa perdida de los cúmulos de galaxias

Los primeros indicios de masa no luminosa en nuestro universo fueron puestos de manifiesto por Zwicky en 1933. A partir de observaciones de la velocidad radial de ocho galaxias, Zwicky estimó en 1019±360 km/s la dispersión de velocidades del cúmulo de Coma, lo cual le permitió determinar la masa dinámica del cúmulo a partir del teorema del virial[33] con el valor de la constante de Hubble aceptada entonces, de 558 km/s/Mpc. Dicha masa era unas 400 veces mayor que la que se estimaba a partir de la suma de la luminosidad de los objetos que componían el cúmulo, multiplicada por una razón masa/luminosidad típica de las poblaciones estelares que componen las galaxias. Con los valores actuales de la constante de Hubble obtendríamos que la

[33] $M=\langle v^2\rangle R/G$, donde M representa la masa del cúmulo, $\langle v^2\rangle$ corresponde a la dispersión de velocidades de las galaxias y R indica el radio efectivo medio del cúmulo. Aunque existe discusión acerca de si el teorema de virial es aplicable a los cúmulos de galaxias, lo cierto es que las masas resultantes concuerdan razonablemente bien con las obtenidas mediante otros métodos.

masa no luminosa es unas 50 veces mayor que la luminosa. Este descubrimiento originó el problema de la «masa perdida» de los cúmulos de galaxias cuando Smith, en 1936, encontró un resultado parecido para el cúmulo de galaxias de Virgo.

Las curvas de rotación de discos de galaxias

Existen distintos tipos de galaxias que se clasifican según la distribución de brillo que presentan sus imágenes ópticas. El tipo más abundante está constituido por las galaxias espirales, como la nuestra. En ellas la estructura más destacada es un disco de un diámetro decenas de veces mayor que su espesor (figura 1.21). Las estrellas y el gas de este disco describen un movimiento aproximadamente circular que se halla contenido en el plano del mismo. Esta velocidad circular puede medirse, para cada distancia al centro sobre el plano del disco llamada radio galactocéntrico, observando el desplazamiento Doppler de líneas de emisión o absorción y corrigiendo por la inclinación del disco con respecto la línea de visión. La curva que se obtiene representando esta velocidad con respecto al radio galactocéntrico se denomina «curva de rotación» y permite, por tanto, estimar la masa en función del radio. En las partes más externas de las galaxias cabría esperar una disminución de la velocidad de rotación debido a la progresiva disminución del ritmo al cual se incrementa la masa para radios cada vez mayores. Sin embargo, Babcock obtuvo en 1939 un espectro óptico de rendija larga de la galaxia de Andrómeda que mostraba que las partes más externas giraban a una velocidad mayor que la esperada. Tal como se ha mencionado en la introducción histórica, en aquella época se creía que las galaxias se extendían sólo hasta donde eran ópticamente visibles, por lo que el hallazgo de Babcock apuntaba hacia una masa adicional no luminosa. A partir del estudio de la rotación y el brillo superficial de una galaxia lenticular vista de canto, NGC 3115, Oort concluyó, en 1940, que la relación masa/luminosidad era de 250 $M_\odot/L_\odot$ en las partes externas. Con los valores actuales de la distancia ese valor se reduce a 25 $M_\odot/L_\odot$, pero aun así sigue indicando con claridad que hay masa no luminosa, puesto que **la razón masa/luminosidad media de la componente estelar de nuestra Galaxia, es decir, sin contar su materia oscura, es del orden de 3 $M_\odot/L_\odot$.**

Ya en los años setenta, y a partir de medidas radioeléctricas de la línea de 21 cm en emisión, se observó que el hidrógeno atómico (HI) se extiende mas allá de los limites ópticos de los discos y, en algunos casos, mucho mas allá. Este hecho permitió obtener velocidades de rotación de los discos de galaxias espirales a distancias galactocéntricas mucho mayores que las obtenidas a partir de mediciones ópticas (figura 1.22). Efectivamente, a partir de medidas en 21 cm, Roberts y Whitehurst (1975) lograron determinar la curva de rotación de Andrómeda hasta un radio de 30 kpc, sin encontrar la disminución de la velocidad de tipo kepleriano[34]

[34] Como el inverso de la raíz cuadrada del radio.

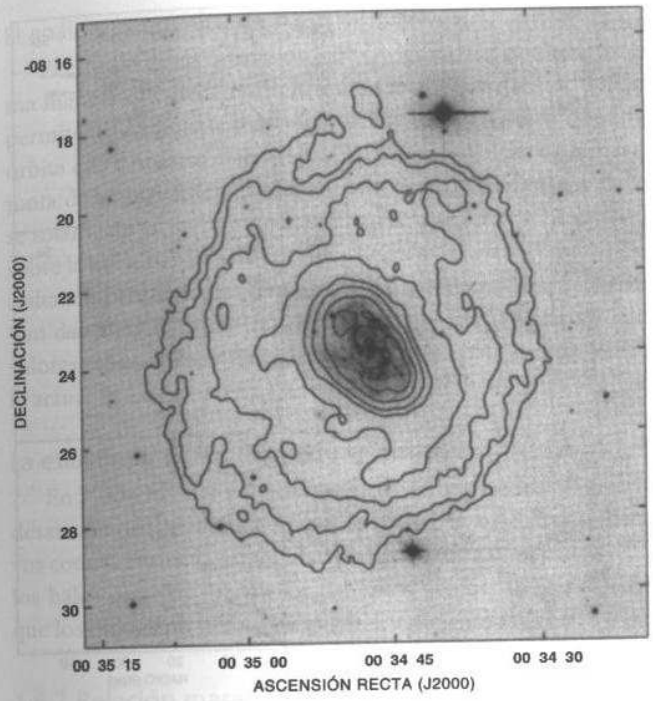


Figura 1.21 Los contornos representan las isodensidades columnales de HI superpuestas sobre una imagen óptica en escala de grises de la galaxia espiral NGC 157. Obsérvese que el gas atómico puede detectarse significativamente más lejos que la extensión óptica de la galaxia. Tomado de Ryder *et al.*, 1998.
Reproducido con permiso de Blackwell Publishing.

como la que se observa en el Sistema Solar, que se esperaría si la mayor parte de la masa se encontrase dentro del rango de distancias radiales estudiado. De hecho la velocidad permanecía constante desde 16 hasta 30 kpc de radio, más allá del límite óptico del disco, lo cual implica que tiene que existir más masa, no luminosa, más allá del radio óptico y que no podía ser debida al gas neutro que se observaba. Estos autores estimaron que la razón masa/luminosidad tenía que ser mayor que 200 $M_\odot/L_\odot$ en las partes más externas de Andrómeda. Este resultado, que fue recibido con gran escepticismo por la comunidad científica, no fue relacionado, como tampoco lo fueron los anteriores, con el problema de la masa perdida de los cúmulos de Coma y Virgo, y fue explicado de manera provisional y conservadora como un gran aumento de la población de estrellas enanas de tipo espectral M5 en las partes externas. En la actualidad dicho fenómeno se halla bien establecido para la mayoría de las galaxias espirales (figura 1.22), cuyas curvas de rotación pueden ajustarse si se añade una distribución esferoidal de masa oscura a la distribución de masa luminosa para tener así en cuenta la fracción de masa oscura necesaria para explicar la curva de rotación en las partes más externas (figura 1.23).

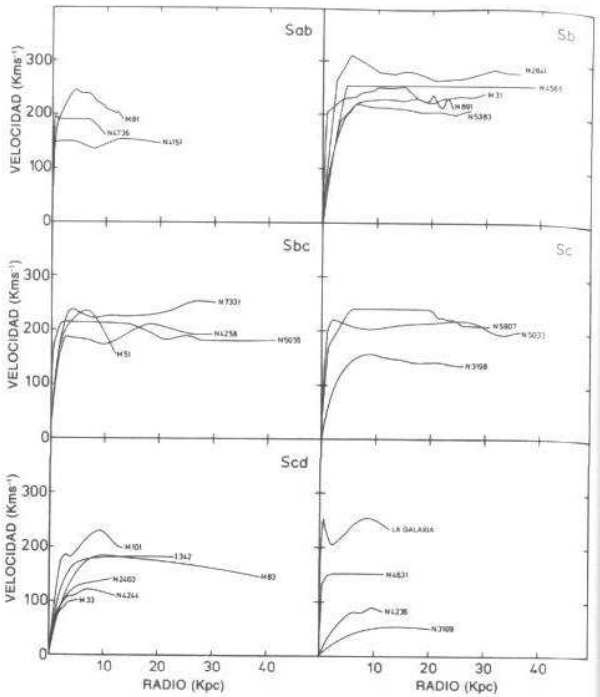


Figura 1.22 Curvas de rotación de galaxias espirales de distintos tipos morfológicos obtenidas a partir de la emisión radioeléctrica del hidrógeno atómico. Todas ellas se mantienen constantes a distancias muy superiores a la extensión óptica de la galaxia, lo cual implica que debe existir masa no luminosa hasta grandes distancias galactocéntricas. Tomado de Bosma, 1981b.
Reproducido con permiso de la American Astronomical Society.

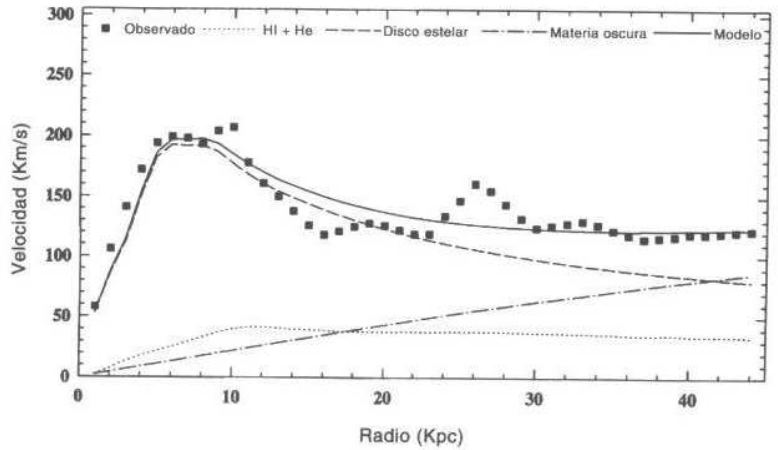


Figura 1.23 Curva de rotación de la galaxia NGC 157. Los puntos representan las medidas y las líneas los ajustes a la velocidad circular debida a la masa de gas (línea de puntos) y de las estrellas (línea de trazos). La materia oscura (línea de puntos y trazos) proporciona la masa adicional necesaria para obtener el ajuste (línea continua) de las observaciones. Obsérvese que se ha supuesto una distribución esférica de masa oscura de baja densidad. Tomado de Ryder *et al.*, 1998.
Reproducido con permiso de Blackwell Publishing.

El análisis cinemático de pares de galaxias

El estudio de las órbitas de pares de galaxias permite estimar su masa, de la misma manera que la determinación de los parámetros orbitales de estrellas binarias permite determinar la masa del par. En 1959, y a partir de suposiciones acerca de la órbita entre nuestra Galaxia y M31, Kahn y Woltjer encontraron que la masa conjunta de ambos sistemas estelares era cuatro veces mayor de lo esperado basándose solamente en su luminosidad. Parece que estos autores desconocían los trabajos sobre la masa perdida de cúmulos de galaxias y atribuyeron el exceso de masa a gas a alta temperatura. Estudios de otros pares de galaxias realizados por Page (1960) y Van den Bergh (1961) mostraban razones masa/luminosidad que oscilaban entre valores más o menos estándar y valores muy superiores, entre 20 y 70 $M_{\odot}/L_{\odot}$. En la actualidad este tipo de estudios se ha ampliado a las órbitas de galaxias satélite.

La estabilidad de los discos de las galaxias

En 1973 Ostriker y Peebles sugirieron que un halo[35] masivo permitiría evitar el desarrollo de inestabilidades en los discos de las galaxias. Aunque los bulbos masivos contribuyen a la estabilidad de los discos (Kalnajs, 1987), hoy día se acepta que los halos masivos son mayormente los responsables de dicha estabilidad, puesto que los bulbos no tienen, en general, suficiente masa.

1.6.2 Relación masa/luminosidad

De los indicios anteriores puede concluirse que en el universo la materia que emite radiación luminosa constituye solamente una fracción minoritaria de la existente. Además, dado que esa «masa oscura» se ha detectado por su influencia gravitatoria sobre la materia luminosa, se infiere que la masa oscura acompaña a la luminosa. Es decir: las galaxias y cúmulos de galaxias que «se ven» en el universo representan la punta del iceberg de dichas estructuras desde el punto de vista de su masa.

Es de especial interés determinar la fracción de masa oscura que acompaña a la luminosa. La manera tradicional de expresar esta relación, como ya se ha visto, consiste en dar el cociente entre la masa, expresada en masas solares, y la luminosidad bolométrica, expresada en luminosidades solares. Para ello es preciso asegurarse de que se ha contabilizado la contribución de la mayor parte de la masa oscura, puesto que solamente puede detectarse por sus efectos dinámicos *sobre la materia emisora*, de la que puede medirse la cinemática. **Hasta unas pocas veces el tamaño del disco de galaxias espirales**, según indican las medidas de la curva de rotación del hidrógeno atómico, **es del orden de 10** $M_{\odot}/L_{\odot}$. Se obtienen valores parecidos en el caso de galaxias elípticas. Sin embargo, medidas a mayores distancias, utilizando

[35] Componente con simetría esférica.

galaxias satélite o sistemas de galaxias, proporcionan valores más grandes, lo cual indica la gran extensión de la masa oscura que acompaña a las galaxias. Por este motivo, las mayores estructuras espaciales, los cúmulos de galaxias[36], constituyen laboratorios cosmológicos donde medir con mayor significación la fracción de masa oscura frente a la luminosa, puesto que toda la masa, luminosa o no, se hallará atrapada en el cúmulo y concentrada en sus partes centrales, donde se puede medir con cierta facilidad.

El método comúnmente utilizado es el mismo que aplicó Zwicky en 1933 y consiste en obtener el promedio para un conjunto de cúmulos de galaxias, del cociente entre la masa del virial y la suma de las luminosidades de las galaxias de cada cúmulo. Carlberg *et al.* obtuvieron, en 1996, un valor de $295\pm53\ h\ M_{\odot}/L_{\odot}$ a partir de 2600 galaxias de 16 cúmulos brillantes con desplazamientos al rojo entre 0.17 y 0.55, y concluyeron que dicho valor no dependía del desplazamiento al rojo de los cúmulos, de su densidad media, ni del color de las galaxias que los forman. Los mismos autores también hallaron que el resultado no podía diferir mucho del de las galaxias de campo (fuera del cúmulo), a pesar de las diferencias evolutivas debidas al entorno y que afectarían a la luminosidad de las mismas. Por consiguiente, este **valor de la razón masa/luminosidad se considera una constante universal.**

1.6.3 Naturaleza de la masa oscura

¿De qué está constituida esta masa o materia oscura? Atacando el problema por partes, cabría plantear la posibilidad de que esté formada por la materia que conocemos, de tipo bariónico[37], o por materia de otro tipo, no bariónica. A continuación se considerarán ambas alternativas y se enumerarán las posibilidades de cada una de ellas procediendo por eliminación, como cuando se analizaron las posibles explicaciones del desplazamiento al rojo. Sin embargo, cualquiera que sea la explicación adoptada, ha de dar cuenta de una cantidad de masa centenares de veces superior a la debida a las estrellas, que acompañe a las estructuras luminosas observadas, que sea de baja emisión y difícil de detectar.

Bariónica o «convencional»

Esencialmente, la materia bariónica del universo conocido se encuentra en tres formas posibles: objetos metálicos como los planetas y cometas del Sistema Solar, gas en distintas fases compuesto mayoritariamente por hidrógeno, y objetos de tipo estelar.

[36] Los supercúmulos proporcionan valores parecidos.

[37] El término *bariones* designa a un subconjunto de hadrones con masas en reposo del orden del GeV o superiores, de las que los miembros más destacados son los nucleones, es decir, neutrones y protones.

Si la masa oscura estuviera constituida por elementos pesados tipo Sistema Solar (planetas tipo terrestre, cometas, asteroides, polvo, etc.), el universo tendría que ser muy antiguo para haber producido por nucleosíntesis estelar todos estos elementos en cantidades decenas de veces superiores al hidrógeno, y además las estrellas que nos rodean deberían de ser mucho más metálicas de lo que se observa.

Tampoco puede estar formada por nubes de gas. En caso contrario sería fácilmente detectable en esas grandes cantidades, tanto en su fase ionizada por su emisión óptica, como en forma de átomos neutros por su emisión radioeléctrica. En ambos casos las cantidades de gas ionizado y neutro detectadas alrededor de las galaxias y en cúmulos de galaxias son muy inferiores a las necesarias. Por otro lado, si bien se observan líneas de absorción del hidrógeno, el llamado «bosque de Lyman», en los espectros de cuerpos lejanos como los cuásares, éstas proceden de nubes discretas, con masas del orden de la de una galaxia enana, que se hallan en la línea de visión del cuásar, y a distancias cosmológicas. Es decir, que no se concentran donde la materia luminosa, y no pueden dar cuenta de la masa necesaria.

Por tanto, si la masa oscura es bariónica, debe estar formada fundamentalmente por objetos colapsados de tipo estelar. Si se tratase de estrellas masivas evolucionadas, como enanas blancas y estrellas de neutrones, ya deberían haber sido detectadas por su emisión óptica o radioeléctrica si su densidad fuera lo suficientemente alta. Si se tratase de agujeros negros, dado que éstos se forman a partir de supernovas que expulsan metales al medio, cabría observar una cantidad de metales muy superior a la observada. Cabe la posibilidad de que existan agujeros negros supermasivos, es decir, aquellos que superan los centenares de masas solares y no pueden provenir de supernovas. Sin embargo, si esos agujeros negros supermasivos existieran en cantidad suficiente, deberían observarse efectos de lente gravitatoria muy notables en cuásares y otros objetos distantes, lo que no sucede.

Finalmente, una posibilidad en su día prometedora fueron las estrellas de baja luminosidad tipo «enanas marrones», es decir, astros con una masa demasiado baja ($\leq 0.08 M_{\odot}$) como para provocar la fusión del hidrógeno, así como objetos tipo Júpiter, con masas incluso inferiores. Sin embargo el experimento MACHO[38] ha realizado un seguimiento de 4×10^7 estrellas de las Nubes de Magallanes y del bulbo de la Galaxia durante casi seis años, en busca de efectos de microlente gravitatoria sobre dichas estrellas, causados por objetos compactos del halo de nuestra Galaxia[39].

[38] Del inglés *MAssive Compact Halo Objects*.

[39] Dado que la línea de visión hacia las estrellas de las Nubes de Magallanes atraviesa el halo de nuestra Galaxia, si en éste hubiera objetos compactos poco o nada luminosos, cabría esperar que en un momento dado alguno de estos objetos se aproximara lo bastante a la línea de visión de una estrella de las Nubes de Magallanes como para producir un incremento de su brillo debido a un efecto de microlente gravitatoria. La estrella volvería a tener el mismo brillo que antes al alejarse el objeto de la línea de visión de la estrella. Es preciso descartar *a posteriori* otros fenómenos de variabilidad intrínseca.

El número de sucesos observados oscila entre 13 y 17, mucho menor del necesario para explicar la masa oscura incluso suponiendo una eficiencia de detección del 40-50% (Alcock *et al.*, 2001).

En conclusión, aunque una parte de la materia oscura podría ser bariónica, formada por una combinación de las posibilidades descritas arriba, especialmente enanas marrones, lo más seguro es que la mayor parte sea no bariónica.

No bariónica o «partículas exóticas»

La materia no bariónica, es decir, la que no consiste ni en protones ni en neutrones pero que crea un campo gravitatorio, estaría constituida en general por partículas de distintos tipos todavía no descubiertas[40]. Dado que además no emiten radiación, cumplen automáticamente con dos de los principales criterios para formar parte de la materia oscura.

Tradicionalmente se clasifican según su «temperatura», equivalente a su velocidad: la materia oscura «fría» se desplaza a velocidades muy inferiores a la de la luz mientras que la materia oscura «caliente» es relativista. Esta distinción pretende representar la facilidad con que podrían escapar del campo gravitatorio de una galaxia típica, que define velocidades de escape del orden de $10^{-3}c$ (ejercicio 1.3). A continuación ofrecemos ejemplos de las alternativas que se consideran en cada tipo.

Materia oscura fría[41]

Estaría constituida por partículas predichas por distintas teorías. Cuando estas partículas son masivas, se las acostumbra a denominar colectivamente WIMP[42]. En la actualidad los candidatos que parecen más prometedores son la partícula supersimétrica neutralino y el axión.

Según la teoría de la supersimetría, cada partícula tendría asociada otra de características opuestas. Por ejemplo, el gravitón es un bosón, hipotético mediador de la gravedad. Su correspondiente partícula supersimétrica sería un fermión, el gravitino. Análogamente se predicen el bosón sneutrino como contrapartida del neutrino y el fermión fotino como contrapartida del fotón, entre otros. Las partículas supersimétricas al decaer se descomponen solamente en otras partículas supersimétricas. La más ligera de éstas es el neutralino, resultado del decaimiento de otras partículas supersimétricas y que constituye la contrapartida fermiónica del bosón Z responsable de la interacción débil. Según esta teoría, la materia oscura fría estaría mayoritariamente compuesta por neutralinos. El neutralino no posee carga y tendría una masa comprendida entre 30 y 5000 GeV. Existen varios experimentos actualmente en curso para su detección, basados en el movimiento que los átomos de distintos materiales sufrirían debido al impacto con neutralinos: CDMS, CRESST, DAMA, EDELWEISS, HDMS, ESPLIN (el lector puede encontrar las descripciones de dichos experimentos en Internet).

El axión fue postulado en 1977 por Roberto Peccei y Helen Quinn para explicar por qué la violación de la simetría CP[43] en la fuerza fuerte, permitida por la cromodinámica cuántica, no ha sido observada nunca. El axión no posee ni carga eléctrica ni espín y, dado que su masa estaría comprendida entre la milésima y la millonésima de electrón-voltio, no constituye propiamente una WIMP. Existen en la actualidad dos experimentos que intentan detectar el axión: CARRACK2 en Japón y el del laboratorio Lawrence Livermore en EE UU. Se basan en que la desintegración de un axión en su interacción con la materia debiera generar dos fotones en el rango espectral de las microondas.

Hasta la fecha no se han detectado partículas responsables de la materia oscura fría, aunque los experimentos están llegando a un umbral en el que empieza a ser posible su detección, dificultada principalmente por el fondo de rayos cósmicos y la desintegración de elementos radiactivos terrestres, procesos que causan un número de interacciones muy superiores a las que provocaría la materia oscura, que es por definición débilmente interactiva.

Materia oscura caliente[44]

El ejemplo paradigmático de este tipo de materia oscura lo constituyen los neutrinos. Al contrario que las demás partículas mencionadas hasta ahora, la existencia de los neutrinos está comprobada de manera experimental, por lo que constituyen el único candidato de materia oscura para el que existen pruebas directas. Ya en 1972 R. Cowsik y J. McClelland especularon acerca de que la masa oscura fuera debida a neutrinos. En 1980, experimentos realizados por F. Reines, H. W. Sobel y E. Pasierb, así como A. Lyubimov y colaboradores, sugirieron que los neutrinos podrían poseer una masa en reposo pequeña, aunque no nula. En la actualidad parece comprobado que el neutrino tiene una masa en reposo distinta de cero, pero hasta ahora los experimentos en tierra sólo han podido determinar cotas superiores a su valor.

De entre los experimentos para la determinación de la masa del neutrino destacan los realizados con el instrumento *Super-Kamiokande* y con su sucesor, *Kam-*

[40] Salvo el caso de los neutrinos, véase más adelante.

[41] Del inglés *Cold Dark Matter*.

[42] Acrónimo inglés de *Weakly Interacting Massive Particle* o partícula masiva débilmente interactiva. Nótese que WIMP y MACHO son palabras elegidas a propósito por tener significados opuestos en inglés. La segunda se propuso obviamente después de la primera.

[43] La simetría C designa a la conjugación de carga, por la cual un proceso permanece invariable si se intercambian partículas por antipartículas. P designa la paridad, por la cual si un proceso es posible, su imagen especular también. En la simetría CP ambas simetrías se verifican simultáneamente, aunque no necesariamente por separado cada una de ellas.

[44] Del inglés *Hot Dark Matter*.

LAND. El *Super-Kamiokande*[45] es un detector basado en el efecto Cherenkov. Consiste en un cilindro de 40 metros de diámetro por 40 de altura que contiene 50 000 toneladas de agua y 11 200 tubos fotomultiplicadores distribuidos por las bases y paredes interiores del cilindro. Esta disposición permite medir la intensidad de la luz emitida y la dirección de la partícula o partículas que la producen. Está situado a 1000 metros de profundidad en una mina en Japón (Kamioka), lo que permite reducir en un factor 100 000 el número de muones procedentes de los rayos cósmicos, dejando un remanente de solamente 1.88 por segundo. El experimento detecta el efecto Cherenkov que producen las partículas cargadas resultantes de la interacción elástica o inelástica de los neutrinos con los electrones y nucleones del agua. Por este motivo, un fondo de muones cósmicos reducido facilita la detección de los muones producidos por los neutrinos. Otra de las funciones del *Super-Kamiokande* es la detección de desintegraciones de protones, predichas por las teorías de gran unificación.

La detección de la masa del neutrino guarda una estrecha relación con el llamado «problema de los neutrinos solares»: se detectan solamente el 37% de los neutrinos electrónicos solares que teóricamente debieran producirse. Existen varias hipótesis para explicar este fenómeno, y una de ellas es la «oscilación de los neutrinos». Esta oscilación consiste en que parte de los neutrinos electrónicos producidos en el Sol se transforman en neutrinos muónicos. Esta oscilación también tendría lugar con los neutrinos muónicos producidos por la interacción de los rayos cósmicos con la atmósfera de la Tierra: se transformarían en tauónicos. Estas oscilaciones sólo son posibles si el neutrino tiene masa, en caso contrario el neutrino es estable y no pueden suceder. Además las oscilaciones dependen de la distancia entre la fuente de neutrinos y el detector: a mayor distancia, mayor transformación de un tipo de neutrino en otro.

En el *Super-Kamiokande* se han estudiado tanto los neutrinos solares como los producidos en la atmósfera. Estos últimos se han mostrado especialmente útiles en la detección de oscilaciones. En efecto, las interacciones de los rayos cósmicos con la atmósfera de la Tierra producen dos veces más neutrinos muónicos que electrónicos. Sin embargo, los neutrinos muónicos procedentes del nadir recorren 12 800 km más que los que vienen del cenit, porque tienen que atravesar toda la Tierra. Los investigadores de la «Colaboración *Super-Kamiokande*» aseguran haber detectado una razón distinta de neutrinos muónicos a electrónicos dependiendo de si proceden del cenit o del nadir. Esto implica que el neutrino tiene masa en reposo no nula. Sin embargo, este experimento sólo nos indica que la masa no es nula,

[45] Resultó destruido el 12 de noviembre de 2001 por un accidente sin explicación conocida hasta la fecha por el que implosionaron en cascada el 60% de sus tubos fotomultiplicadores, es decir, unos 8000 tubos. Su reconstrucción terminó el 6 de diciembre de 2002.

pero no su valor, puesto que sólo es posible medir la diferencia de las masas al cuadrado (Fukuda *et al.*, 1998). Las últimas estimaciones (Fukuda *et al.*, 2001), indican que la diferencia cuadrática de masas entre el neutrino electrónico y el muónico o tauónico puede tomar dos rangos de valores:

$$10^{-4}\ \text{eV}^2 < \Delta m^2\,(e\text{–}\mu\ \text{ó}\ \tau) < 10^{-5}\ \text{eV}^2 \tag{1.16}$$

o bien

$$10^{-7}\ \text{eV}^2 < \Delta m^2\,(e\text{–}\mu\ \text{ó}\ \tau) < 10^{-10}\ \text{eV}^2. \tag{1.17}$$

Por otro lado, Ahn *et al.* (2003) encuentran que el rango de valores de la diferencia cuadrática de masas entre el neutrino mu (μ) y el tau (τ) es

$$1.5 \times 10^{-3}\ \text{eV}^2 < \Delta m^2\,(\mu\text{–}\tau) < 3.9 \times 10^{-3}\ \text{eV}^2, \tag{1.18}$$

ambas estimaciones con una fiabilidad del 90%.

En 2002 empezó a funcionar KamLAND[46], situado en el antiguo emplazamiento del *Kamiokande*. Consiste en 1000 toneladas de una mezcla de hidrocarburos líquidos muy puros aislados de la esfera de acero de 18 m de diámetro que los contiene por un apantallamiento de una capa de 2.5 m de espesor compuesta de aceites orgánicos. El gran espesor de roca reduce el nivel de rayos cósmicos (muones), mientras que el apantallamiento descontamina de neutrones producidos por espalación de muones y de la radiactividad natural de la roca y del acero del recipiente. El sistema de detectores consiste en 1879 tubos fotomultiplicadores. El experimento pretende detectar los antineutrinos electrónicos producidos por reactores nucleares situados a unos 180 km, a través de su interacción con los protones de los hidrocarburos del contenedor, proceso que debe general positrones y neutrones. Estos últimos emiten a su vez rayos gamma al ser capturados por protones (de ahí que sea preciso descontaminar de neutrones y rayos gamma por los distintos apantallamientos). El flujo de antineutrinos detectados es únicamente el 61.1±12.6% del predicho (Eguchi *et al.*, 2003). Este resultado parece consistente con la oscilación del neutrino (y por tanto con una masa en reposo distinta de cero) con una fiabilidad del 95%, y podría explicar el déficit de neutrinos solares. Éstos son resultados preliminares de datos obtenidos entre marzo y octubre de 2002. Es de esperar que en el futuro pueda obtenerse una respuesta más concluyente.

[46] KAMioka Liquid scintillator Anti-Neutrino Detector.

1.6.4 Influencia de la materia oscura en la formación de estructuras

Aunque el tema se tratará con algo más de rigor en el capítulo octavo, de manera intuitiva y poco rigurosa puede imaginarse que la velocidad, es decir, la temperatura, de la materia oscura determinará el tamaño de las primeras estructuras bariónicas que se formen en el universo, dado que ambas clases de materia se hallan mezcladas. En efecto, a mayor temperatura será necesaria más masa para que la atracción gravitatoria compense la energía cinética de las partículas que componen la materia oscura. Entonces, la materia oscura caliente, como los neutrinos masivos, produciría primero estructuras más masivas, como los supercúmulos de galaxias. Es el modelo que se denomina ***de arriba-abajo***[47]: **primero se forman los supercúmulos y luego, por fragmentación, los cúmulos y, finalmente, las galaxias.** La materia oscura fría se mueve más despacio, y forma primero las estructuras menos masivas. Es el modelo ***de abajo-arriba***[48]: **primero se forman las estructuras menores, las galaxias, y luego las mayores, los cúmulos y los supercúmulos de galaxias, por posterior agrupación gravitatoria.** Dado que el tipo de materia oscura dominante determinará la formación de estructuras, se distingue entre modelos de materia oscura fría, de materia oscura caliente o mixtos.

En nuestro universo se han detectado hasta la fecha galaxias situadas hasta a desplazamientos al rojo 7 (Iye *et al.*, 2006). Por otro lado, existen grandes agrupaciones de galaxias con una estructura en forma de paredes o filamentos (1.5.12) que indican que las superestructuras del universo todavía se están formando en la actualidad, puesto que en caso contrario su distribución habría adoptado una morfología más cercana a la esférica, propia de un equilibrio gravitatorio. Por consiguiente, los hechos observables muestran que en nuestro universo primero se forman las galaxias, luego las estructuras de tipo cumular, de un tamaño de varios Mpc, y actualmente se estarían formando los supercúmulos de galaxias, de tamaños del orden del centenar de Mpc, lo cual apoyaría el escenario de la materia oscura fría. Sin embargo, hasta la fecha, el único candidato fiable de materia oscura no bariónica es el neutrino, que formaría la materia oscura caliente.

La influencia del tipo de materia oscura sobre la formación de estructuras permite estimar cotas superiores bastante restrictivas a la masa del neutrino a partir de la distribución de materia bariónica observada, tal como se deduce a partir de los datos del 2dF (figura 1.19), y de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (dicha radiación se describe en el apartado siguiente y sus anisotropías se estudian en el capítulo séptimo). Los resultados obtenidos indican que **la suma de las masas de cada una de las especies de neutrino es inferior a 1.0 eV**[49], y que el número de especies de neutrino es de 2.6±0.4, ambas medidas con una fiabilidad del 95% (Hannestad, 2003). Por otro lado, una combinación de los resultados de KamLAND y de las anisotropías del fondo cósmico[50] (Joaquim, 2003) indica que **la masa del neutrino más ligero está comprendida en el rango**

$$0.05 \text{ eV} < m_\nu < 0.23 \text{ eV}. \qquad (1.19)$$

En conclusión, el neutrino masivo no puede dominar la materia oscura, pero no se han detectado las WIMP y el problema sigue abierto.

En conclusión, las estructuras luminosas que detectamos en el universo (galaxias y cúmulos de galaxias) presentan una componente de materia no emisora que se detecta por su influencia gravitatoria y que es decenas de veces mayor que la luminosa. Esta materia no emisora es mayormente no bariónica y fundamentalmente fría.

1.6.5 Teorías alternativas

Debido a la necesidad de acudir a materia exótica no detectada para explicar la masa oscura, existen corrientes de pensamiento que intentan evitar dicha masa oscura recurriendo a explicaciones alternativas para los fenómenos dinámicos observados y descritos en el apartado (1.6.1). Esencialmente se dividen en las que modifican la dinámica de Newton, más populares, y las que recurren a los campos magnéticos.

La teoría MOND

Brevemente, la teoría MOND[51] (Milgrom 1983) modifica la segunda ley de Newton para introducir un término dominante a aceleraciones extremadamente bajas, del orden de 2 Å/s^2, e inobservable a aceleraciones más altas. En esta teoría, la segunda ley de Newton es una aproximación válida solamente a aceleraciones suficientemente altas. Es decir, si F es la fuerza, m la masa y a la aceleración,

$$F = mf(x)\, a, \qquad (1.20)$$

donde $x=a/a_0$ con $a_0=2\times10^{-10}$m/s^2, $f(x)=1$ cuando $x>>1$, y $f(x)\approx x$ cuando $x\lesssim 1$.

Entonces, en las partes externas de los discos, cuando la aceleración es suficientemente baja (ejercicio 1.6), la fuerza es proporcional al cuadrado de la aceleración. Dado que la teoría MOND cambia la dinámica pero no las leyes cinemáticas, la ace-

[47] Del inglés *top-down*.

[48] Del inglés *bottom-up*.

[49] Utilizando el cartografiado Sloan, los datos de fondo cósmico de WMAP, las SNIa y el bosque Lyα, para 3 especies de neutrino y el modelo cosmológico actual, Goobar *et al.* (2006) encuentran $\Sigma m_\nu \leq 0.2 - 0.4$ eV (95% C. L.).

[50] Éste campo es un ejemplo paradigmático de una sinergia extraordinariamente valiosa entre la astrofísica y la física de partículas, gracias a la precisión de las medidas obtenidas por los grandes telescopios en tierra y en órbita.

[51] Acrónimo de *MOdified Newtonian Dynamics* o dinámica newtoniana modificada.

leración centrípeta sigue siendo igual al cuadrado de la velocidad circular dividido por el radio. Por otro lado, la ley de gravitación sigue siendo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia radial, por lo que el producto de la aceleración por el radio es una constante, que es igual al cuadrado de la velocidad circular (ejercicio 1.6).

Sin embargo, la teoría MOND adolece de ser una construcción *ad hoc* (lo cual en cosmología, como se verá más adelante, no puede considerarse una excepción), que no permite explicar totalmente la masa perdida de los cúmulos de galaxias sin recurrir a la materia oscura de la que precisamente quiere prescindir. Por este motivo, y aun en el marco MOND, la materia oscura sigue siendo necesaria.

Los campos magnéticos

Más allá del radio óptico, la densidad columnar de gas disminuye rápidamente. En esta región, incluso campos magnéticos relativamente débiles, del orden de 3 μG, con líneas de campo espirales, son capaces de proporcionar la fuerza centrípeta necesaria para compensar la caída kepleriana de la velocidad de rotación. La teoría fue planteada por Nelson en 1988 y desarrollada por Battaner *et al.* en 1992 y 1995.

Sin embargo, aunque dicha teoría podría permitir explicar la curva de rotación de los discos, no es capaz de dar cuenta de las evidencias de materia oscura proporcionadas por los pares de galaxias o por la masa dinámica de los cúmulos de galaxias.

1.7 La radiación cósmica de fondo

1.7.1 Historia

Ya en 1940 Adams informó de la detección de líneas de emisión en el medio interestelar procedentes de la desexcitación de moléculas carbonadas. En años posteriores se determinó que la temperatura de la radiación excitante, de origen desconocido, correspondía a unos 2.3 K.

En 1949, Alpher y Hermann predijeron una radiación cósmica de fondo equivalente a un cuerpo negro con una temperatura característica de unos pocos kelvins. Posteriormente, en 1964, Doroshkevich y Novikov efectuaron una predicción parecida. En ambos casos, la detección fue infructuosa, y no se relacionó con las observaciones que Adams había señalado unos años antes.

En 1963, los laboratorios Bell encargaron a Arno Penzias y Robert Wilson la adaptación, para su uso en radioastronomía, de una antena que se había empleado para recibir la señal de los satélites *Echo* y más tarde *Telstar*. Desde el principio, en la fase de pruebas para su calibración, detectaron un flujo superior al normal. Esta señal no variaba con la orientación de la antena, lo que descartaba efectos atmosféricos o de

fuentes astronómicas localizadas. Después de comprobar que no podía tener un origen instrumental (incluso llegaron a limpiar la antena cuidadosamente puesto que unas palomas habían hecho un nido) seguían como al principio, hasta que otros colegas les mencionaron que algunos astrónomos de Princeton decían que podía existir una radiación cósmica de fondo. Como resultado del contacto de ambos grupos, mandaron dos artículos al *Astrophysical Journal*, que aparecieron consecutivamente en el mismo volumen de la revista, dando cuenta el primero de su interpretación (Dicke *et al.*, 1965) y el segundo del descubrimiento (Penzias y Wilson, 1965).

1.7.2 Características observables

Desde entonces se han realizado gran cantidad de medidas de la radiación cósmica de fondo a distintas frecuencias y comparando distintas zonas del cielo. Los resultados observables son que dicha radiación presenta estas características:

- Se ajusta con mucha precisión a un espectro de cuerpo negro a una temperatura de 2.726±0.010 K (figura 1.24).
- Es altamente isótropa: no existen diferencias de temperatura entre distintas zonas del cielo superiores a la cienmilésima parte a una escala angular de unos 10^{o}.

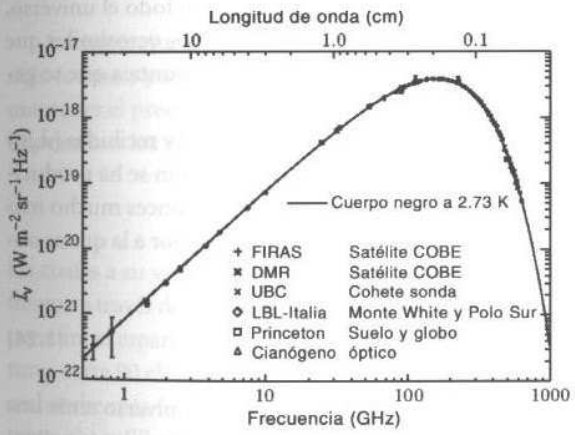


Figura 1.24 Medidas precisas del espectro del fondo cósmico de microondas. La línea representa el ajuste a un cuerpo negro de 2.73 K, que representa muy bien las medidas obtenidas, especialmente alrededor del máximo. Las incertidumbres crecen a longitudes de onda mayores que 10 cm. Tomado de Smoot y Scott, 1996. Copyright 1996 de la American Physical Society.

1.7.3 Interpretación

Es sabido que en el espectro de cuerpo negro la densidad de energía ρ_γ obedece la relación

$$\rho_\gamma = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1}, \qquad (1.21)$$

donde k es la constante de Boltzmann, h la de Planck, c la velocidad de la luz, ν representa la frecuencia de la radiación, y T la temperatura absoluta del cuerpo negro. Esta distribución verifica las leyes de Wien (1.22) y de Stefan-Boltzmann (1.23):

$$\lambda_M T = 2.8978 \times 10^{-3}\ \text{Km} \tag{1.22}$$

$$\rho_\gamma = \frac{4\sigma}{c} T^4, \tag{1.23}$$

donde λ_M es la longitud de onda del máximo, σ es la constante de Stefan-Boltzmann ($5.6693\times10^{-8}\ \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$), T es la temperatura absoluta y c la velocidad de la luz.

De la ley de Wien (1.22) y de la temperatura observada podemos deducir que λ_M=1.06 mm, es decir, el máximo de la radiación cósmica de fondo se observa a longitudes de onda milimétricas.

La alta isotropía de la radiación y su espectro excluyen que su origen sea local (Sol o Sistema Solar), galáctico o por fuentes extragalácticas localizadas como por ejemplo galaxias o cúmulos (ejercicios 1.7 y 1.8). Además, no se conocen mecanismos verosímiles capaces de producir una radiación de estas características en galaxias o cúmulos de galaxias. Por consiguiente, ha de producirse en todo el universo, sin una ubicación determinada. Tampoco se conocen mecanismos verosímiles que puedan producir dicha radiación en el universo actual, lo cual apunta a que se generó en etapas muy anteriores de la historia del universo.

De la relación existente entre longitudes de onda emitidas (λ) y recibidas (λ_0) y los factores de escala (1.12) resulta que si se admite que la radiación se ha producido en etapas tempranas del universo, su longitud de onda era entonces mucho más corta y, por la ley de Wien, su temperatura debía de ser muy superior a la que se observa en la actualidad. De (1.12) y la ley de Wien (1.22), tenemos

$$T = T_0 (1+z), \tag{1.24}$$

donde T_0 es la temperatura actual y T la temperatura cuando el universo tenía una edad igual a la de los objetos que se observan con un desplazamiento al rojo z. Puede demostrarse fácilmente que el desplazamiento al rojo no altera la forma funcional de la ley de Planck, sino que se limita a cambiar la temperatura de la misma (ejercicio 1.9).

El fondo cósmico de fotones con un espectro de Planck, indicativo de equilibrio térmico, se generó a desplazamientos al rojo muy altos, es decir, en etapas muy tempranas del universo, y mediante distintas reacciones. Cada una de las reacciones se caracteriza por una sección eficaz, que depende de la temperatura. Dado que la

temperatura del universo[52] disminuye con la expansión (1.24), distintos procesos toman sucesivamente el relevo al ir perdiendo eficacia las distintas reacciones. Primeramente tienen lugar reacciones de creación-aniquilación de pares, como por ejemplo,

$$e^+ + e^- \leftrightarrow \gamma + \gamma. \tag{1.25}$$

Efectivamente, (1.24) indica que a un desplazamiento al rojo suficientemente elevado, la radiación cósmica de fondo puede llegar a ser tan energética como para crear pares de partículas. Sin embargo, la expansión del universo hace bajar la temperatura y a partir de un cierto instante ya no puede producirse la creación de pares, con lo que el equilibrio de (1.25) se pierde, la reacción se desplaza a la derecha y la aniquilación de pares deja una gran cantidad de fotones. Los fotones producidos por la reacción (1.25) tienen un espectro de cuerpo negro. Además, dicha reacción equilibra térmicamente la materia y la radiación. Una ulterior creación o absorción de fotones también con espectro de cuerpo negro, y manteniendo el equilibrio térmico con la materia, sucede mediante doble esparcimiento Compton,

$$e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + 2\gamma. \tag{1.26}$$

A temperaturas más bajas el esparcimiento Compton simple (1.27) ya no crea más fotones, por lo que no puede generar un espectro de cuerpo negro, pero sí mantener el preexistente y seguir manteniendo también el equilibrio térmico de los fotones con los electrones,

$$e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma. \tag{1.27}$$

los cuales a su vez permanecen en equilibrio con los protones a lo largo de todo este tiempo a través de interacciones coulombianas. Con la ulterior disminución de la temperatura el esparcimiento Compton pasa a esparcimiento Thomson. Pero a temperaturas entre 90 eV y 1 eV, la radiación de frenado *(Bremstrahlung)* toma el relevo y crea o absorbe más fotones con espectro de cuerpo negro, y contribuye también a mantener el equilibrio térmico,

$$e^- + X \leftrightarrow e^- + X + \gamma. \tag{1.28}$$

donde X es un ion.

[52] Por temperatura del universo se entiende, por tanto, la de los fotones. Esta temperatura representará propiamente la del universo mientras se mantenga el equilibrio termodinámico entre la materia y la radiación.

Sin embargo, con la inexorable disminución de la temperatura con la expansión, llega un momento en que la combinación[53] del hidrógeno es importante, puesto que los fotones ya no pueden ionizar el hidrógeno eficientemente. La reacción

$$e^- + p \leftrightarrow \mathrm{H} + \gamma \tag{1.29}$$

se desplaza a la derecha. Cuando la densidad de electrones libres desciende lo suficiente, el esparcimiento Thomson (1.27) pierde eficiencia y los fotones se expanden sin apenas interaccionar con la materia, lo que da como resultado el fondo de radiación que actualmente se observa y que conserva, sin embargo, la forma del espectro original de equilibrio térmico debido a que no existen interacciones posteriores que puedan distorsionarlo[54] y la expansión del universo no altera la forma funcional del espectro (ejercicio 1.9). En este caso, la alta isotropía observada en la radiación cósmica de fondo implica la isotropía de la distribución de energía en el universo en el momento de la combinación (1.29), puesto que la materia y la radiación estaban en equilibrio termodinámico.

El instante en que se produce el llamado **desacoplamiento de los fotones**, es decir, el momento en que éstos ya no interaccionan más con la materia mediante esparcimiento Thomson (1.27) debido a que la reacción de combinación (1.29) ha hecho disminuir la densidad de electrones, permite definir la denominada **superficie de último esparcimiento,** como el lugar geométrico de los puntos del universo en que los fotones que ahora se detectan sufrieron la última interacción Thomson. De este modo, por isotropía, se define una superficie[55] cuyos puntos se hallan a la misma distancia del observador. A medida que transcurre el tiempo se observarán fotones procedentes de superficies de último esparcimiento cada vez más alejadas del observador, aunque el número de fotones observados permanece constante (ejercicio 1.10). Intuitivamente la superficie de último esparcimiento y su variación con el tiempo puede visualizarse en dos dimensiones suponiendo una superficie ilimitada, uniformemente (homogeneidad e isotropía) llena de personas (electrones) gritando (dispersando fotones). Si en un mismo instante de tiempo, simultáneamente en todo el universo (instante del desacoplamiento), las personas dejan de gritar (la densidad de electrones ha bajado y ya no tiene lugar el esparcimiento Thomson), las últimas ondas sonoras emitidas (fotones de la radiación de fondo)

[53] Antes de esa época el hidrógeno no había estado combinado nunca. Por ese motivo, aunque por costumbre se hable de «recombinación», propiamente es una «combinación». Posteriormente, tras una «reionización» sí que puede decirse que el hidrógeno se «recombina». A lo largo de este texto se utilizará el término «combinación» para indicar esta primera formación de hidrógeno.

[54] Esta afirmación es cierta en gran medida. Sin embargo la primera generación de estrellas, la llamada «población III», habrá producido una cierta reionización del universo, y además existen fenómenos que pueden causar alteraciones en el espectro de la radiación de fondo, como se discutirá en el capítulo séptimo.

[55] Como se demostrará en el capítulo séptimo dicha superficie tiene realmente un cierto espesor.

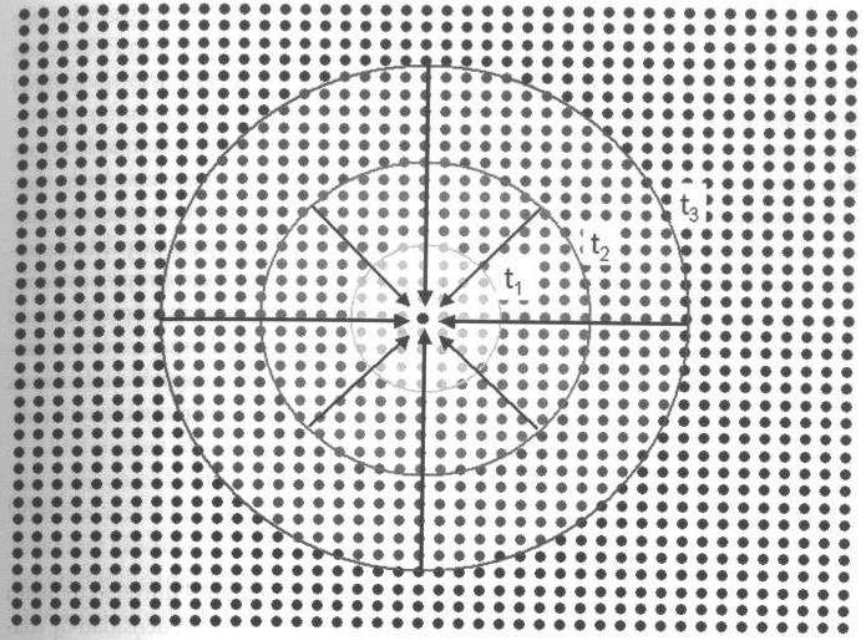


Figura 1.25 Representación idealizada bidimensional de la superficie de último esparcimiento. El universo está lleno de gente gritando. Los puntos son las cabezas. El observador, marcado en negro en el centro de la figura, también grita. Si simultáneamente todos dejan de gritar, como el sonido viaja a 330 m/s, al cabo de un segundo se oirá el sonido procedente de la superficie del último grito de las personas situadas a 330 metros del observador. Al cabo de dos segundos la superficie del último grito se situará a 660 m, etc. Siempre se oirá el sonido procedente de la superficie del último grito, que se aleja del observador a la velocidad del sonido. Cualquier otro observador notará el mismo efecto. Es más, para otros observadores situados en la superficie del último grito, el primer observador se halla en su superficie del último grito. Basado en una idea de C. Lineweaver (2003).

llegarán de distancias cada vez mayores a medida que transcurre el tiempo, puesto que el sonido (los fotones) se propaga a una velocidad finita. Esta *superficie del último grito* constituye el equivalente a la superficie de último esparcimiento.

Por consiguiente, si se acepta que el desplazamiento al rojo es debido a la expansión del universo y que se puede extrapolar hacia atrás en el tiempo hacia desplazamientos al rojo suficientemente elevados, la física de partículas permite explicar la formación de una radiación de fondo con el espectro de cuerpo negro a la temperatura a la que se observa en la actualidad. **Los fotones con espectro de cuerpo negro se generan por distintos procesos sucesivos: aniquilación de pares** (1.25), **doble Compton** (1.26) **y radiación de frenado** (1.28). **El esparcimiento Compton** (1.27) **no puede generar un espectro de cuerpo negro, pero mantiene el producido mediante los mecanismos ya citados, y también mantiene el equilibrio térmico materia-radiación.**

El desplazamiento al rojo al cual ocurre la combinación (1.29) puede estimarse groseramente teniendo en cuenta los niveles del átomo de hidrógeno (ejercicio 1.11). A un desplazamiento al rojo de 700, el máximo de la distribución llegaría al límite de Brackett (unos 1500 nm de longitud de onda) mientras que a un desplazamiento de 1300 llegaría al límite de Paschen (unos 820 nm). Dado que la ley de Planck indica que existirán fotones todavía más energéticos, puede concluirse que a desplazamientos al rojo superiores, el universo se encontraría completamente ionizado. Además, la materia se hallaría a densidades más altas, puesto que la densidad de materia no relativista[56] varía como el inverso del volumen propio, es decir, como el inverso del factor de escala al cubo. Dicho de otra manera, el producto de la densidad por el cubo del factor de escala es proporcional a la masa, que permanece constante en el supuesto de que no se crea ni destruye. La igualdad de masas entre el instante de tiempo actual y un instante de tiempo t permite obtener

$$\rho_m = \rho_{m0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = \rho_{m0}(1+z)^3, \tag{1.30}$$

donde ρ_m y ρ_{m0} son las densidades de energía en reposo cuando el universo tenía un factor de escala a, y en el instante actual, respectivamente. Luego la densidad de materia en el instante de la combinación sería al menos varios miles de millones de veces superior a la actual (aunque sin embargo el resultado del ejercicio 1.13 indica que la densidad es tres órdenes de magnitud menor que el mejor vacío que se puede obtener actualmente en el laboratorio).

En cambio, de la ley de Stefan-Boltzmann (1.23) y de (1.24) tenemos

$$\rho_\gamma = \frac{4\sigma}{c}T_0^4(1+z)^4. \tag{1.31}$$

Es decir: la densidad de energía no relativista y la densidad de energía de los fotones que generará la radiación de fondo no evolucionan de la misma manera. Para un desplazamiento al rojo suficientemente grande las etapas iniciales del universo estarán dominadas energéticamente por los fotones mientras que luego, a medida que el universo se expanda, el dominio energético corresponderá a la materia no relativista. Del cociente entre (1.30) y (1.31) se obtiene,

$$\frac{\rho_\gamma}{\rho_m} = \frac{4\sigma T_0^4}{c\rho_{m0}}(1+z), \tag{1.32}$$

[56] Lo cual incluye la materia oscura, puesto que se supone que es en su mayor parte no relativista.

expresión que igualada a la unidad proporciona el desplazamiento al rojo a partir del cual el universo estaba dominado por los fotones. De los valores de la función de Schechter ya utilizados en el apartado de la paradoja de Olbers para la densidad media, de la luminosidad media de galaxias y admitiendo un cociente masa-luminosidad de 300 h (1.6.2) para tener en cuenta la masa oscura, que es mayoritariamente no relativista, se obtiene que **el momento en el cual ambas densidades de energía eran equivalentes corresponde a $z\approx3000$.** Para determinar el desplazamiento al rojo en que la radiación domina sobre la materia no relativista, habría que tener en cuenta otras especies relativistas, como los neutrinos, en la densidad de energía que figura en el numerador de (1.32). Sin embargo, la aproximación efectuada es bastante acertada. Incluso a estos desplazamientos al rojo la densidad de masa en reposo es dos órdenes de magnitud menor que la que se obtiene en el mejor vacío que se puede conseguir en un laboratorio.

En resumen, si se acepta la expansión del universo y que es posible extrapolar hacia atrás en el tiempo hasta desplazamientos al rojo suficientemente elevados, se concluye que el universo temprano se caracteriza por unas condiciones de temperatura muy elevadas en las cuales la materia y la radiación se encontraban en equilibrio termodinámico. De la misma manera que la expansión no puede ser explicada satisfactoriamente por ninguna teoría alternativa, no es posible explicar de manera satisfactoria la existencia de la radiación de fondo y sus características (espectro de cuerpo negro y alta isotropía) sin suponer la existencia de estas etapas iniciales a alta temperatura.

El descubrimiento de la radiación cósmica de fondo es de importancia capital para la cosmología: dio credibilidad al modelo de la Gran Explosión frente al entonces predominante modelo de Hoyle del estado estacionario. Como ya se ha comentado anteriormente (1.5.10), los primeros valores de H_0 (alrededor de 500) proporcionaban una edad del universo ridículamente pequeña, menor que la edad de la Tierra, que estaba en cambio sólidamente datada mediante desintegraciones de elementos radiactivos. Por este motivo, el modelo de la Gran Explosión no era creíble. A medida que sucesivas observaciones a otras longitudes de onda mostraban que el espectro de la llamada radiación cósmica de fondo se ajustaba muy bien a un cuerpo negro, el modelo del estado estacionario, incapaz de explicar de forma natural dicha radiación, fue perdiendo partidarios.

1.8 Las abundancias de elementos ligeros

Los primeros trabajos acerca de las abundancias de los elementos ligeros y su producción primordial en el marco de la Gran Explosión fueron publicados por Alpher, Bethe y Gamow en 1948. En dicho artículo, aparecido en el número de abril

de *The Physical Review*, y con su peculiar sentido del humor, a Gamow no le pareció justo para el alfabeto griego publicar los resultados de su trabajo solamente con Alpher, por lo que incluyó el nombre de Bethe *(in absentia)* en el artículo, entre Alpher (primer autor) y él. Dicha publicación fue conocida como el artículo alfabético o «αβγ». Con posterioridad, y cuando la nucleosíntesis primordial tropezó con dificultades, corrió el rumor (que vistos los antecedentes posiblemente partiera del propio Gamow) de que Bethe consideró seriamente cambiar su nombre por el de Zacarías, cuya inicial es la última letra del alfabeto.

La nucleosíntesis primordial fue reintroducida con éxito en 1966 por Peebles y proseguida, en los años que siguieron, por Fowler, Hoyle y Wagoner.

1.8.1 Determinación de abundancias

Dentro de las características observables más importantes de nuestro universo está su composición. Ya se ha abordado la posible composición de la materia oscura, así como el origen del fondo cósmico de radiación. Procede ahora estudiar la composición de la materia luminosa o bariónica. El tipo de elementos que componen las galaxias y el medio intergaláctico y sus abundancias relativas pueden proporcionar indicaciones muy valiosas acerca de su origen y, por consiguiente, de las propiedades del universo cuando estos elementos se formaron, es decir: de la evolución del universo. La composición química de los distintos constituyentes del universo puede detectarse, entre otros métodos, a partir de:

- Las líneas de emisión de las nubes de gas ionizado.
- Las líneas de absorción en los espectros de galaxias y cuásares causadas por nubes de gas frío interpuestas en la línea de visión.
- Las líneas de absorción en estrellas.

La abundancia de un elemento se deduce a partir de un número limitado de líneas del elemento correspondientes a uno o varios estados de ionización, si se supone una temperatura o si se deduce a partir de cocientes de líneas especialmente sensibles a la misma.

1.8.2 Las abundancias observadas

El descubrimiento de la fusión nuclear y su aplicación al Sol permitió explicar el origen de la energía que radian las estrellas, así como la formación de una parte de los elementos químicos observados. Sin embargo, aunque los procesos de nucleosíntesis estelar combinados con las reacciones de espalación de núclidos por rayos cósmicos y la captura de neutrones permiten explicar de manera cuantitativa las abundancias de los elementos con pesos atómicos superiores a 8, resultó pronto evidente que las abundancias de elementos de pesos atómicos inferiores a 9, los llamados «elementos ligeros», no concordaban con las predicciones.

Las reacciones nucleares tienen lugar mediante sucesivas fusiones de dos núcleos en una serie de cadenas de reacciones que, a partir del elemento más simple, producen elementos progresivamente más y más pesados. Estas cadenas de reacciones permiten calcular las abundancias relativas de los distintos elementos producidos en función del tiempo, de la densidad y de la temperatura. Por otro lado, si las estrellas son lo bastante masivas, entonces una parte de los elementos sintetizados revierte al medio interestelar, y la siguiente generación de estrellas parte de un contenido inicial en metales[57] distinto de cero. En este caso cabría esperar que las estrellas más viejas, como las del halo de nuestra Galaxia, tuvieran únicamente los metales que hubieran podido sintetizar a lo largo de su vida y que las sucesivas generaciones de estrellas fueran más y más metálicas. Además también debería ser posible hallar gas primordial, que no hubiera pasado por los hornos estelares, y que estuviera compuesto únicamente de hidrógeno, el elemento más simple del universo.

Pero las observaciones ponen de manifiesto que, si bien las abundancias de la mayor parte de los elementos son menores en estrellas viejas o en regiones de gas ionizado de baja metalicidad[58], las abundancias de ^{4}He y ^{7}Li alcanzan una meseta (figura 1.26), es decir, llega un momento en el que ya no decrecen. Este hecho parece indicar que incluso las estrellas más viejas se formaron a partir de un material rico en estos elementos, y que no existe en el universo gas compuesto únicamente de hidrógeno. Por otro lado, el valor de esta meseta no depende de la posición en el universo, por lo que el proceso de producción de estos elementos ha de haber tenido lugar en todo el universo de forma homogénea. Pero estos elementos no pueden haber sido sintetizados en interiores estelares, dado que en ese caso su producción habría venido acompañada de la de otros elementos más pesados como por ejemplo el oxígeno. No se conoce un mecanismo por el que una supuesta primera generación de estrellas, ahora desaparecida, solamente hubiera producido elementos ligeros sin generar también algunas cantidades de elementos más pesados. La espalación por rayos cósmicos de elementos más pesados durante la permanencia de esos materiales en el medio interestelar entre distintas generaciones de estrellas, tampoco explica las abundancias observadas. La discrepancia entre las abundancias predichas por nucleosíntesis estelar más espalación y las observadas es considerable. Puede estimarse fácilmente que el helio que una galaxia media puede producir a lo largo de diez Ga, suponiendo que toda la energía del proceso, que es de 6×10^{14}

[57] En astrofísica se designa como «metal» cualquier elemento más pesado que el helio.

[58] Definida por la razón de la suma de todos los elementos más pesados que el helio con respecto al hidrógeno.

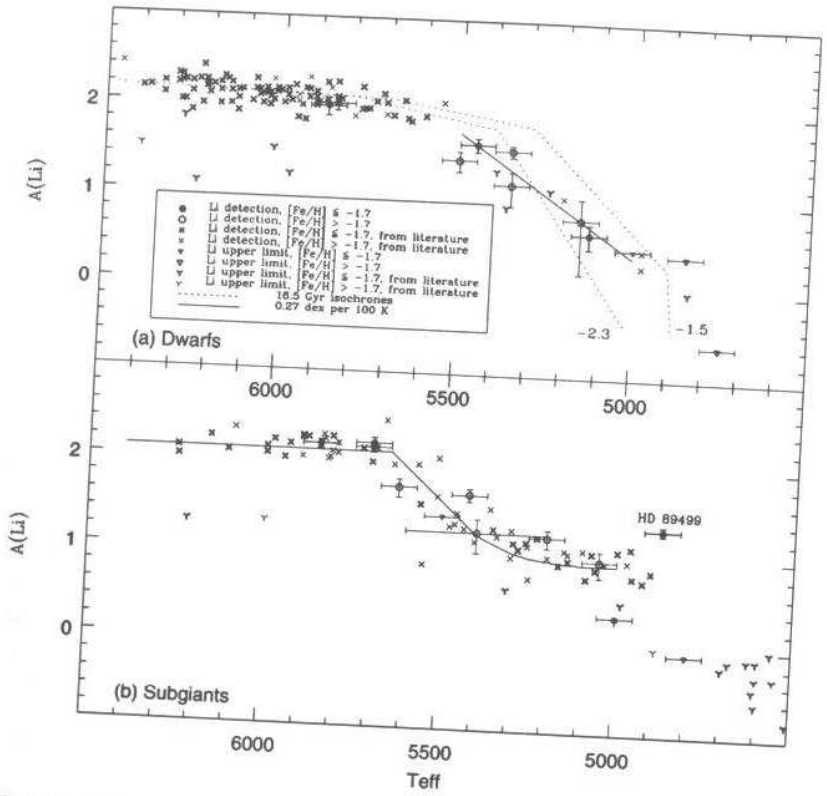


Figura 1.26 Representación de la abundancia de litio $A(\mathrm{Li})$ frente a la temperatura efectiva T_{eff} de la estrella, donde $A(\mathrm{Li})=12+\mathrm{Log}[N(\mathrm{Li})/N(\mathrm{H})]$. El Li es destruido con la temperatura, por lo que las estrellas con envolturas convectivas significativas ($T_{\mathrm{eff}}<5900$ K) transportan Li de la envoltura a zonas más internas y calientes donde es destruido. La meseta o *plateau* de Spite, como se denomina en el caso del Li, se encuentra, por tanto, en $A(\mathrm{Li})\approx 2.1$ en estrellas de baja metalicidad y hacia $T_{\mathrm{eff}}>5900$ K. Tomado de Ryan y Deliyannis 1998.
Reproducido con permiso de la American Astronomical Society.

J por cada kg de helio producido, se invierta en luminosidad, supuesta ésta constante a lo largo de toda la vida de la galaxia, es del orden del 3% en masa, mucho menor que el valor observado del 24% (ejercicio 1.14).

Puesto que las abundancias de elementos ligeros no pueden ser explicadas por nucleosíntesis estelar ni por mecanismos de espalación, cabe concluir que estos elementos son de origen primordial, es decir: han sido producidos en el universo antes de la formación de las primeras estrellas. Dado que si aceptamos el principio de equivalencia las cadenas de nucleosíntesis primordial deberían ser similares a las de la nucleosíntesis estelar, la producción primordial de elementos ligeros implica:

- Un universo temprano a temperaturas mucho más altas que las actuales para que puedan tener lugar los fenómenos de fusión nuclear, que hoy día solamente se producen en interiores estelares.
- Algún proceso que interrumpa las cadenas de nucleosíntesis antes de que éstas lleguen a formar elementos más pesados.

De ambas condiciones se encarga la expansión del universo. En el apartado anterior se razonó que la producción de la radiación de fondo cósmico implicaba un universo temprano con temperaturas más altas que las actuales, puesto que la expansión reducía la temperatura. De ahí que a veces se hable de una Gran Explosión «caliente»[59]. De hecho, (1.25) implica temperaturas mayores que las necesarias para producir nucleosíntesis. Es preciso que el universo se enfríe más. Sin embargo, la nucleosíntesis se detendrá en los elementos ligeros debido a la baja densidad del universo (ejercicio 1.15). Para comprender mejor estas afirmaciones, es preciso revisar las reacciones de producción de elementos y las condiciones reinantes en el universo en aquel momento.

Esencialmente, la existencia de un conjunto de cadenas de producción de elementos cada vez más pesados, donde los productos de una reacción son los elementos de partida de la siguiente implica que:

1. Las abundancias de los elementos de partida condicionan las abundancias finales de los elementos resultantes.
2. La velocidad de reacción total en el proceso de obtención de un núcleo dado vendrá dada por la menor velocidad de reacción de todas las reacciones implicadas en la producción de dicho núcleo.
3. Las abundancias relativas de los elementos están determinadas por las velocidades de las distintas reacciones de producción, que dependen de la temperatura.

El elemento de partida es el deuterio. Una versión muy simplificada de las cadenas de producción posibles, análoga a los procesos de nucleosíntesis estelar por cadenas *p-p*, es la siguiente[60]:

$$p + n \leftrightarrow {}^2\mathrm{H} + \gamma \tag{1.33}$$

$${}^2\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} \leftrightarrow {}^3\mathrm{He} + n \quad \text{o bien} \quad {}^2\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} \leftrightarrow {}^3\mathrm{H} + p \tag{1.34}$$

[59] Del inglés *Hot Big Bang*.

[60] Los fotones generados en los procesos de nucleosíntesis no se encuentran en equilibrio térmico. Como ya se ha descrito en (1.7.3) la termalización de los fotones se produce mediante la radiación de frenado.

$$^3He + ^2H \leftrightarrow ^4He + p \quad \text{o bien} \quad ^3H + ^2H \leftrightarrow ^4He + n \tag{1.35}$$

$$^4He + ^3He \leftrightarrow ^7Be + \gamma \quad \text{o bien} \quad ^4He + ^3H \leftrightarrow ^7Li + \gamma \tag{1.36}$$

$$^7Be + \gamma \leftrightarrow ^7Li + p. \tag{1.37}$$

La primera reacción (1.33) indica que **no podrá producirse nucleosíntesis hasta que la temperatura de los fotones haya bajado lo suficiente como para que el proceso de fotodesintegración del deuterio deje de ser eficaz**. Por otro lado, la nucleosíntesis se interrumpirá cuando las temperaturas no sean suficientemente elevadas. Por tanto, la nucleosíntesis primordial tiene lugar en una «ventana» de temperaturas o, equivalentemente, de tiempos, a través de la dependencia del factor de escala con el tiempo.

La cuarta reacción (1.36) permite evitar que la cadena se interrumpa debido a la carencia de elementos estables con número atómico 5. Gamow (1952) suponía que todos los elementos existentes tenían un origen primordial, sin embargo no consideraba que la reacción (1.36) fuese significativa, por lo que no podía explicar las abundancias de elementos más pesados. Con el sentido del humor que ya se ha visto que lo caracterizaba, Gamow replicaba a sus detractores que la nucleosíntesis primordial era un éxito completo dado que era capaz de explicar el 99% de la materia conocida del universo. En la actualidad se sabe que la reacción (1.36) es significativa, aunque la reacción del ^{7}Li con protones para dar dos núcleos de ^{4}He, hace que la abundancia resultante de ^{7}Li sea muy baja. Puesto que la vida media de elementos con número atómico 8 es demasiado pequeña como para representar un paso intermedio eficiente hacia elementos más pesados, y dado que la abundancia de ^{7}Li es muy baja, puede considerarse que **la cadena de producción de elementos debido a una nucleosíntesis primordial se interrumpe esencialmente aquí.** Las abundancias primordiales de elementos más pesados, como ^{9}Be, ^{10}B y ^{11}B, son mucho menores. En las estrellas puede saltarse el número atómico inestable 8 mediante reacciones triple-α, en que dos núcleos de ^{4}He producen el elemento inestable ^{8}Be que puede reaccionar con otro ^{4}He para dar ^{12}C. Sin embargo, la vida media del ^{8}Be es de 2.6×10^{-16} s, por lo que la colisión con otro núcleo de ^{4}He antes de su desintegración solamente es significativa en estrellas debido a que su densidad es mucho mayor que la del universo durante la nucleosíntesis primordial (ejercicio 1.15) [61].

Dado que estos elementos ligeros, de número atómico inferior a ocho, pueden tanto producirse como destruirse en interiores estelares, es necesario tener ambos efectos en cuenta en la estimación de sus abundancias primordiales a partir de las observadas.

[61] El proceso viene favorecido por una resonancia en la que el ^{12}C tiene un nivel de energía un 4% mayor que la resultante de las energías combinadas de ^{8}Be y ^{4}He.

1.8.3 Deuterio

Casi sólo se destruye en las estrellas, aunque algunos autores indican que podría ser producido en las atmósferas de estrellas activas en una cantidad indeterminada (Mullan y Linsky, 1999). Se mide principalmente a partir de las líneas de absorción de la serie de Lyman en espectros estelares o de cuásares. Las medidas obtenidas a partir de cuásares distantes representarán mejor la abundancia primordial. Medidas recientes obtenidas a partir de líneas de absorción observadas en los espectros de cuásares y correspondientes a absorbentes a alto z situados en la línea de visión del cuásar proporcionan el siguiente valor (Burles, Nollet y Turner, 2001):

$$^2H/H = 3.0 \pm 0.2 \times 10^{-5}. \tag{1.38}$$

Mientras que las medidas obtenidas a partir del medio interestelar local utilizando el telescopio espacial *Hubble* (Linsky 1998) señalan:

$$^2H/H = 1.5 \pm 0.1 \times 10^{-5}. \tag{1.39}$$

La diferencia se supone causada por distintos procesos de destrucción del deuterio que podrían explicar hasta un factor tres de diferencia (Tosi *et al.*, 1998). Sin embargo, la diferencia entre ambos valores es demasiado pequeña teniendo en cuenta que se espera una destrucción mayor del deuterio debida a la gran formación estelar que tiene lugar a z~1-2. De hecho, algunos autores (Webb *et al.*, 1997, y Tytler *et al.*, 2000) hallan abundancias hasta diez veces mayores en líneas de absorción de espectros de cuásares.

1.8.4 Helio

El ^{3}He se produce y se destruye en interiores estelares en proporciones que dependen mucho del modelo. Dada la dificultad de estimar su abundancia primordial a partir de las observaciones, no se considera de utilidad cosmológica.

La abundancia de ^{4}He se obtiene a partir de líneas de emisión en regiones extragalácticas de gas ionizado y en galaxias compactas azules de baja metalicidad. Dado que también se produce en interiores estelares, es preciso corregir la abundancia observada para obtener la primordial:

$$Y = Y_p + \Delta Y, \tag{1.40}$$

donde Y_p es la abundancia primordial de ^{4}He con respecto al hidrógeno y ΔY es la producción en estrellas. Ahora bien, usualmente se admite,

$$\Delta Y \propto Z, \tag{1.41}$$

donde Z es la metalicidad, y la constante de proporcionalidad, que depende del modelo, es típicamente, del orden de 3. Como $Z \leq 0.02$ entonces $\Delta Y \leq 0.06$, consistente con la estimación *grosso modo* del 3 % para el helio producido en una galaxia media a lo largo de su vida.

Peimbert, Peimbert y Ruiz (2000) obtienen, a partir de regiones HII de la Nube Menor de Magallanes,

$$Y_p = 0.241 \pm 0.002. \tag{1.42}$$

1.8.5 Litio

El ^{6}Li es más frágil que el ^{7}Li, por lo que su utilidad cosmológica radica, esencialmente, como indicador de que el ^{7}Li está prácticamente intacto. Paradójicamente, aunque el litio es termolábil y por ende fácilmente destruido en estrellas, no se observa apenas destrucción de dicho elemento.

Las medidas obtenidas a partir de las abundancias de estrellas del halo pobres en metales proporcionan (Vangioni-Flam, Coc y Cassé, 2000)

$$\mathrm{Li/H} = 1.8 \pm 0.4 \times 10^{-10}. \tag{1.43}$$

1.8.6 Berilio y boro

El ^{9}Be, ^{10}B y ^{11}B se producen mayoritariamente por espalación del C y O producido en las etapas iniciales de la vida de la Galaxia. De hecho, las abundancias de estos elementos observadas en estrellas del halo extremadamente pobres en metales, que son del orden de 10^{-13}, son muy superiores a las predichas por nucleosíntesis primordial.

1.8.7 La abundancia de bariones

Como indica la primera reacción de la cadena (1.33), responsable de la producción de deuterio, las abundancias relativas de los elementos producidos dependen no sólo de la cantidad inicial de protones y neutrones, sino también de la cantidad de fotones (figura 1.27). En efecto, aunque la temperatura de los fotones sea más baja que la necesaria para fotodisociar el deuterio, si su número es muy elevado, la distribución de cuerpo negro garantizará la existencia de una cantidad considerable de fotones con la energía suficiente como para evitar la formación de deuterio. De este modo se retrasa el inicio de la cadena de reacciones de nucleosíntesis en una etapa del universo en que la producción de neutrones se ha detenido. Entonces los neutrones solamente se desintegran, al ser una partícula inestable cuando se encuentra solitaria. La reducción del número de neutrones reduce asimismo la producción del número de núcleos de He y sus sucesores. Algunos detalles de este proceso se tratarán en el capítulo sexto, dedicado al universo temprano.

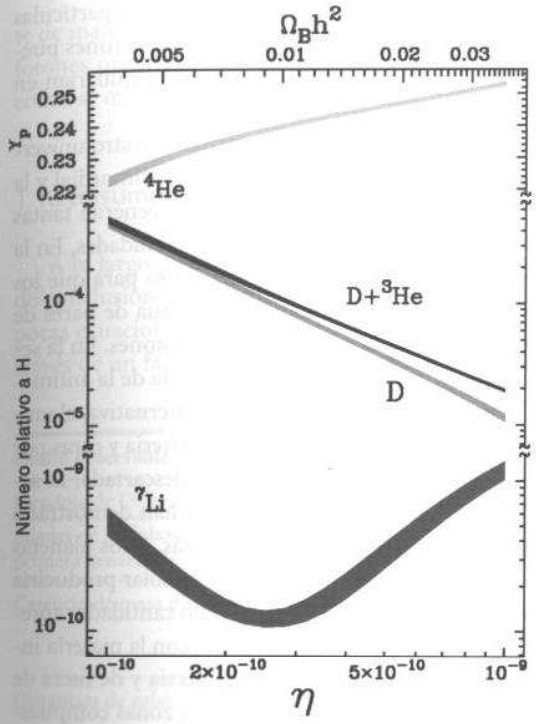


Figura 1.27 Predicción de abundancias de elementos ligeros frente a la razón del número de bariones con respecto al número de fotones η, en franjas del 95% de fiabilidad de anchura. Tomado de Burles, Nollet y Turner, 2001. Reproducido con permiso de la American Astronomical Society.

Por consiguiente, **las abundancias de elementos ligeros producidas mediante nucleosíntesis primordial dependerán del cociente η entre el número de bariones y el de fotones.** A partir de los valores obtenidos para los distintos elementos ligeros, y de los modelos, tenemos que (figura 1.27):

$$\eta = \frac{\#\text{Bariones}}{\#\text{Fotones}} \approx 5.5 \pm 0.5\, 10^{-10}. \tag{1.44}$$

La concordancia de las abundancias de los distintos elementos indica que el escenario propuesto para la nucleosíntesis primordial es esencialmente correcto. Cualquier modelo cosmológico ha de ser capaz de explicar las abundancias observadas de los elementos que componen nuestro universo.

1.9 La asimetría materia-antimateria

Cada partícula de la naturaleza, electrón, protón, neutrón, neutrino, etc., cuenta con su correspondiente antipartícula de la misma masa. Puestas en contacto,

partículas y antipartículas se aniquilan mutuamente para producir otras partículas y antipartículas, o bien fotones. Los antineutrones, antiprotones y positrones pueden dar lugar a átomos de antimateria[62] que por consiguiente se aniquilarían en contacto con átomos de materia[63].

Cuando la temperatura es suficientemente alta, como ocurre en nuestro universo en sus etapas más tempranas, tal como indican la nucleosíntesis primordial y la radiación cósmica de fondo, los procesos de creación de partículas generan tantas partículas como antipartículas. En este caso podrían darse dos posibilidades. En la primera, cuando la temperatura haya descendido lo suficiente como para que los procesos de creación de pares no tengan lugar, la aniquilación mutua de pares de partículas originaría un universo compuesto casi únicamente por fotones. En la segunda, procesos magnetohidrodinámicos podrían segregar la materia de la antimateria antes de su completa aniquilación mutua. Según esta última alternativa, el universo se compondría de diversas regiones, unas constituidas por materia y otras por antimateria. Aunque la primera posibilidad queda lógicamente descartada, la segunda tampoco parece verosímil. En efecto, las sondas espaciales han demostrado que el Sistema Solar está compuesto solamente de materia. Además, si los planetas estuvieran compuestos de antimateria su interacción con el viento solar produciría rayos gamma muy energéticos. Por añadidura, no se han observado cantidades apreciables de antimateria (que no puedan explicarse por interacción con la materia interestelar) en los rayos cósmicos que, procedentes de nuestra Galaxia y de fuera de ella, llegan a la Tierra. Finalmente, si en nuestra Galaxia existieran zonas compuestas de materia y zonas compuestas de antimateria, en las fronteras de los dominios se producirían fotones muy energéticos, en el rango de energías gamma, que no han sido observados. Lo mismo podría decirse si galaxias de un mismo cúmulo[64], o si cúmulos de un mismo supercúmulo, estuvieran compuestos unos de materia y otros de antimateria. En conclusión, las observaciones indican que en la actualidad el universo se compone mayoritariamente de la convencionalmente denominada «materia». ¿Dónde está, entonces, la antimateria?

De los indicios observados cabe concluir que de alguna manera tuvo lugar una asimetría en el universo primordial: se generó una cantidad ligeramente superior de materia que de antimateria. La posterior aniquilación mutua dejó un remanente de materia, la que constituye el universo actual, junto con una gran cantidad de fotones originados por dicha mutua aniquilación, así como por otros procesos, como se muestra en el apartado 1.7.3.

[62] Por ejemplo, un antiátomo de hidrógeno estaría formado por un antiprotón de carga negativa y un positrón de carga positiva que orbita a su alrededor.

[63] La designación materia o antimateria es arbitraria: denominamos materia a la que vemos y manipulamos habitualmente. Si existieran seres compuestos de antimateria asegurarían que nosotros somos los que estamos compuestos de antimateria y no ellos.

[64] Las galaxias que componen un cúmulo se mueven a través del medio intracumular. Si este medio intracumular estuviera compuesto de materia y antimateria y las galaxias del mismo cúmulo estuvieran unas compuestas de materia y otras de antimateria, deberían observarse rayos gamma procedentes de la aniquilación mutua entre partículas del medio intracumular y las galaxias que lo componen.

1.10 Resumen

A lo largo de este capítulo, y basándonos en hechos observables, se han inferido conclusiones muy importantes acerca de nuestro universo con la ayuda de unas pocas ecuaciones básicas de la física y la suposición de la expansión del universo a través de un factor de escala. La siguiente tabla resume dichas conclusiones:

Hecho observable	Conclusión	Hipótesis
Paradoja de Olbers	Edad finita del universo	Edad del universo comparable a la de sus constituyentes
Edades de la Galaxia y de la primera generación de estrellas	Edad del universo mayor que 14.3±1.0 Ga	
Carencia de masa dinámica	La mayor parte de la masa del universo es no luminosa, mayoritariamente no bariónica y «fría»	Validez de la dinámica de Newton
Distancias de galaxias	Homogeneidad en la distribución local de masas a escalas de 150 Mpc Isotropía en la distribución local de masas a escalas de varios grados	La materia oscura sigue a la luminosa
Desplazamiento al rojo	Expansión del universo con H_0~65 km/s/Mpc	Factor de escala
Fondo cósmico de radiación altamente isótropo y con espectro de cuerpo negro	Universo primordial a alta temperatura. Materia y radiación en equilibrio termodinámico Isotropía del universo en la combinación	
Abundancias de elementos ligeros	Universo primordial a alta temperatura. Nucleosíntesis primordial	
SNIa a distancias cosmológicas	Expansión acelerada en la actualidad	
Ausencia de fenómenos asociados a aniquilaciones par-antipar	Universo compuesto solamente de materia	Asimetría primordial materia-antimateria a favor de la primera

Tabla 1.6 Resumen de los hechos observables expuestos a lo largo del capítulo y de las conclusiones obtenidas. La hipótesis más fuerte realizada corresponde a la existencia del factor de escala. Se destacan en negrita los llamados tres pilares del modelo estándar: desplazamiento al rojo, radiación cósmica de fondo y abundancias de elementos ligeros.

En suma, los distintos hechos y su interpretación concuerdan cualitativamente entre sí y apuntan a un universo con un origen definido en el tiempo (paradoja de Olbers y edad de la Galaxia), y con etapas iniciales a mucha mayor temperatura y densidad que las que vemos hoy día (radiación cósmica de fondo y abundancias de elementos ligeros). Nótese que la expansión del universo es una interpretación del desplazamiento al rojo, siendo propiamente este último el hecho observable.

Además, la existencia del factor de escala es consistente con una edad limitada para nuestro universo y sus constituyentes, si se admite que el factor de escala puede anularse, en el instante inicial de tiempo cosmológico, en lo que se ha denominado la Gran Explosión.

Cualquier modelo cosmológico que se postule, para considerarlo válido, debe ser capaz de explicar con éxito todos los hechos observables revisados en este capítulo. Debido a su valor para rechazar modelos cosmológicos alternativos, **el desplazamiento al rojo, la radiación cósmica de fondo y las abundancias de elementos ligeros se acostumbran a denominar los tres pilares del modelo estándar.**

1.11 Ejercicios

1.1 ¿Hasta qué distancia deberían existir galaxias para que el cielo fuera tan brillante como la superficie del Sol? (Ayuda: utilizar la función de Schechter y despreciar su evolución.)

1.2 ¿Cuál es la edad máxima de una galaxia si el fondo de luz extragaláctico óptico que se mide es de 2×10^{-4} erg/cm^2/s?

1.3 Demostrar que la mutua atracción gravitatoria entre galaxias no es capaz de explicar velocidades mayores que $\sim10^{-3}c$.

1.4 ¿Cuál es la separación entre las líneas de emisión del [OII] λ3727Å y Hα del espectro recibido de un objeto a $z = 0.1$?

1.5 Demostrar que, si la expansión del universo también ocurriera a escala local, no podríamos detectar el desplazamiento al rojo del espectro de una galaxia. (Ayuda: utilizar el modelo de Bohr y suponer que la línea observada es de recombinación.)

1.6 Determinar cuál es la aceleración en las partes externas del disco de una galaxia espiral como la nuestra. Demostrar cualitativamente que la teoría MOND permite explicar la constancia de la velocidad del material del disco a esas distancias radiales.

1.7 Demostrar cualitativamente que el espectro de la radiación cósmica de fondo no puede estar producido por galaxias u otros objetos tanto si cada uno de ellos emite como un cuerpo negro como si emite una línea. Considerar una densidad de galaxias constante.

1.8 Determinar cuál sería la densidad *local* de galaxias que, emitiendo como cuerpos negros a 2.73 K, produciría una isotropía como la observada en la radiación cósmica de fondo. Comparar con la densidad local que se infiere del ajuste a una función de Schechter.

1.9 Demostrar que el desplazamiento al rojo no altera la forma funcional de la ley de Planck (1.21), sino que solamente cambia la temperatura del cuerpo negro según un factor $(1+z)$. (Ayuda: el volumen propio varía como $[1+z]^{-3}$.)

1.10 Demostrar que el número de fotones del fondo cósmico de radiación que recibe una antena no depende del tiempo cosmológico.

1.11 ¿Cuál es el desplazamiento al rojo a partir del cual el hidrógeno empieza a ionizarse? (Ayuda: considerar que el hidrógeno, en su equilibrio con la radiación, puede encontrarse en cualquier estado de excitación.)

1.12 ¿Cuál es el desplazamiento al rojo a partir del cual el universo está energéticamente dominado por la radiación de fondo? (Ayuda: utilizar la función de Schechter y admitir un cociente masa/luminosidad de $300h$ para tener en cuenta la contribución de la materia oscura.)

1.13 ¿Cuál es la densidad aproximada de átomos de hidrógeno en el momento de la combinación? (Ayuda: utilizar la función de Schechter y admitir un cociente masa/luminosidad de $300h$ para tener en cuenta la contribución de la materia oscura.)

1.14 Calcular el porcentaje de helio formado en las estrellas de la Galaxia suponiendo que ésta tiene una edad de 10^{10} años y que su luminosidad ($3.2\times10^{10}\ L_\odot$) ha permanecido constante a lo largo de toda su vida. (Ayuda: la fusión de hidrógeno para producir un kilogramo de helio libera 6×10^{14} J, suponer un cociente masa/luminosidad de 3 y que toda la luminosidad procede de la producción de He.)

1.15 Estimar la densidad del universo durante la nucleosíntesis y comparar con la densidad del Sol. (Ayuda: utilizar la función de Schechter y emplear un cociente masa/luminosidad de $300h$ para tener en cuenta la contribución de la materia oscura. El desplazamiento al rojo al cual empieza la nucleosíntesis es $\sim3\times10^8$.)

1.16 ¿Por qué en los ejercicios 1.12, 1.13 y 1.15 se emplea una razón masa/luminosidad de $300h$ y en el ejercicio 1.14 se toma dicho cociente como 3? Si se quiere estimar la masa total de una galaxia, ¿qué razón masa/luminosidad hay que usar, $300h$, 10-20 ó 3? ¿Por qué?

1.12 Bibliografía

1.12.1 Referencias

Aaronson, M.; Huchra, J. y Mould, J. (1979), *ApJ* 229, 1.

Aaronson, M. y Mould, J. R. (1983), *ApJ* 265, 1.

Aaronson, M. *et al.* (1986), *ApJ* 302, 536.
Adams, W. S. (1940), *PASP* 52, 345.
Ahn, M. H. *et al.* (98 coautores) (2003), *Phys.Rev.Lett.* 90, 1801.
Alcock, C. *et al.* (23 coautores) (2001), *ApJSS* 136, 439.
Alpher, R. A.; Bethe, H. A. y Gamow, G. (1948), *Phys.Rev.* 73, 80.
Alpher, R. A. y Herman, R. (1949), *Phys.Rev.* 75, 1089.
Altavilla, G. *et al.* (10 coautores) (2004), *MNRAS* 349, 1344.
Baade, W. (1954), *Trans.IAU* 8, 397.
Babcock, H. W. (1939), *Lick Obs. Bull.* 19(498), 41.
Battaner, E. *et al.* (1992), *Nat.* 360, 652.
Battaner, E. y Florido, E. (1995), *MNRAS* 277, 1129.
Bernstein, R. A.; Freedman, W. L. y Madore, B. F. (2002), *ApJ* 571, 107.
Boesgaard *et al.* (1998), *ApJ* 493, 206.
Bosma, A. (1981a), *AJ* 86, 1791.
Bosma, A. (1981b), *AJ* 86, 1825.
Branch, D. (1998), *ARA&A* 36, 17.
Branch, D. y Tammann, G. (1992), *ARA&A* 30, 359.
Burles S.; Nollet, K. M. y Turner, M. S. (2001), *ApJ* 552, L1.
Carlberg, R. G. *et al.* (1996), *ApJ* 462, 32.
Cayrel *et al.* (2001), *Nature* 409, 691.
Ciardullo, R.; Jacoby, G. H. y Ford, H. C. (1989), *ApJ* 344, 715.
Colless, M. *et al.* (2001), *MNRAS* 328, 1039.
Conselice, C. J. *et al.* (5 coautores) (2005), *ApJ* 628, 160.
Cowsik, R. y McClelland, J. (1972), *Phys.Rev.Lett.* 29, 669.
Dicke, R.; Peebles, J.; Roll, P. y Wilkinson, D. (1965), *ApJ* 142, 414.
Doroshkevich, A. G. y Novikov, I. D. (1964), *Dokl.Akad.Nauk. USSR* 154, 809.
Dressler *et al.* (1987), *ApJ* 313, 42.
Eguchi *et al.* (97 coautores) (2003), *Phys.Rev.Lett.* 90, 021802.
Fassnacht *et al.* (1999), *ApJ* 527, 498.
Fassnacht *et al.* (2002), *ApJ*, 581, 823.
Felten, J. E. (1985), *Comments Astrophys.* 11, 53.
Freedman *et al.* (2001), *ApJ* 553, 47.
Fukuda *et al.* (120 coautores) (1998), *Phys.Rev.Lett.* 81, 1562.
Fukuda *et al.* (117 coautores) (2001), *Phys.Rev.Lett.* 86, 5656.
Gamow, G. (1952), *La Creación del Universo*, Espasa-Calpe, 1963.
Goobar, A. *et al.* (2006) *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 6, 19.
Gratton, R. G. *et al.* (2003), *A&A* 408, 529.
Halley, E. (1720), *Phil.Trans.Roy.Soc.Lond.* 31, 22.
Hannestad, S. (2003), *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 5, 4.
Hill *et al.* (2002), *A&A* 387, 560.
Hogan, C. J.; Kirshner, R. P. y Suntzeff, N. B. (1999), *Scientific American*, January issue.
Hubble, E. (1929), *Proc.Nat.Acad.Sci.* (USA) 15, 168.
Hubble, E. y Humason, M. (1931), *ApJ* 74, 35.

Hubble, E. (1936a), *ApJ* 84, 270.
Hubble (1936b), *Realm of the Nebulae*, Yale University Press, New Haven.
Imbriani, G. *et al.* (29 coautores) (2004), *A&A* 420, 625.
Iye *et al.* (9 coautores) (2006), *Nature* 443, 186.
Izotov, Thuan y Lipovetsky (1997), *ApJS* 108, 1.
Jacoby, G. H. *et al.* (8 coatutores) (1992), *PASP* 104, 599.
Joaquim, F. R. (2003), *Phys.Rev.*D 68, 033019.
Kahn, F. D. y Woltjer, L. (1959), *ApJ* 130, 705.
Kalnajs, A. J. (1987), IAU Symp. 117, 289. Ed. J. Kormendy y G.R. Knapp, Dordrecht: reidel.
Keeton, C. R. y Kochanek, C. S. (1997), *ApJ* 487, 42.
Koopmans, L. V. E. y Fassnacht, C. D. (1999), *ApJ* 521, 513.
Koopmans, L. V. E. *et al.* (2003), *ApJ* 599, 70.
Kundic *et al.* (1997), *ApJ* 482, 75.
Lahav, O.; Yamada, T.; Scharf, C. y Kraan-Korteweg, R. C. (1993), *MNRAS* 262, 711.
Lineweaver, C. H. (2003), *Proceedings of the New Cosmology Summer School*, ed. M. Colless, publicado por World Scientific (astro-ph/0305179).
Maddox, S. J.; Efstathiou, G.; Sutherland, W. J. y Loveday, J. (1990), *MNRAS* 243, 692.
Mauskopf, P. D. *et al.* (2000), *ApJ* 538, 564.
Milgrom, M. (1983), *ApJ* 270, 365.
Mullan y Linsky (1999), *ApJ* 511, 502.
Linsky (1998), *Space Science Reviews* 84, 285.
Nelson, A. H. (1988), *MNRAS* 261, L21.
Neyman, J.; Page, T. y Scott, E. (1961), *AJ* 66, 533.
Olbers, H. W. M. (1826), *Bode Jahrbuch* 110.
Oort, J. H. (1940), *ApJ* 91, 273.
Ostriker, J. P. y Peebles, P. J. E. (1973), *ApJ* 186, 467.
Page, T. (1960), *ApJ* 132, 910.
Parodi, B. R. *et al.* (2000), *ApJ* 540, 634.
Peimbert, M.; Peimbert, A. y Ruiz, M. T. (2000), *ApJ* 541, 688.
Penzias, A. y Wilson, R. (1965), *ApJ* 142, 419.
Perlmutter, S. *et al.* (1999), *ApJ* 517, 565.
Prialnik, D. (2000), *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*, Cambridge University Press.
Refsdal, S. (1964), *MNRAS* 128, 307.
Riess, A. G. *et al.* (1998), *AJ* 116, 1009.
Riess, A. G. *et al.* (2001), *ApJ* 560, 49.
Roberts, M. S. y Whitehurst, R. N. (1975), *ApJ* 201, 237.
Ryan, S. G. y Deliyannis, C. P. (1998), *ApJ* 500, 398.
Ryder, S. D. *et al.* (1998), *MNRAS* 293, 411.
Rubin, Thonnard y Ford (1976), *AJ* 81, 687 y 719.
Salaris, M. y Weiss, A. (2002), *A&A* 388, 492.
Sandage, A. R. (1955), *PASP* 67, 395.
Sandage, A. R. (1958), *ApJ* 127, 513.
Sandage, A. R. (1968), *ApJ* 152, L149.

SANDAGE, A. R. (1988a), *ApJ* 331, 605.
SANDAGE, A. R. (1988b), *ApJ* 331, 583.
SANDAGE, A. R. (1996a), *AJ* 111, 1.
SANDAGE, A. R. (1996b), *AJ* 111, 18.
SANDAGE, A. R. y TAMMANN, G. A. (1975), *ApJ* 197, 265.
SANDAGE, A. R. y TAMMANN, G. A. (1982), *ApJ* 256, 339.
SANDAGE, A. R. y TAMMANN, G. A. (1984), *Nature* 307, 326.
SANDAGE, A. R. y TAMMANN, G. A. (1988), *ApJ* 328, 1.
SANDAGE, A. R. y TAMMANN, G. A. (1990), *ApJ* 365, 1.
SANDAGE, A. R. *et al.* (1992), *ApJ* 401, 7.
SANDAGE, A. y BEDKE, J. (1995), *Atlas of galaxies useful for measuring the cosmological distance scale*, Washington, DC: Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration.
SANDAGE, A. (1957), AAS (discurso con motivo de la concesión del premio Helen Warner).
SCOTT, E. L. (1957), *AJ* 62, 248.
SCHECHTER (1976), *ApJ* 203, 297.
SLIPHER, V. M. (1914), 17.º reunión de la AAS.
SMITH, S. (1936), *ApJ* 83, 23.
SMOOT y SCOTT (1996), *Review of Particle Physics*, BARNETT, R. M. *et al.*, *Phys.Rev.D* 54, 118.
TOSI *et al.* (1998), *ApJ* 498, 226.
TRIPP, R. y BRANCH, D. (1999), *ApJ* 525, 209.
TULLY, R. B. y FISHER, J. R. (1977), *A&A* 54, 661.
TYTLER *et al.* (2000), *astro-ph*/0001318.
VAN DEN BERGH, S. (1961), *AJ* 66, 566.
VAN DEN BERGH, S. (1999), *PASP* 111, 657.
VANGIONI-FLAM *et al.* (2000), *A&A* 360, 15.
VAUCOULEURS, G. DE (1978), *ApJ* 223, 351.
VAUCOULEURS, G. DE y BOLLINGER, G. (1979), *ApJ* 233, 433.
VAUCOULEURS, G. DE (1982), *The Observatory* 102, 178.
VAUCOULEURS, G. DE (1983), *MNRAS* 202, 367.
VAUCOULEURS, G. DE (1993), *ApJ* 415, 10.
VOGT, N. P. y PHILLIPS, A. P. (2002), *Bull.Am.Astron.Soc.* 34, 703.
VON BRAUN, K. *et al.* (2002), *AJ* 124, 2067.
WEBB, J. K. *et al.* (1997), *Nat.* 383, 250.
WOULD, P. A. y KRAAN-KORTEWEG, R. C. y FAIRALL, A. P. (1999), *A&A* 352, 39.
YORK, T. *et al.* (2005), *MNRAS* 357, 124.
ZIEGLER *et al.* (14 coautores) (2002), *ApJ* 564, L69.
ZWICKY, F. (1933), *Helvetica Phys. Acta* 6, 110.

1.12.2 Textos recomendados

CARROLL, B. W. y OSTLIE, D. A. (1996), *An Introduction to Modern Astrophysics*, Addison-Wesley.

LINDER, E. V. (1997), *First Principles of Cosmology*, Addison–Wesley.
NARLIKAR, J. V. (^{3}2002), *Introduction to Cosmology*, Cambridge University Press.

1.12.3 Textos para ampliación de conocimientos

Historia de la cosmología

OVERBYE, D. (1992), *Corazones solitarios en el Cosmos*, Planeta.

Paradoja de Olbers

HARRISON, E. R. (1965), *MNRAS* 131, 1.

Edad del universo

KRAUSS, L. M. y CHABOYER, B. (2003), *Science* 299, 65.

Medidas de distancia

CARROLL, B. W. y OSTLIE, D. A. (1996), *An Introduction to Modern Astrophysics*, Addison-Wesley.
ROWAN-ROBINSON, M. (1985), *The cosmological distance ladder*, W. H. Freeman y Co.

Materia oscura

MILGROM, M. (2002), *Investigación y Ciencia*, octubre.
VAN DEN BERGH, S. (1999), *PASP* 111, 657.

Lentes gravitatorias

NARAYAN, R. (1991), *ApJ* 378, L5.
— y BARTELMANN, M. (1996), *Lectures on Gravitational Lensing*, preprint, astro-ph/9606001.

Radiación cósmica de fondo

LACHIEZE-REY, M. y GUNZIG, E. (1999), *The Cosmological Background Radiation*, Cambridge University Press.

Elementos ligeros

BURLES *et al.* (2001), *ApJL* 352, L1.
VANGIONI-FLAM, E.; COC, A. y CASSÉ, M. (2000), *A&A* 360, 15.

Supernovas tipo Ia

BRANCH, D. (1998), *ARA&A* 36, 17.
FILIPPENKO, A.V. (2001), *PASP* 113, 1441.
HOGAN, C. J. *et al.* (1999) y otros artículos en el número *Scientific American* de enero de ese año.
RIESS, A. G. y TURNER, M. S., *Investigación y Ciencia*, abril de 2004.

1.12.4 Enlaces útiles

Página www de este texto

http://webpages.ull.es/users/jcepano

Generales

Diccionario en línea: http://en.wikipedia.org/ wiki/Main_Page
Buscador de pretirajes de artículos (astro-ph, y otros): http://www.arxiv.org
Página general de cosmología: http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5

Masa del neutrino

http://cupp.oulu.fi/neutrino/

KamLAND

http://kamland.lbl.gov/

Two degree Field

http://www.aao.gov.au/2df/

Capítulo 2 | LA RELATIVIDAD APLICADA AL UNIVERSO

En el capítulo anterior se han expuesto los hechos observables más relevantes sobre nuestro universo y se han proporcionado explicaciones cualitativas a los mismos. Sin embargo, para que se pueda hablar de la cosmología como ciencia, es preciso disponer de un marco teórico que permita explicar cuantitativamente los hechos observados. El marco teórico de referencia de que se dispone en la actualidad es la relatividad general. Esta teoría puede resumirse en una bella ecuación, la ecuación de Einstein, que relaciona la distribución de energía en el espacio-tiempo, de la que la distribución de masas constituye una parte, con la geometría del espacio-tiempo. La distribución de energía viene representada por el tensor energía-momento, mientras que la geometría queda descrita por el tensor métrico o métrica. En los primeros apartados de este capítulo se analizarán estos conceptos y se aplicarán a la cosmología para obtener las ecuaciones que definen la evolución de un universo y proceder seguidamente a analizarlas. Aunque la relatividad general tenga el inconveniente de ser una teoría no-cuántica, lo que implica que no describe adecuadamente el universo para valores cuánticos del factor de escala, es la teoría más conveniente (y elegante) de que se dispone en la actualidad y, a pesar de esta limitación, permite una excelente descripción del universo. Como se verá en el capítulo tercero, debido al amplio refrendo de la relatividad general, las cosmologías alternativas siguen teniendo a la misma como marco de referencia, aunque en algunas de ellas se propongan modificaciones a la ecuación de Einstein de tal manera que ésta constituya un caso particular de una teoría más general. Por tanto, en este capítulo se sentarán las bases elementales de la teoría de relatividad general, como una herramienta que conducirá a las ecuaciones que permiten describir nuestro universo. Para ello, y como paso previo, se proporciona una introducción muy somera al álgebra tensorial, en la que la relatividad general presenta su forma más elegante. No son necesarios conocimientos previos de relatividad general ni de álgebra tensorial. Sólo se pide al lector no familiarizado con estas materias que avance en el texto aunque no entienda plenamente los conceptos, hasta llegar a los ejemplos que, espero, permitirán aclarar tanto los conceptos como la terminología empleada.

2.1 La métrica

2.1.1 Definición

¿Qué es una métrica? Desde un punto de vista geométrico, aunque no formal, la métrica es una ecuación que proporciona la distancia entre dos puntos cualesquiera del espacio-tiempo. De modo más formal, determina las medidas diferenciales de línea, superficie y volumen que permiten calcular, por integración, distancias, áreas y volúmenes en el espacio-tiempo.

Ahora sí, formalmente, una métrica g es una **forma bilineal simétrica** o **tensor covariante de orden dos** simétrico. En el caso que nos ocupa, los espacios vectoriales origen, E, son iguales mientras que la imagen, $\Re$, es el cuerpo conmutativo de los números reales. Es decir: $g(u,v)=k$ donde u,v son vectores de E, o tensores contravariantes de orden uno, $k\in\Re$, y **las métricas son isomorfas con el espacio vectorial de las matrices cuadradas**. En notación tensorial, utilizando el convenio de suma de Einstein por índices repetidos covariantes y contravariantes,

$$g_{\alpha\beta}u^{\alpha}v^{\beta}=k, \tag{2.1}$$

expresión que, haciendo uso del isomorfismo matricial, puede escribirse,

$$\begin{pmatrix} u^0 & u^1 & u^2 & u^3 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{01} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{02} & g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}=k, \tag{2.2}$$

donde el índice 0 indica la coordenada temporal y los 1, 2 y 3 las coordenadas espaciales. En lo sucesivo los índices griegos indicarán coordenadas espacio-temporales y los latinos coordenadas sólo espaciales.

2.1.2 Aplicaciones

La métrica permite definir el **producto escalar de dos vectores** al ser una forma bilineal simétrica. En efecto, diremos que dos vectores u^{α} y v^{β} son ortogonales si y solamente si:

$$g_{\alpha\beta}u^{\alpha}v^{\beta}=0. \tag{2.3}$$

Por tanto, el cuadrado del módulo de un vector u^{α} es:

$$u^2=g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}. \tag{2.4}$$

Entonces, dado que un módulo representa una longitud, la métrica nos proporciona la distancia infinitesimal ds entre dos puntos del espacio-tiempo separados por distancias infinitesimales dx^{α} en un sistema de coordenadas curvilíneas x^{α},

$$ds^2=g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}. \tag{2.5}$$

De este modo, dada una trayectoria cualquiera definida por un conjunto de puntos, es posible obtener la longitud de dicha trayectoria integrando desde el punto inicial hasta el final los elementos ds en que puede descomponerse la trayectoria.

Dado que la métrica es simétrica, siempre existe una base en la cual su matriz adopta forma diagonal. Una variedad diferencial que posea una métrica se dice que es riemanniana.

Dadas las **coordenadas cartesianas ξ^{α} vinculadas a la carta local** y la **base de coordenadas curvilíneas x^{α}**, si las ecuaciones de cambio de base son $\xi^{\alpha}=\xi^{\alpha}(x^{\beta})$, entonces,

$$d\xi^{\alpha}=\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}dx^{\beta}, \tag{2.6}$$

por tanto,

$$ds^2=g_{\alpha\beta}d\xi^{\alpha}d\xi^{\beta}=g_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}}dx^{\mu}dx^{\nu}=g'_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \tag{2.7}$$

proporciona el **cambio de base**.

El elemento de volumen espacio-temporal vendrá dado por la raíz cuadrada del módulo del determinante g de la métrica,

$$dv=\sqrt{|g|}\,dx^0dx^1dx^2dx^3. \tag{2.8}$$

Los elementos de volumen espacial, de superficie o de línea, vendrán dados por los elementos de superficie o línea multiplicados por la raíz cuadrada del módulo de los correspondientes subdeterminantes de la métrica, y son independientes del cambio de base.

Además, la métrica permite transformar un vector contravariante T^{α} en uno covariante T_{α} y viceversa, bien a través del tensor métrico covariante $g_{\alpha\beta}$ o bien del tensor métrico contravariante $g^{\alpha\beta}$, respectivamente. En términos coloquiales nos referiremos a estas transformaciones diciendo que «la métrica actúa de sube-baja índices»,

$$\begin{aligned} T_{\beta}&=g_{\alpha\beta}T^{\alpha} \\ T^{\beta}&=g^{\alpha\beta}T_{\alpha}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde $g^{\alpha\beta}$ es el tensor inverso (matriz inversa por el isomorfismo) de $g_{\alpha\beta}$. Es decir, el producto $g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ da el tensor (o matriz) unidad.

Finalmente, los símbolos de Christoffel (que no son tensores y cuya utilidad se pondrá de manifiesto más adelante) pueden obtenerse a partir de la métrica y sus derivadas ordinarias, representadas por una coma que precede al índice que representa la coordenada con respecto a la que se deriva:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\varepsilon\alpha}\left(g_{\varepsilon\mu,\lambda} + g_{\varepsilon\lambda,\mu} - g_{\mu\lambda,\varepsilon}\right). \tag{2.10}$$

2.1.3 Clasificación de métricas

En un caso general, la métrica depende de todas las coordenadas espacio-temporales: $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^{\gamma})$. En el caso particular de una **métrica estática**, sus coeficientes no dependen del tiempo: $g_{\alpha\beta}(x^{i})$. Existe una clasificación formal (y general) de las métricas como formas bilineales. En cosmología las métricas más relevantes son las homogéneas e isótropas. Se dice que una **métrica es homogénea cuando es invariante con respecto a una traslación**, mientras que una **métrica isótropa es invariante con respecto a una rotación. Mientras que el concepto de homogeneidad abarca todo el espacio-tiempo, la isotropía está referida a un punto. La homogeneidad o isotropía puede ser espacio-temporal o solamente espacial.**

Por ejemplo, la superficie de una esfera de radio a queda descrita por una métrica estática, espacialmente homogénea e isótropa. En cualquier punto de la superficie la métrica (la medida de distancias) es la misma, y es la misma con respecto a cualquier dirección. Su forma puede calcularse fácilmente tomando elementos de longitud $(d\xi^1, d\xi^2)$ a lo largo de los ejes de coordenadas cartesianas vinculadas a la carta local (ξ^1, ξ^2) tangentes a la esfera y con el origen situado en un punto de coordenadas esféricas (a, θ, φ), y expresándolos en función de elementos de longitud $(d\theta, d\varphi)$ de las coordenadas curvilíneas (θ, φ) vinculados a la carta global (figura 2.1),

$$\begin{cases} d\xi^1 = a\,\mathrm{sen}\theta\, d\varphi \\ d\xi^2 = a\, d\theta. \end{cases} \tag{2.11}$$

Un elemento de longitud ds sobre la superficie de la esfera vendrá dado, según el teorema de Pitágoras, como la suma de los cuadrados de los elementos cartesianos,

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 = a^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\varphi^2) \equiv a^2\, d\Phi^2, \tag{2.12}$$

con lo que $g_{11} = a^2$ y $g_{22} = a^2\,\mathrm{sen}^2\theta$, y el elemento de superficie será,

$$d\sigma = \sqrt{|g|}\, d\xi^1 d\xi^2 = a^2\,\mathrm{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi \equiv a^2\, d\Omega \tag{2.13}$$

donde $d\Omega$ es el diferencial de ángulo sólido. La integración de (2.13) para todas las direcciones proporciona la superficie de la esfera.

Dado que g_{22} es el correspondiente subdeterminante, el elemento de línea sobre un círculo máximo definido por un meridiano será

$$d\lambda = \sqrt{|g_{22}|}\, d\xi^2 = a\, d\theta \tag{2.14}$$

que permite obtener, por integración entre 0 y 2π, el perímetro. Dado que la isotropía hace el resultado obtenido independiente de la dirección, el mismo valor se obtendría considerando el elemento de línea del subespacio definido por ξ^1 para $\theta = \pi/2$, que corresponde al ecuador. Para cualquier otro valor constante de θ, se obtendría la longitud del círculo menor o paralelo correspondiente.

Las expresiones (2.11) y (2.12) permiten visualizar con más facilidad la interpretación geométrica de la métrica como medida de distancias. Dada una **variedad diferenciable**, constituida en este caso por la superficie de una esfera, en un entorno suficientemente pequeño de un punto de la variedad, el plano tangente a dicho punto proporciona una aproximación euclídea a la medida de distancias. El espacio vectorial sobre el que se aplica la forma bilineal (2.1) es, entonces, el espacio vectorial que definen los vectores del **plano tangente**. Un punto del plano tangente viene definido por un vector del **espacio vectorial tangente** con origen en el punto tangente a la variedad, y cuyo módulo (2.4) proporciona la distancia medida sobre el plano tangente, que en un entorno suficientemente pequeño alrededor del punto tangente, representa la distancia medida sobre la variedad diferenciable. Una distancia finita sobre la variedad se obtendrá por integración de (2.5), expresada la métrica en coordenadas curvilíneas. Dado que la base del espacio vectorial tangente no permite representar

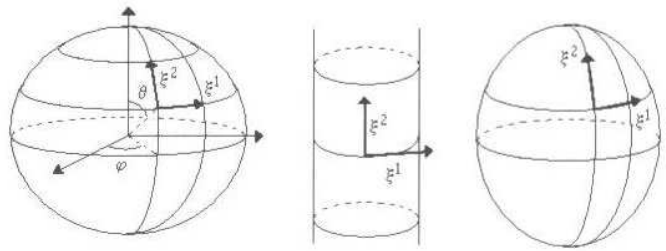


Figura 2.1 La superficie de una esfera de radio constante tiene una métrica espacialmente homogénea e isótropa (izquierda). Un cilindro de sección circular constante (centro) define una métrica homogénea pero no isótropa dado que la medida de distancia no es la misma en todas direcciones, puesto que una dirección (la paralela al eje) es plana y la dirección ortogonal es curva. Sin embargo, en cualquier punto del cilindro se observan las mismas condiciones de anisotropía. Finalmente, la superficie de un elipsoide de revolución (derecha) posee una métrica heterogénea y anisótropa. No solamente la distancia depende de la dirección, dado que la curvatura es distinta en distintas direcciones, sino que además la curvatura en las distintas direcciones depende del punto elegido sobre la superficie. Únicamente los vértices del elipsoide son isótropos.

toda la variedad diferenciable sino únicamente un entorno, se denomina **carta local**, mientras que las coordenadas curvilíneas (θ y φ en este caso) corresponden a la **carta global** puesto que permiten representar cualquier punto de la variedad.

Análogamente, en el caso de la superficie del cilindro, que constituye una variedad diferenciable homogénea pero no isótropa (figura 2.1), tendremos, utilizando para la carta global coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} d\xi^1 = a\, d\varphi \\ d\xi^2 = dz. \end{cases} \tag{2.15}$$

Un elemento de longitud ds sobre la superficie del cilindro vendrá dado, según el teorema de Pitágoras, como la suma de los cuadrados de los elementos cartesianos,

$$ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 = a^2 d\varphi^2 + dz^2 \tag{2.16}$$

con lo que $g_{11} = a^2$ y $g_{22} = 1$, y el elemento de superficie será,

$$d\sigma = \sqrt{|g|}\, d\xi^1 d\xi^2 = a\, dz\, d\varphi \tag{2.17}$$

cuya integración proporciona la superficie del cilindro.

La superficie de un elipsoide de revolución constituye un ejemplo de métrica que no es ni homogénea ni isótropa (figura 2.1). El cálculo de su métrica se propone como ejercicio (ejercicio 2.1).

En cuanto a sus aplicaciones en física, el ejemplo más conocido y sencillo es la métrica homogénea e isótropa de Minkowski, utilizada en la formulación de la relatividad especial,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \\ &= -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2) \equiv \\ &\equiv -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2\, d\Phi^2 \equiv -c^2 dt^2 + dl^2, \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde θ y φ son los ángulos de las coordenadas esféricas, y dl es la parte espacial de la métrica.

También puede expresarse en forma matricial haciendo uso del isomorfismo con el espacio vectorial de las matrices cuadradas:

$$[g] = \begin{bmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

o por componentes: $g_{00} = -c^2$, $g_{11} = 1$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = r^2 \operatorname{sen}^2\theta$, $g_{\alpha\beta} = 0$, $\forall \alpha \neq \beta$.

La métrica permite clasificar los vectores del espacio-tiempo en temporales, espaciales o nulos, según el cuadrado de su módulo sea negativo, positivo o nulo. Los vectores nulos definen las trayectorias que sigue la luz, como se deduce directamente de (2.18).

2.2 La relatividad general

La relatividad especial solamente es aplicable a sistemas de referencia inerciales. La relatividad general tiene su origen en el intento de aplicar la relatividad especial a sistemas no inerciales o acelerados. Para ello Einstein se basó en el llamado principio de equivalencia.

2.2.1 El principio de equivalencia

Einstein desarrolló sus teorías de la relatividad basándose en «experimentos mentales». En el caso de la relatividad general es paradigmático el conocido como «experimento del ascensor». En dicho experimento, el sujeto se encuentra en un ascensor sin ventanas en ausencia de fuerzas gravitatorias. El ascensor se desplaza en línea recta con una aceleración constante e igual a la de la gravedad en la superficie terrestre. En estas circunstancias, el sujeto no notará diferencia entre dicha aceleración y la que sería causada por el campo gravitatorio en la superficie terrestre: las ecuaciones del movimiento de caída de un objeto, despreciando el rozamiento con el aire, serían las mismas (figura 2.2a).

El experimento conduce a la **igualdad entre la masa gravitatoria,** que figura en la ecuación de la gravitación de Newton, **y la masa inercial,** que figura en la segunda ley de Newton. Esta igualdad **constituye el principio de equivalencia débil.**

Esta igualdad no depende de la cantidad de materia ni de su composición. La primera comprobación histórica del principio de equivalencia débil de la que, supuestamente, se tiene constancia la constituye el experimento de Galileo, consistente en arrojar bolas de masas distintas desde la Torre Inclinada:

> Galileo no se resignó a verse ridiculizado y humillado. Sabía que estaba en lo cierto y quería que todos vieran los hechos como él mismo lo hacía. Por este motivo, una mañana, frente a todos los miembros de la universidad, subió a la famosa torre llevando consigo una esfera metálica de cien libras y otra de una libra. Las colocó en equilibrio sobre el borde de la torre y las dejó caer al mismo tiempo. Cayeron simultáneamente y tocaron tierra al mismo tiempo. El ruido simultáneo de los pesos sonó como una campana de muerte para el viejo sistema y anunció el nacimiento del nuevo.
>
> *The Pioneers of Science* (1893), de Sir Oliver Lodge. Extraído de Di Trocchio 1995.

En el texto anterior, el «viejo sistema» es el aristotélico, y el nuevo el de Galileo, que dio origen a la ciencia moderna. Aunque el experimento que hizo Galileo desde la torre de Pisa es *vox populi*, el anterior párrafo corresponde a una de las pocas descripciones escritas que existen del mismo. Sin embargo, se puede demostrar que el experimento forma parte de la leyenda (lo mismo que la famosa frase de «y sin embargo se mueve»), y que no se realizó jamás. Dos hechos fundamentan esta afirmación. El primero es que ya Galileo sabía que el experimento no debía realizarse con objetos de masas distintas sino de composición distinta, puesto que el ritmo de caída debe ser independiente de la masa. En efecto, si dejásemos caer una esfera de un kilo y otra de dos kilos partida por la mitad con las dos mitades en contacto infinitesimal, cada una de las mitades llegaría al mismo tiempo al suelo que la esfera de un kilo, por lo que la esfera de dos kilos llegaría al suelo al mismo tiempo que la de un kilo (figura 2.2b). El segundo es que, si se hubiera realizado, no habría dado el resultado previsto, debido al rozamiento con el aire (ejercicio 2.2). Este experimento no realizado es un caso histórico de fraude científico (y desafortunadamente no el último, puesto que varios de los experimentos de Galileo acerca del principio de relatividad clásico no se llevaron a cabo nunca y, poco después, el mismo Newton hizo un amaño con los datos para que su teoría de la gravitación, junto con otros experimentos de propagación del sonido, «cuadrase». Véase Di Trocchio 1995 para más detalles).

La demostración experimental de que las masas gravitatoria e inercial son iguales y de que no existe una dependencia en la composición, fue realizada por Eötvös utilizando dos masas inerciales iguales pero de distintos materiales en una balanza de torsión y acercando una masa de prueba a una de las masas. Si en algún momento se llegara a demostrar que la atracción gravitatoria depende del material, habría que abandonar el principio de equivalencia o recurrir a otras fuerzas para explicar la desviación observada.

Continuando con los experimentos mentales, si el ascensor estuviera en caída libre en un campo gravitatorio (como sucede con los astronautas dentro de naves espaciales en órbita terrestre), y aplicando el principio de equivalencia débil, todos los objetos situados dentro del ascensor tendrían el mismo valor de la aceleración.

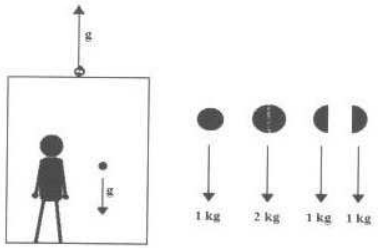


Figura 2.2 a) A la izquierda, «experimento del ascensor»: un sujeto en un ascensor uniformemente acelerado con una aceleración igual a la de la gravedad en la superficie terrestre, no podría saber si se halla inmóvil en la superficie de la Tierra o bien en movimiento y sujeto a dicha aceleración. b) A la derecha, el ritmo de caída libre es independiente de la masa inercial. Dos mitades de una esfera de una masa inercial de dos kilos en contacto infinitesimal llegan al suelo al mismo tiempo que una de un kilo.

Por consiguiente, sería como si no existiera un campo gravitatorio. La única medición que proporcionaría una pista al ocupante acerca de su verdadera situación es que los objetos tenderían a acercarse, debido a que las trayectorias de caída no son paralelas sino que se dirigen al centro de la Tierra. Sin embargo, para objetos próximos, es decir, localmente, el campo gravitatorio puede considerarse homogéneo y realmente no existiría diferencia entre la situación de caída libre y la ausencia de gravedad. Esta conclusión permitió a Einstein postular el principio de equivalencia fuerte que, en forma coloquial puede expresarse de la siguiente forma.

Principio de equivalencia fuerte: un sistema de referencia en caída libre es equivalente, *localmente*, a un sistema de referencia inercial. Por tanto, en un sistema de referencia en caída libre es aplicable la teoría especial de la relatividad.

Una formulación algo más rigurosa sería que siempre es posible elegir un sistema de coordenadas local tal que las leyes de la física tengan la misma forma que en un sistema de referencia inercial.

Una de las consecuencias directas del principio de equivalencia fuerte es que la geometría del espacio-tiempo depende de la gravitación, es decir, de la distribución de masas o, de forma más general, de la distribución de energía. En efecto, si en el ascensor en caída libre se lanza un rayo de luz desde una pared hacia la opuesta, la aplicación del principio de equivalencia fuerte indica que el rayo de luz incidirá sobre la zona de la pared opuesta que está exactamente enfrentada. De otro modo: para el observador dentro del ascensor, el rayo de luz seguirá una trayectoria rectilínea, lo mismo que sucedería en un sistema de referencia inercial. Sin embargo, para un observador en reposo en la superficie de la Tierra, el rayo de luz estaría curvado hacia la superficie terrestre (figura 2.3), puesto que en el intervalo de tiempo que transcurre desde que la luz se emite hasta que incide en la pared, el ascensor se ha desplazado debido a la caída. Dado que el principio de Fermat[1] ha de seguir siendo aplicable, ello implica que en el seno de un campo gravitatorio la trayectoria que toma menos tiem-

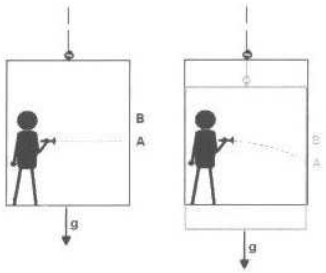


Figura 2.3 a) A la izquierda. En un ascensor en caída libre en un campo gravitatorio donde el ocupante lanzase un rayo de luz a una de las paredes, por aplicación del principio de equivalencia fuerte, vería el rayo de luz incidiendo en línea recta. b) A la derecha, un observador externo vería que la trayectoria del rayo de luz se ha curvado. La gravitación afecta a la métrica.

[1] El principio de Fermat establece que la luz sigue siempre trayectorias de duración mínima.

po no es recta sino curva. Por tanto, la gravitación ha afectado a la curvatura del espacio-tiempo. Es decir, ha afectado a la métrica. La ecuación de Einstein proporciona la relación entre la distribución de energía, representada por el tensor energía-momento y la geometría del espacio-tiempo, representada por la métrica.

2.2.2 La ecuación de Einstein

La ventaja de introducir una métrica es que ésta contiene toda la información relativa al espacio-tiempo. La **ecuación de Einstein,** ecuación fundamental de la relatividad general, relaciona la métrica, es decir, la geometría del espacio-tiempo, con el tensor energía-momento. La ecuación de Einstein equivale a la segunda ley de Newton $\bar{F} = m\bar{a}$, más la conservación de la energía,

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}. \tag{2.20}$$

Donde $G_{\alpha\beta}$ es el **tensor de Einstein** (simétrico y covariante de orden dos), $R_{\alpha\beta}$ es el **tensor de Ricci** (simétrico y covariante de orden dos, de 10 componentes independientes en 4 dimensiones), R es el **escalar de Ricci** (la curvatura escalar definida como la contracción del tensor de Ricci), Λ es la **constante cosmológica**, que se supone positiva puesto que representa un nivel base de energía distinto de cero, y $T_{\alpha\beta}$ es el **tensor energía-momento** (por consiguiente también simétrico y covariante de orden dos):

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} \tag{2.21}$$

$$R = g^{\lambda\alpha} R_{\lambda\alpha}. \tag{2.22}$$

Donde $R^{\alpha}_{\mu\lambda\sigma}$ es el **tensor de curvatura o de Riemann** (de 20 componentes independientes en 4 dimensiones):

$$R^{\alpha}_{\mu\lambda\sigma} = \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu,\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda,\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}. \tag{2.23}$$

Lógicamente, que el tensor de Ricci sea cero no implica ni que el tensor de Riemann sea nulo ni que la métrica sea euclídea.

Por consiguiente, el primer miembro de la ecuación de Einstein queda definido a partir de la métrica y de la constante cosmológica, puesto que de la métrica se obtienen los símbolos de Christoffel (2.10) y de éstos el tensor de Riemann (2.23), del cual se obtienen el tensor (2.21) y el escalar (2.22) de Ricci. El segundo miembro queda definido por el tensor energía-momento.

2.2.3 El tensor energía-momento

El tensor energía-momento, que puede escribirse

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ & & T_{22} & T_{23} \\ & & & T_{33} \end{bmatrix} \text{ donde } \begin{cases} T_{00} & \text{es la densidad de energía} \\ T_{0i} & \text{es el flujo de momento} \\ T_{ii} & \text{es la presión isótropa} \\ T_{ij} & \text{es la presión anisótropa o cizalladura} \end{cases} \tag{2.24}$$

proporciona la información tanto dinámica como energética que determina la geometría del espacio-tiempo.

2.2.4 La constante cosmológica

Como se verá más adelante en este mismo capítulo, la constante cosmológica puede interpretarse como una repulsión a grandes distancias, y ése es el motivo por el cual la introdujo Einstein: para obtener un universo estático compensando la atracción gravitatoria entre los objetos. Es una de las formas que puede adoptar la **energía oscura,** denominación que agrupa a un conjunto de expresiones de la densidad de energía que tienen efectos repulsivos[2] y que no deben confundirse con la *materia oscura* mencionada en el capítulo anterior, cuyo efecto es de atracción gravitatoria.

En la ecuación de Einstein (2.20) la constante cosmológica representa un origen de energías distinto de cero, que a menudo *se interpreta* como una **energía del vacío.** Esta interpretación procede de la física cuántica: una de las formulaciones del **principio de incertidumbre** de Heisenberg indica que el producto de la energía de una partícula por el tiempo invertido en su medida no puede ser menor que $\hbar/2 = h/(4\pi)$, donde h es la constante de Planck. En consecuencia, puede crearse una partícula *ex nihilo* siempre que vuelva a desaparecer en un intervalo de tiempo suficientemente pequeño como para que el producto de su energía por dicho intervalo no vulnere el principio de incertidumbre. De esta manera no podrá ser detectada y por tanto no se producirá una violación del principio de conservación de la energía. Si además estas partículas se crean por pares partícula-antipartícula, tampoco se violaría el principio de conservación de la carga eléctrica. Cuanto más masivas sean estas **partículas virtuales,** menos tiempo podrían existir, de acuerdo con el principio de incertidumbre. En un espacio homogéneo, la cantidad de partículas virtuales solamente dependerá del volumen de espacio, y además en cualquier vo-

[2] Puede que en más de un sentido.

lumen siempre se crearán partículas de todos los rangos de energías posibles. Es decir: la energía total de estas partículas por unidad de volumen sería constante.

Aunque estas partículas sean virtuales y por tanto no se puedan detectar directamente, eso no significa que sus efectos no se puedan medir. Por ejemplo, las partículas virtuales generan la **radiación de Hawking** procedente de agujeros negros: si un par de partículas virtuales se genera suficientemente cerca del radio de Schwarzschild de uno de estos objetos, una de las partículas puede ser capturada por el agujero negro y la otra quedar libre en el universo, como si radiara del agujero negro. Aunque esta radiación no ha sido medida, sí que se ha medido el llamado **efecto Casimir**: una fuerza que atrae dos láminas conductoras separadas por distancias del orden de varios diámetros atómicos. Puesto que la dualidad onda-corpúsculo impide que las partículas con longitud de onda asociada mayor que la separación entre las láminas se materialicen entre las mismas, la densidad de energía presente en el volumen de espacio entre las láminas será menor que la exterior (figura 2.4). Esta diferencia de densidad de energía se traduce en una diferencia de presión: la presión será menor entre las láminas. Como la fuerza con que se atraen las láminas depende de la geometría de las mismas[3] (véase por ejemplo Lamoreaux 1997), este efecto puede distinguirse de otros como el debido a la mutua atracción gravitatoria.

Como se demostrará en el capítulo quinto, la identificación de la energía del vacío con la constante cosmológica conduce, sin embargo, a valores de la constante cosmológica 123 órdenes de magnitud mayores de lo observado, por lo que esta interpretación es ciertamente problemática. De ahí que se haya enfatizado que la identificación de la constante cosmológica con una energía del vacío es únicamente una de sus interpretaciones posibles.

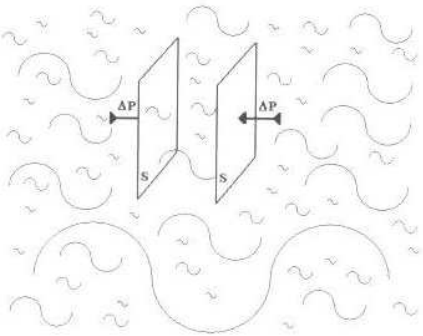


Figura 2.4 El efecto Casimir consiste en la atracción que experimentan dos láminas enfrentadas y separadas una cierta distancia. Ello es debido a la diferencia de presión causada por la diferente densidad de energía presente entre las láminas y en el exterior de las mismas. Entre las láminas la densidad de energía de partículas virtuales es menor dado que las partículas cuya longitud de onda asociada sea mayor que la distancia entre las láminas no se podrán materializar entre las mismas. Este efecto puede distinguirse de efectos gravitatorios porque depende de la geometría de las láminas y no de su masa.

[3] Dependiendo de la geometría, el efecto Casimir puede ser repulsivo en vez de atractivo.

2.3 Aplicación a la cosmología

La resolución de la ecuación de Einstein proporcionará la evolución temporal del universo, pero para ello es preciso conocer la métrica que describe el universo y el tensor energía-momento que lo caracteriza. Ambos tensores se obtienen basándose en las propiedades observables del universo y en un nuevo principio básico.

2.3.1 La homogeneidad e isotropía espaciales

Diremos que un universo es ***espacialmente*** **homogéneo si todos los puntos del espacio tienen las mismas propiedades físicas** (temperatura, densidad, etc., dadas por el tensor energía-momento) **y geométricas** (determinadas por la métrica) ***en cada instante de tiempo***. Diremos que un universo es ***espacialmente*** **isótropo** ***respecto a un punto*** **si todas las direcciones del espacio con respecto a dicho punto muestran las mismas propiedades físicas y geométricas** ***en cada instante de tiempo.***

Ni son equivalentes, ni una implica la otra, como se muestra en la figura 2.5. Lo mismo que en el caso de la métrica, la isotropía no es una propiedad global como la homogeneidad: siempre se define con respecto a un punto dado del espacio. Sin embargo, isotropía con respecto a tres puntos implica la homogeneidad de un espacio tridimensional[4].

Hay que destacar que estamos hablando de homogeneidad e isotropía espaciales, no espacio-temporales. **La homogeneidad** ***espacio-temporal*** **implicaría que todos los puntos del espacio tuvieran las mismas propiedades físicas y que éstas fueran iguales** ***para cada instante de tiempo***, es decir, no variaran con el tiempo. La homogeneidad espacial, en cambio, implica que las propiedades son las mismas en todos los puntos del espacio en cada instante de tiempo, pero que pueden variar con el tiempo siempre que varíen por igual en cada punto (análogamente para el caso de la isotropía espacio-temporal con respecto la temporal). La homogeneidad e isotropía espacio-temporales implicarían un universo espacialmente infinito, sin origen en el tiempo, estacionario o estático. Ya vimos en el capítulo anterior que nuestro universo no es estático, luego una homogeneidad e isotropía espacio-temporales solamente podría dar lugar a un universo estacionario: en expansión con creación de materia para mantener la densidad constante, como se discutirá en el capítulo tercero.

En un universo homogéneo e isótropo la métrica y el tensor energía-momento adoptan una forma relativamente simple. Por este motivo es interesante plantearse

[4] Puede generalizarse a n dimensiones espaciales: si un espacio de n dimensiones espaciales es isótropo respecto de n puntos distintos, entonces es espacialmente homogéneo.

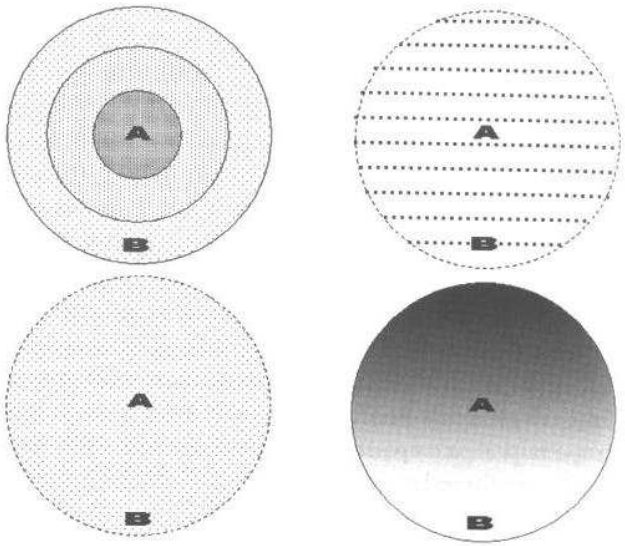


Figura 2.5 Ejemplos de isotropía y homogeneidad y sus diferencias en dos dimensiones espaciales. Arriba, a la izquierda: el espacio es heterogéneo, y es isótropo respecto de A pero no respecto de B. Arriba, a la derecha: si el espacio es ilimitado, es homogéneo, pero es anisótropo respecto de cualquier punto del espacio. Abajo, a la izquierda: si el espacio es ilimitado, o limitado pero cerrado como la superficie de una esfera, es homogéneo e isótropo respecto de cualquier punto del espacio. Abajo, a la derecha: el espacio es heterogéneo, y anisótropo respecto a cualquier punto del espacio.

si nuestro universo cumple con las condiciones de homogeneidad e isotropía espaciales lo suficiente como para que el astrofísico pueda ahorrarse trabajo al aplicar la ecuación de Einstein.

Desafortunadamente, la velocidad finita de propagación de la luz hace imposible una comprobación directa tanto de la homogeneidad como de la isotropía espaciales[5]. En efecto, la luz que llega de objetos distantes fue emitida en una época distinta de la actual, mientras que la homogeneidad e isotropía espaciales deben establecerse para cada punto del espacio o cada una de las direcciones, respectivamente, ***en un mismo instante de tiempo***, y ***para cada instante de tiempo***. Luego, solamente puede establecerse la homogeneidad o isotropía en un volumen de universo que cubra un intervalo de distancias al observador equivalente a c veces un intervalo temporal suficientemente pequeño como para que pueda considerarse que el universo no evoluciona significativamente en dicho intervalo.

Por ejemplo, ya se vio en el capítulo primero que las observaciones actuales permiten afirmar que la distribución de galaxias en el universo local puede considerarse homogénea a escalas de 150 Mpc. Sin embargo, observaciones de muestras completas de galaxias a mayor desplazamiento al rojo estarían muestreando la homogeneidad de otro volumen de universo en otro instante de tiempo, no en el mismo instante que el correspondiente a las observaciones del universo local.

[5] Y la inexistencia de observadores calificados en instantes significativamente anteriores al actual (p. ej.: hace 10^9 años) hace imposible, además, la comprobación directa de la homogeneidad e isotropía espacio-temporales.

Análogamente, en el capítulo primero quedó establecido por las observaciones que la radiación cósmica de fondo es altamente isótropa (1 parte en 10^5). Debido al acoplamiento materia-radiación, puede afirmarse que no solamente la radiación es isótropa, sino también la distribución de materia. Sin embargo, esta isotropía corresponde a un intervalo espacial determinado por el espesor de la superficie de último esparcimiento, no es aplicable a todo el universo en el momento del desacoplamiento materia-radiación.

Asimismo, también en el capítulo primero se comprobó que las observaciones de gran cobertura angular del universo más próximo muestran una isotropía a escalas angulares de unos pocos grados. Sin embargo, muestreos más profundos con la misma cobertura angular no permitirían afirmar nada sobre la isotropía de distribución de galaxias en el universo actual, sino de otro intervalo de distancias que reflejaría un intervalo de tiempo anterior.

Estas observaciones, además, solamente involucran dos épocas: el desacoplamiento y una evolución de estructuras muy posterior.

En conclusión, las observaciones por sí solas, por perfectas que fueran, no permiten afirmar que el universo sea homogéneo e isótropo. Solamente que en distintos volúmenes de universo correspondientes a distintos instantes de tiempo cosmológico la distribución de energía parecía o parece homogénea e isótropa. Esta situación es inevitable y se debe a uno de los principios de la física sólidamente establecidos como es la constancia de la velocidad de la luz. Para llegar más lejos es preciso introducir un principio ya conocido, aunque formulado de otra manera.

2.3.2 El principio cosmológico

Como ya se ha discutido, las observaciones no permiten constatar de forma directa la isotropía y homogeneidad del universo. Sin embargo, según el principio copernicano, que también podríamos denominar principio de mediocridad cósmica, nosotros no deberíamos ser unos observadores privilegiados ni en el espacio ni en el tiempo[6].

Por tanto, invocando el principio copernicano temporal, si ahora observamos isotropía en la radiación cósmica de fondo, ello implica que esta radiación ha sido siempre isótropa. Otro observador en otro instante de tiempo, situado en nuestro mismo sistema de referencia, constataría también la isotropía de dicha radiación (en caso contrario, ¿por qué mediríamos isotropía solamente ahora?), aunque a otra temperatura[7]. Pero ello implica que sea isótropa desde nuestro sistema de referencia,

[6] Este antiantropocentrismo espacio-temporal no implica una homogeneidad e isotropía espacio-temporales.

[7] Una isotropía espacio-temporal implicaría que la temperatura fuera la misma.

dado que a cada instante de tiempo se observa una superficie de último esparcimiento distinta. También indica que la expansión es isótropa, en caso contrario habría que suponer una expansión anisótropa que casualmente y de forma exacta compensase, en el momento actual, una anisotropía en la radiación cósmica de fondo.

Invocando ahora el principio copernicano espacial, si la radiación de fondo es isótropa respecto de nosotros, entonces ha de ser isótropa desde cualquier punto del espacio y no únicamente desde nuestra posición. Pero eso implica que dicha radiación, y por tanto la distribución de energía en ese instante, ha de ser homogénea, como ya se ha comentado en 2.3.1. También implica, por el mismo argumento anterior, que la expansión ha de ser homogénea.

Procediendo de forma análoga con la distribución de galaxias se establece la isotropía y homogeneidad en el universo post-desacoplamiento, aunque se concluye que se ha perdido isotropía desde el desacoplamiento.

Finalmente, suponiendo que las pérdidas de isotropía y homogeneidad son debidas al crecimiento de estructuras mediante agrupación gravitatoria durante el tiempo transcurrido entre el desacoplamiento y el instante actual o, de otro modo, suponiendo que en toda la historia del universo no ha habido procesos de creación y posterior destrucción de anisotropías y heterogeneidades a gran escala, cabe concluir que la distribución de energía en el universo es homogénea e isótropa y que la expansión también ha tenido lugar de forma homogénea e isótropa.

Obsérvese que la trabazón lógica de la argumentación anterior, aunque aparentemente razonable, es muy delicada y compleja, y que está basada solamente de forma parcial en las observaciones. En consecuencia, **la homogeneidad e isotropía del universo no debe considerarse como resultado directo de las observaciones, sino como una hipótesis que debe ser confirmada o desmentida *a posteriori* por las consecuencias observables que de ella se deriven.**

En resumen: el principio copernicano espacio-temporal permite reducir el problema de la isotropía y homogeneidad a establecer, mediante observaciones, la isotropía con respecto a dos puntos del espacio-tiempo. Esta isotropía queda establecida por las observaciones del fondo cósmico de microondas en el instante del desacoplamiento y la isotropía de la distribución local de galaxias. Además es preciso suponer que la evolución del universo no ha creado y vuelto a destruir anisotropías antes o después de ambos instantes del espacio-tiempo. Basándose en estas consideraciones, y a pesar de todo, nos atrevemos a enunciar el **principio cosmológico: existe un sistema de referencia** (debido a la relatividad de la simultaneidad) **para el cual el espacio tridimensional es homogéneo e isótropo en cada instante de tiempo.** A ese sistema de referencia se le llama **sistema de referencia del fluido cosmológico** y al tiempo medido en dicho sistema se le llama **tiempo cosmológico.**

Dicho principio hace referencia a la homogeneidad e isotropía espaciales. La homogeneidad e isotropía espacio-temporales requeriría un principio más restrictivo y difícilmente justificable desde el punto de vista copernicano. Sin embargo, en honor a la verdad, no podemos rechazar mediante prueba observacional *directa* una isotropía u homogeneidad espacio-temporal, puesto que no se han llevado a cabo mediciones sistemáticas en escalas de tiempo cosmológico significativas.

El principio cosmológico, en apariencia sencillo, razonable y estéticamente satisfactorio, introduce fuertes restricciones a los modelos de universo y comporta variadas implicaciones, que se tratarán a lo largo de este libro. No es superfluo volver a insistir en que no existe verificación directa de dicho principio, sino que se acepta porque hasta el momento sus consecuencias, que sí son susceptibles de verificación, no parecen contradecir las observaciones disponibles.

2.3.3 El tensor energía-momento para un fluido perfecto

Si el universo es isótropo, las componentes espaciales no diagonales del tensor energía-momento T son nulas, dado que no existirá presión anisótropa o cizalladura: $T_{ij} = 0 \ \forall \ i \neq j$. Si además los movimientos peculiares de las galaxias y cúmulos de galaxias son despreciables[8] frente al flujo de Hubble, lo cual, como se vio en el capítulo anterior, es cierto a distancias suficientemente grandes, el flujo de momento es cero: $T_{0i} = 0$. Si el universo además es homogéneo, la densidad de energía ρ y la presión p no dependerán de la posición sino solamente del tiempo cósmico. Entonces: $T_{00}=\rho$, y la presión p será un escalar: $T_{ii}=pg_{ii}$. Dicho de otra manera, por las propiedades de homogeneidad e isotropía del universo, el tensor energía-momento adoptará la forma de un fluido perfecto:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta}, \tag{2.25}$$

donde u_α es el cuadrivector velocidad que, en ausencia de movimientos peculiares, tiene componentes $(1, 0, 0, 0)$. Por tanto: $T^0_0 = -\rho$; $T^i_i = pg^i_i$; $T^\beta_\alpha = 0, \forall \ \alpha \neq \beta$. Nótese que la métrica actúa de «sube-baja» índices.

2.3.4 La métrica de un universo espacialmente homogéneo e isótropo

Se demuestra (Weinberg 1972) que la métrica más general que describe un espacio de cuatro dimensiones, de las cuales tres son espaciales y una temporal, cuyo

[8] A veces a los movimientos peculiares también se les denomina «movimientos propios» por analogía con los movimientos propios de las estrellas de nuestra Galaxia, que se refieren a estrellas que tienen una cinemática distinta de la debida únicamente a la velocidad circular de la curva de rotación. En el presente caso designa a una cinemática distinta de la debida únicamente al flujo de Hubble. Son, por tanto, movimientos con respecto al sistema de referencia comóvil. No debe confundirse tampoco con el espacio propio, el medido entre dos sucesos en el sistema de referencia en el que son simultáneos, y el tiempo propio, transcurrido entre dos sucesos que tienen lugar en el mismo punto: ambos conceptos corresponden a la terminología de la relatividad especial.

subespacio tridimensional espacial es maximalmente simétrico y de curvatura arbitraria, tiene, en coordenadas esféricas, la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-\varepsilon r^2} + r^2 d\Phi^2\right] \qquad (2.26)$$

y se denomina **métrica de Robertson-Walker**. Se ha tomado c=1, valores positivos para los valores propios espaciales, y t designa el tiempo cosmológico. La función del tiempo a se denomina **factor de escala**, término que ya se postuló en el capítulo anterior, que era esperable que apareciera en la métrica y que, de acuerdo con el razonamiento del apartado 2.3.2, no depende de la dirección ni de la posición. El término ε es el signo de la curvatura, que puede tomar los valores $\varepsilon = 0, \pm 1$ según la curvatura sea nula, positiva o negativa, respectivamente. Puesto que la curvatura viene matemáticamente definida como el inverso del radio de curvatura al cuadrado más un signo, entonces la coordenada r está normalizada al radio de curvatura comóvil y por tanto no tiene dimensiones (véase 2.3.6). Sus dimensiones las ha asumido el factor de escala. Finalmente, $d\Phi$ se ha definido en (2.18).

La curvatura nula corresponde al espacio euclídeo, como se puede comprobar fácilmente. Sin embargo, dicho espacio euclídeo no es el de Minkowski. Con respecto a la métrica de Minkowski (2.18), la de Robertson-Walker (2.26) presenta dos diferencias notables: el factor de escala, que introduce una dependencia temporal en la parte espacial de la métrica cuyas consecuencias se analizarán en el siguiente apartado, y el término $(1-\varepsilon r^2)^{-1}$, que afecta a la medida de distancias radiales, representando una curvatura en la dirección radial y cuyas consecuencias se analizan en más detalle en 2.3.6.

De (2.26) podemos concluir que la métrica de un universo homogéneo e isótropo quedará completamente definida con la curvatura y el factor de escala. Dicho de otra manera, la curvatura y el factor de escala definen distintas geometrías del espacio-tiempo.

2.3.5 Análisis de la parte temporal de la métrica de Robertson-Walker

Coordenadas comóviles y propias

Supongamos que un observador se encuentra en $r = 0$ y quiere calcular la distancia propia D_p, que en un tiempo cosmológico t fijo, lo separa de un objeto de coordenada radial comóvil r. Debido a la isotropía del espacio, la medida de la distancia no puede depender de la dirección y puede considerarse cualquier dirección con θ y φ constantes. Entonces, de (2.26) obtenemos

$$D_p = \int_0^{D_p} ds = a(t)\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-\varepsilon r^2}}. \qquad (2.27)$$

Para otro instante de tiempo, la integral con respecto r de la ecuación (2.27) será la misma si el objeto se mantiene en la misma coordenada r, pero D_p tendrá otro valor debido al cambio del factor de escala. Es decir, D_p varía con el tiempo aunque r no lo haga. Por consiguiente, la dependencia temporal del factor de escala define dos tipos distintos de coordenadas en el universo: las **coordenadas comóviles** (r, θ, φ) que no varían con el tiempo y las **coordenadas propias**, como la distancia D_p, que sí dependen del tiempo. Nótese que la ecuación (1.9) postulada en el capítulo primero se obtiene de (2.27) cuando la curvatura es nula, pero que la relación (1.11) se obtiene derivando (2.27) con respecto al tiempo independientemente de la curvatura, cuando r no varía. **La ecuación (1.11) es, por tanto, una expresión de validez general.**

El desplazamiento al rojo

La astrofísica estudia los objetos del universo a partir de la radiación electromagnética que emiten. La combinación del carácter finito de la velocidad de propagación de la luz[9], con las grandes distancias que involucra la cosmología, se traduce en grandes intervalos de tiempo entre la emisión de la luz por un objeto y la posterior recepción por un observador situado en la Tierra. Durante dicho intervalo, el factor de escala varía sensiblemente. Por tanto, la parte temporal de la métrica también afecta a la radiación que se propaga entre el emisor y el receptor.

Esta radiación, emitida en un instante t por un objeto situado a una distancia r, se propaga a lo largo de una geodésica $ds = 0$ a una velocidad finita, la de la luz, por lo que tarda un tiempo finito[10] en alcanzarnos en $r = 0$ y en el instante actual t_0. Dado que, por isotropía, la propagación es independiente de la dirección, a partir de la métrica (2.26) obtenemos

$$\int_t^{t_0} \frac{dt}{a} = -\int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1+\varepsilon r^2}}, \qquad (2.28)$$

donde el signo aparece debido a que r disminuye durante la propagación a medida que el tiempo aumenta.

La ecuación (2.28) es también válida para el paquete de fotones que se emite un instante dt más tarde y que nos llegará un dt_0 más tarde:

$$\int_{t+dt}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a} = -\int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1+\varepsilon r^2}}. \qquad (2.29)$$

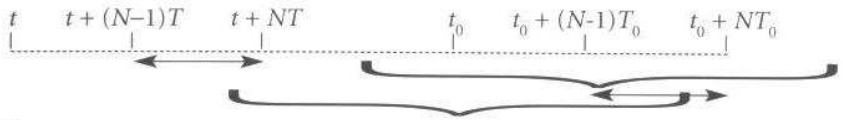
[9] Por «luz» se entenderá radiación electromagnética de cualquier longitud de onda, no solamente la visible por el ojo humano.

[10] Puede que no llegue nunca al observador, lo cual introduce el concepto de horizonte cosmológico, que trataremos en el capítulo cuarto. En el caso que nos ocupa, supondremos que sí llega.

Elegimos estos diferenciales de tiempo en dos casos: igual a un múltiplo N e igual a un múltiplo $(N-1)$ del periodo T de la onda electromagnética. Entonces, igualando ambas expresiones se obtiene:

$$\int_{t+NT}^{t_0+NT_0} \frac{dt}{a} = \int_{t+(N-1)T}^{t_0+(N-1)T_0} \frac{dt}{a}, \tag{2.30}$$

pero esta igualdad equivale a la igualdad de las zonas no comunes a ambas integrales, marcadas con flechas en el siguiente diagrama (que no se encuentra a escala),



por lo que,

$$\int_{t+(N-1)T}^{t+NT} \frac{dt}{a} = \int_{t_0+(N-1)T_0}^{t_0+NT_0} \frac{dt}{a}. \tag{2.31}$$

Pero estas integrales se evalúan con respecto a un periodo de la radiación que aparece en origen en el primer miembro y en recepción en el segundo. Éste es un periodo de tiempo muy corto[11] durante el cual podemos suponer que el factor de escala a no varía, sino que es constante e igual al valor que corresponde al instante de emisión en el primer miembro y de recepción en el segundo miembro. Por consiguiente, y expresando los periodos como longitudes de onda,

$$\frac{T}{a} = \frac{T_0}{a_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_0}{a} = \frac{T_0}{T} = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 + z, \tag{2.32}$$

donde z es el desplazamiento al rojo definido en el capítulo anterior. Esta relación (2.32) constituye una deducción de la relación entre el factor de escala y el desplazamiento al rojo algo más rigurosa que la obtenida cualitativamente en el capítulo primero (1.12). Por tanto, **la métrica de Robertson-Walker explica de forma natural el desplazamiento al rojo observado como debido a una «expansión» del universo causada por la variación con el tiempo del factor de escala.** Ésta es, por tanto, una característica general de cualquier universo espacialmente homogéneo e isótropo y **no es consecuencia de un desplazamiento Doppler,** relativista o no, sino de que entre los instantes de emisión y recepción de la radiación que nos llega de un objeto, el universo se ha expandido y esa expansión afecta también a la longitud

[11] Lo cual no es cierto si el factor de escala varía muy rápidamente durante este intervalo. En general la aproximación es correcta.

de onda de la radiación. A este efecto se le denomina **desplazamiento al rojo cosmológico,** para distinguirlo del desplazamiento Doppler. En lo que sigue se analizarán en mayor detalle estos conceptos y sus implicaciones.

La ecuación (2.32) relaciona el desplazamiento al rojo del espectro de un objeto, con la razón entre los valores del factor de escala del universo entre el instante de recepción y el de emisión. **Un objeto que se encuentre a un desplazamiento al rojo unidad, emitió la luz que ahora se detecta en un instante en el que el universo tenía la mitad del factor de escala del que tiene en la actualidad, lo cual no implica necesariamente que tuviera la mitad de la edad que tiene ahora.**

De acuerdo con (2.26), no existe un límite *a priori* para el ritmo ($\dot{a}$) al cual puede variar el factor de escala, y que denominaremos **velocidad de expansión.** Además, la **velocidad de recesión,** definida por $V_{\text{recesión}} = HD_p = (\dot{a}/a)\, D_p$, como se deduce de derivar (2.27), puede ser superlumínica a partir de una cierta distancia, y la luz procedente de los objetos que se encuentren a distancias mayores puede no llegarnos ahora o no llegarnos ni siquiera en el futuro. **La recesión superlumínica no contradice los principios de la relatividad especial puesto que ésta, de acuerdo con el principio de equivalencia fuerte, solamente es válida localmente, no a distancias cosmológicas.**

Si desarrollamos en serie el inverso del factor de escala alrededor de $t = t_0$ y lo truncamos en el segundo orden, (2.32) se obtiene,

$$\begin{aligned} z = \frac{a_0}{a} - 1 &\approx \frac{\dot{a}_0}{a_0}(t_0 - t) + \left[\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\ddot{a}_0}{a_0}\right](t_0 - t)^2 \equiv \\ &\equiv H_0(t_0 - t) + H_0^2\left[1 + \frac{1}{2}q_0\right](t_0 - t)^2, \end{aligned} \tag{2.33}$$

donde H_0 corresponde a la **constante de Hubble** y es el valor en el instante actual de la función del tiempo,

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \tag{2.34}$$

mientras que q_0 se denomina **parámetro de desaceleración** y es el valor en el instante actual de la función del tiempo,

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} \tag{2.35}$$

puesto que constituye la aceleración del factor de escala, es decir la derivada del ritmo de expansión, cambiada de signo. En un caso general, la expansión no será cons-

tante. En (2.6.3) se analizará este hecho en más detalle. El signo aparece por motivos históricos, debido a que se suponía que la expansión del universo solamente podía ser desacelerada, por lo que el cambio de signo permitía trabajar con valores positivos. Siguiendo con la inveterada tradición astronómica[12], el signo se mantiene e incorpora en la definición de dicha función, que constituye por tanto una medida de la desaceleración. Un universo acelerado tendrá valores de la desaceleración negativos.

Si el desarrollo (2.33) se trunca en el primer término y se multiplican ambos miembros por la velocidad de la luz, se obtiene la ley de Hubble. Por tanto, los términos adicionales representan correcciones a la ley de Hubble que se ponen de manifiesto a grandes distancias.

La diferencia de tiempos t_0-t, entre la edad actual del universo y la edad del universo en el momento de emisión de la radiación electromagnética que ahora se recibe se denomina **tiempo retrospectivo,** puesto que el carácter finito de la velocidad de la luz y las grandes distancias cosmológicas determinan que los objetos que se detectan en la actualidad, en un tiempo cosmológico t_0, con un desplazamiento al rojo $z=[a(t_0)/a(t)]-1$, se observan tal como eran en el pasado en un instante t. Ese hecho permite establecer una relación entre z y t que dependerá de la forma de $a(t)$, es decir, del modelo cosmológico.

2.3.6 Análisis de la parte espacial de la métrica de Robertson-Walker

La curvatura radial de la métrica

La métrica de Robertson-Walker (2.26) dice, interpretada literalmente, que si se incrementa la coordenada radial r en dr manteniendo las demás (t, θ, y φ) constantes[13], la distancia propia ds es igual a adr únicamente en el caso euclídeo. Cuando la curvatura es positiva ($\varepsilon=+1$) la distancia propia es mayor que en el caso euclídeo y cuando la curvatura es negativa ($\varepsilon=-1$) es menor, para un mismo valor del factor de escala. Esta situación no depende de la dirección, al ser la métrica isótropa, y el tiempo únicamente interviene en el factor de escala. Es decir, **las «distancias radiales» propias solamente son proporcionales a la coordenada radial comóvil en el caso euclídeo** ($\varepsilon=0$).

En cambio, si se incrementa la coordenada angular θ en dθ manteniendo las demás (t, r, y φ) constantes, la distancia propia ds es igual a $a r$dθ, al igual que en el caso euclídeo, independientemente de la curvatura.

La métrica de Robertson-Walker constituye una forma de métrica no euclídea, así llamada porque en ella no se verifica el teorema de Euclides de las paralelas. En

[12] Que ha llevado, por ejemplo, a conservar el concepto de magnitud definido por Hiparco hacia el 140 antes de la era común.

[13] Es decir, para cualquier instante de tiempo y cualquier dirección.

las variedades diferenciables o espacios representados por estas métricas, dos líneas paralelas o bien se cortan o bien divergen con la distancia. Únicamente permanecen paralelas en el caso euclídeo, el caso particular de curvatura nula. En una métrica no euclídea se dice que el espacio es curvo, lo cual no es fácil de visualizar: puede imaginarse con facilidad una línea o una superficie curvas, pero es más difícil intuir la curvatura de una variedad tridimensional. Por suerte, la métrica de Robertson-Walker es relativamente sencilla, puesto que es isótropa y toda la curvatura aparece en la dirección radial.

La curvatura radial en la métrica de Robertson-Walker en dos dimensiones

Podemos visualizar la curvatura radial, en el caso de curvatura positiva, si se analiza la métrica de Robertson-Walker en dos dimensiones espaciales. Consideremos la superficie de una esfera de radio r_C y un origen de coordenadas polares (r, θ) situado en un punto de la superficie de la esfera (figura 2.6). Si los movimientos están constreñidos sobre la superficie de la esfera, al variar la coordenada radial en dr se recorre una distancia dl_φ *sobre un meridiano*, que es mayor que dr. Entonces, el elemento de longitud es

$$\mathrm{d}l_\varphi = r_C \mathrm{d}\alpha, \tag{2.36}$$

pero

$$r = r_C \operatorname{sen}\alpha, \tag{2.37}$$

por lo que podemos escribir

$$\mathrm{d}r = r_C \cos\alpha \, \mathrm{d}\alpha. \tag{2.38}$$

Sustituyendo (2.38) en (2.36), utilizando (2.37), se obtiene,

$$\mathrm{d}l_\varphi = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-\dfrac{r^2}{r_C^2}}} \tag{2.39}$$

Dado que el elemento de longitud *sobre un paralelo* es $\mathrm{d}l_\theta = r\,\mathrm{d}\theta$, y que un elemento de longitud cualquiera dl sobre la superficie de la esfera se podrá expresar como $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}l_\varphi^2 + \mathrm{d}l_\theta^2$, se obtiene,

$$\mathrm{d}l^2 = r_C^2\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-r^2} + r^2\mathrm{d}\theta^2\right), \tag{2.40}$$

donde se ha redefinido la coordenada r reescalándola por el radio de la esfera $r \equiv r/r_C$. La distancia propia ds se obtendrá multiplicando dl por el factor de escala a:

$$ds^2 = a^2 dl^2 = a^2 r_C^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\theta^2 \right) \equiv a^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\theta^2 \right) \qquad (2.41)$$

que nos proporciona la métrica de Robertson-Walker de un universo bidimensional de curvatura positiva, donde la coordenada comóvil r está escalada por el radio de curvatura (el radio de una esfera es el radio de curvatura de su superficie) y por tanto es adimensional, mientras que el factor de escala está reescalado por el radio de curvatura y por consiguiente tiene unidades de longitud. Entonces **el radio propio del universo es a y la coordenada r está acotada: $0< r <1$.** Nótese que la longitud de un círculo menor (definido como la longitud a r constante y recorriendo 2π en θ) correspondiente a la coordenada r es $2\pi r$ como en el caso euclídeo.

La expresión (2.41) puede generalizarse a curvatura negativa cambiando el signo del denominador, con lo que el paralelismo con (2.26) resulta completo. Sin embargo, no existe un símil bidimensional para el caso de curvatura negativa, dado que no se puede representar en el espacio euclídeo una superficie en la que a un dr le corresponda un dl_φ menor que dr.

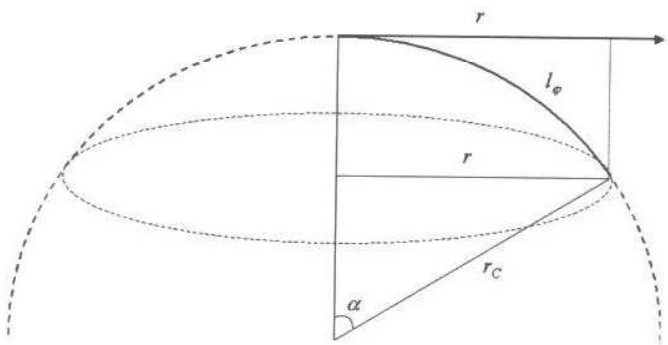


Figura 2.6 Curvatura radial positiva en el caso bidimensional de la métrica de Robertson-Walker. Al variar r se recorre una distancia l_φ sobre la esfera de radio r_C.

La geometría espacial de la métrica de Robertson-Walker

Una vez analizado intuitivamente el significado de la curvatura radial en la métrica de Robertson-Walker en dos dimensiones procede llevar a cabo un análisis algo más riguroso de su geometría en tres dimensiones. Si en la métrica (2.26) tomamos secciones t=cte, nos quedamos con la parte espacial de la métrica: $ds^2 \equiv dl^2$, donde a es una constante:

$$dl^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon r^2}} \right)^2 dr^2 + (ar)^2 d\theta^2 + (ar \operatorname{sen}\theta)^2 d\varphi^2 \equiv g_{11} dr^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33} d\varphi^2 .$$

Denominaremos «esfera» al lugar geométrico de puntos r=cte.

Definimos las siguientes magnitudes propias a partir de la raíz cuadrada de los módulos de los subdeterminantes asociados de la métrica, utilizando la notación de (2.42), y los elementos de línea, superficie y volumen correspondientes, según el procedimiento general descrito en el apartado 2.1.2 y por analogía al caso de una esfera en el espacio euclídeo:

- Radio propio de una esfera de radio r: $L_p(r) = \int_0^r \sqrt{|g_{11}|}\, dr$ con θ y φ constantes. (2.43)

- Perímetro propio de una esfera de radio r: $P_p(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{|g_{33}|}\, d\varphi$ con r constante y $\theta = \frac{\pi}{2}$. (2.44)

- Superficie propia de una esfera de radio r: $S_p(r) = \int_{\Omega=0}^{4\pi} \sqrt{|g_{22} g_{33}|}\, d\theta\, d\varphi$ con r constante. (2.45)

- Volumen propio de una esfera de radio r: $V_p(r) = \int_0^r \int_{\Omega=0}^{4\pi} \sqrt{|g_{11} g_{22} g_{33}|}\, dr\, d\theta\, d\varphi$. (2.46)

Que están relacionadas con las respectivas magnitudes comóviles a través de potencias del factor de escala: $L_p = aL_c$, $P_p = aP_c$, $S_p = a^2 S_c$, $V_p = a^3 V_c$. A continuación se analizarán los valores de distancias, perímetros, superficies y volúmenes comóviles para las distintas curvaturas.

Curvatura nula

Se obtiene:

$$dl^2 = a^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta\, d\varphi^2) \qquad (2.47)$$

que corresponde al espacio euclídeo. En este caso la geometría es la de una esfera y

$$L_C(r) = \int_0^r dr = r \qquad (2.48)$$

$$P_C(r) = \int_0^{2\pi} r\, d\varphi = 2\pi r \qquad (2.49)$$

$$S_C(r) = \int_{\Omega=0}^{4\pi} r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta d\varphi = 4\pi r^2 \qquad (2.50)$$

$$V_C(r)=\int_0^r\int_{\Omega=0}^{4\pi} r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad (2.51)$$

que, debido a la manera como están definidas, se corresponden con las de una esfera en el espacio euclídeo. La distancia radial no está acotada y puede crecer tanto como se quiera al aumentar r, lo mismo que el perímetro, la superficie y el volumen. Cuando el volumen puede crecer ilimitadamente se dice que el espacio es abierto.

Curvatura positiva

En este caso, la métrica adopta la forma

$$\mathrm{d}l^2=a^2\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-r^2}+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)\right]. \qquad (2.52)$$

Entonces las expresiones del perímetro y la superficie son las mismas que en el caso euclídeo, pero la distancia radial y el volumen no:

$$L_C(r)=\int_0^r\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}}=\mathrm{arcsen}\,r \qquad (2.53)$$

$$V_C(r)=\int_0^r\int_{\Omega=0}^{4\pi}\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=2\pi\left(\mathrm{arcsen}\,(r)-r\sqrt{1-r^2}\right), \qquad (2.54)$$

magnitudes que se representan gráficamente en la figura 2.7.

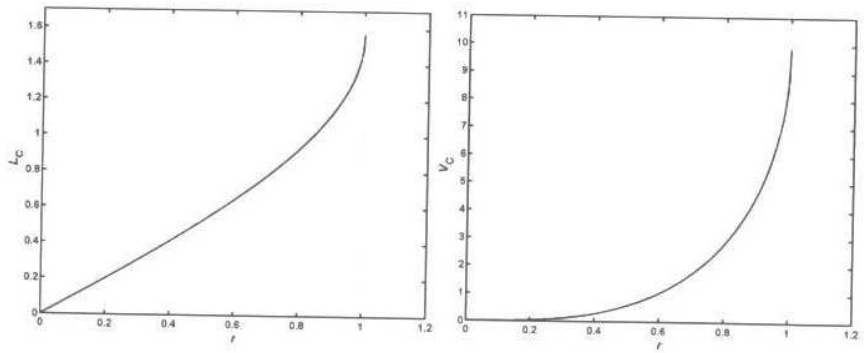


Figura 2.7 Valores de la distancia radial (izquierda) y del volumen (derecha) comóviles para una métrica de Robertson-Walker de curvatura positiva. La coordenada r está acotada y por consiguiente también la distancia radial, el perímetro, la superficie y el volumen.

De (2.53) y (2.54) se infiere que la coordenada r está acotada: $0< r <1$, por lo que la distancia radial, el perímetro, la superficie y el volumen también están acotados. Al igual que en el caso bidimensional, analizado anteriormente en este mismo apartado, **el factor de escala a se puede interpretar como el radio del universo** y la coordenada r está escalada por el radio de curvatura comóvil y es adimensional. Dado que el volumen comóvil no puede crecer más allá de π^2, se dice que el espacio es cerrado.

Curvatura negativa

La parte espacial de la métrica es

$$\mathrm{d}l^2=a^2\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1+r^2}+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2)\right]. \qquad (2.55)$$

En este caso, también las expresiones del perímetro y la superficie son las mismas que en el caso euclídeo, pero no es así en el caso de la distancia radial y el volumen:

$$L_C(r)=\int_0^r\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1+r^2}}=\mathrm{arcsenh}\,r \qquad (2.56)$$

$$V_C(r)=\int_0^r\int_{\Omega=0}^{4\pi}\frac{r^2}{\sqrt{1+r^2}}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=2\pi\left(r\sqrt{1+r^2}-\mathrm{arcsenh}\,(r)\right), \qquad (2.57)$$

magnitudes que se representan gráficamente en la figura 2.8.

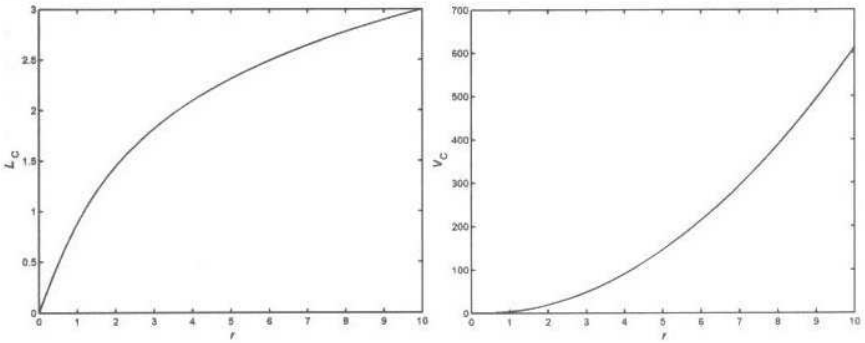


Figura 2.8 Valores de la distancia radial (izquierda) y del volumen (derecha) comóviles para una métrica de Robertson-Walker de curvatura negativa. La coordenada r no está acotada, al igual que la distancia radial, perímetro, superficie y volumen.

La distancia radial, el perímetro, la superficie y el volumen comóviles crecen sin límite cuando r, que no está acotado, crece. Al igual que en el caso euclídeo, el espacio es abierto.

En resumen:

ε	Geometría	Curvatura	r	Volumen	Espacio
0	Euclídea o plana	Nula	No acotado	No acotado	Abierto
+1	Esférica	Positiva	Acotado	Acotado	Cerrado
−1	Hiperbólica	Negativa	No acotado	No acotado	Abierto

Tabla 2.1 Características de la geometría espacial de la métrica de Robertson-Walker en función de la curvatura.

2.3.7 Formas de la métrica de Robertson-Walker

La ecuación (2.26) representa la forma *estándar* de la métrica de Robertson-Walker. Existen otras formas equivalentes de esta métrica obtenidas mediante cambios de variable más o menos elaborados (ejercicios 2.3 y 2.4) y que implican una redefinición de coordenadas. Sin embargo, se han mantenido los símbolos utilizados para designar las coordenadas comóviles y el factor de escala.

En la representación *isótropa* la métrica de Robertson-Walker adopta la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(1 + kr^2/4)^{-2}[dr^2 + r^2 d\Phi^2], \qquad (2.58)$$

donde k es la curvatura espacio-temporal o **curvatura gaussiana del espacio,** que es igual al inverso del radio de curvatura propio R_C al cuadrado, con un signo ε que es el de la forma estándar: $k = \varepsilon/R_C^2 = \varepsilon/(ar_c)^2$. Luego k tiene el signo de ε, pero depende del tiempo. Además, k tiene dimensiones del inverso de longitud al cuadrado y r tiene dimensiones de longitud, mientras que a es adimensional. Hay que señalar que en otros textos el símbolo k se utiliza para designar el signo de la curvatura. En la forma isótropa, de ahí la denominación, el término de curvatura afecta por igual a todos los términos espaciales de la métrica. Lógicamente, todas las formas de la métrica de Robertson-Walker son isótropas, pero en la forma isótropa la isotropía de la métrica queda explícita.

La representación **comóvil** de la métrica es

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[dr^2 + \Sigma^2 d\Phi^2], \qquad (2.59)$$

donde $\Sigma = \begin{cases} \operatorname{senh} r & \text{si } \varepsilon = -1, \text{ para } 0 < r < \infty \\ r & \text{si } \varepsilon = 0, \text{ para } 0 < r < \infty \\ \operatorname{sen} r & \text{si } \varepsilon = +1, \text{ para } 0 < r < \pi \end{cases}$

En este caso, cuando t, θ, y φ son constantes, la distancia propia es siempre proporcional a la coordenada radial comóvil a través del factor de escala, $D_p = ar$, independientemente de la curvatura, de ahí que se denomine comóvil.

En la forma **conforme** de la métrica,

$$ds^2 = a^2(\eta)\left\{-d\eta^2 + \left(1 + kr^2/4\right)^{-2}\left[dr^2 + r^2 d\Phi^2\right]\right\}, \qquad (2.60)$$

se ha sustituido el tiempo cosmológico t por el tiempo conforme η según: $d\eta \equiv dt/a$. En esta forma, el factor de escala afecta a coordenadas espaciales y temporales y, en el caso de rayos de luz, que siguen la geodésica $ds = 0$ con $d\Phi = 0$, se define el espacio conforme $d\chi^2 = dr^2/(1+kr^2/4)^2$ por lo que la ecuación que sigue un rayo de luz se puede expresar mediante la igualdad entre tiempo conforme y espacio conforme.

A todas estas formas hay que añadir las que se obtienen por una definición opuesta de signos de los valores propios espaciales y del tiempo.

En este texto utilizaremos, por conveniencia, la forma estándar (2.26). Al consultar otros textos es preciso asegurarse primero de la definición de signos para los valores propios, la forma de la métrica usada y el convenio de símbolos utilizado.

2.3.8 Unidades en las distintas formas de la métrica de Robertson-Walker

Ya se ha mencionado que en todas las métricas se ha adoptado c=1. Ello equivale a medir el tiempo en unidades de longitud, puesto que se está definiendo una nueva unidad de tiempo $t' = ct$. En consecuencia, $[t'] = L$. En este apartado vamos a estudiar las unidades de las coordenadas radiales, curvatura y factor de escala, de las distintas expresiones de la métrica de Robertson-Walker.

En la representación *estándar* (2.26), como ya se ha comentado, ε no tiene dimensiones, y r está escalado con el radio de curvatura comóvil y es por tanto adimensional. En cambio, a tiene dimensiones de longitud, como se deduce de multiplicar y dividir la parte espacial de la métrica por el radio de curvatura para redefinir r (véase apartado 2.3.6). Éste es el motivo por el que en este texto se designa la curvatura (k) y el signo de la curvatura (ε) por símbolos distintos: en el primer caso el factor de escala es adimensional mientras que en el segundo no.

En la representación *isótropa*, (2.58) es claro que a y kr^2 son adimensionales, de ahí que en esta representación a a se le denomine propiamente *factor de escala.*

En resumen,

estándar:	$[t]=L^1$,	$[\varepsilon]=L^0$,	$[r]=L^0$,	$[a]=L^1$
isótropa:	$[t]=L^1$,	$[k]=L^{-2}$,	$[r]=L^1$,	$[a]=L^0$
comóvil:	$[t]=L^1$,	$[\varepsilon]=L^0$,	$[r]=L^0$,	$[a]=L^1$
conforme:	$[\eta]=L^1$,	$[k]=L^{-2}$,	$[r]=L^1$,	$[a]=L^0$

No solamente se redefinirán tiempos y longitudes, sino también masas y temperaturas: $m' = Gm$ y $T' = kT$; es decir, que en este nuevo sistema de unidades $[m'] = L$, $[T']=L$. La redefinición de temperatura nos permite prescindir de la constante de Boltzmann y tiene la ventaja adicional de que permite utilizar el símbolo k para designar la curvatura espacio-temporal sin ambigüedades.

En resumen, se considerará $c = G = k = 1$, por lo que estas constantes no figuran en las ecuaciones que se van a deducir. Otros autores sí las consideran, por lo que sus definiciones de tiempo, longitud, masa y temperatura son distintas.

Estos cambios de dimensiones generan situaciones en apariencia paradójicas como medir masas o cronometrar tiempos en metros, o medir temperaturas en unidades de energía (ejercicio 2.6). Por ejemplo:

$1\ M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30}$ kg $\equiv 1.476$ km ≈ 1 km

1 año-luz $= 9.4607 \times 10^{15}$ m $\approx 10^{16}$ m

10^{10} K $\equiv 0.86$ MeV ≈ 1 MeV, o lo que es lo mismo, 1 eV$\equiv 11\,604$ K $\approx 12\,000$ K,

lo que tiene la ventaja añadida de permitir estimaciones de orden de magnitud con una cierta rapidez. Otra utilidad es que la densidad de masa se expresa en estas unidades igual que la densidad de energía de la masa en reposo.

A menudo, cuando a es propiamente un factor de escala, es decir, no tiene dimensiones, se considera $a_0 = 1$.

A veces, en algunas formas de la métrica de Robertson-Walker se utiliza R para designar al factor de escala cuando éste tiene dimensiones de longitud. En este texto se ha preferido utilizar a para designar al factor de escala, independientemente de sus unidades, para evitar posibles confusiones con una distancia radial propia. Es importante que el lector tome nota de la diferencia de convenio con respecto otros textos que pueda consultar.

2.4 Las ecuaciones de Fridman

Las ecuaciones de Fridman[14] constituyen el punto de partida de la cosmología. Si bien lo tratado hasta ahora supone una introducción necesaria y valiosa, se puede considerar que la cosmología empieza a partir de este punto y que los apartados anteriores correspondían a los prolegómenos.

[14] En textos en lengua inglesa el nombre suele transcribirse del cirílico como Friedman o Friedmann.

2.4.1 Deducción

Una vez establecidos la métrica de Robertson-Walker del universo espacialmente homogéneo e isótropo y el tensor energía-momento de un fluido perfecto, la ecuación de Einstein permite obtener dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, no lineales, que se denominan ecuaciones de Fridman[15].

Primeramente pueden calcularse mediante (2.10) los símbolos de Christoffel a partir de la métrica (2.26) y, de éstos, el tensor de Ricci utilizando (2.23) y (2.21) y el escalar de Ricci utilizando (2.22), todos ellos con dimensiones de L^{-2}):

$$\begin{aligned} R_0^0 &= 3\frac{\ddot{a}}{a}; \\ R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 &= \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(2\dot{a}^2 + 2\varepsilon)}{a^2}; \\ R_\alpha^\beta &= 0, \forall \alpha \neq \beta \\ R &= 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(\dot{a}^2 + \varepsilon)}{a^2}\right) \end{aligned} \tag{2.61}$$

Con estos datos, y el tensor energía-momento para el caso homogéneo e isótropo (2.25), ya puede aplicarse la ecuación de Einstein (2.20) para obtener

$$\rho = \frac{1}{8\pi}\left[3\frac{\left(\dot{a}^2 + \varepsilon\right)}{a^2} - \Lambda\right] \tag{2.62}$$

$$p = -\frac{1}{8\pi}\left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(\dot{a}^2 + \varepsilon)}{a^2} - \Lambda\right] \tag{2.63}$$

ecuaciones de las que inmediatamente, al ser $a(t)$, podemos deducir que $p=p(t)$ y $\rho=\rho(t)$. Por consiguiente, **existirá siempre una ecuación de estado $p=p(\rho)$**, de la que $p=p(t)$ y $\rho=\rho(t)$ son su representación paramétrica.

Sumando a (2.62) el triple de la ecuación (2.63) y arreglando de otra manera (2.62), se obtienen las **ecuaciones de Fridman**:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi\left(\rho + 3p\right) + \frac{\Lambda}{3} \tag{2.64}$$

[15] En puridad se acostumbra a denominar ecuaciones de Fridman a las correspondientes al caso $\Lambda=0$, pero en este texto, por simplicidad, se designarán como ecuaciones de Fridman las que se deducen en el caso general $\Lambda \neq 0$.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=\frac{8\pi}{3}\rho-\frac{\varepsilon}{a^2}+\frac{\Lambda}{3}, \tag{2.65}$$

ecuaciones cuya incógnita fundamental es la evolución del factor de escala a, a partir de la densidad y la presión, conocida la ecuación de estado.

Utilizando (2.34) y (2.35), las ecuaciones (2.64) y (2.65) también pueden escribirse

$$-qH^2=-\frac{4}{3}\pi(\rho+3p)+\frac{\Lambda}{3} \tag{2.66}$$

$$H^2=\frac{8\pi}{3}\rho-\frac{\varepsilon}{a^2}+\frac{\Lambda}{3} \tag{2.67}$$

Derivando (2.62) con respecto al tiempo:

$$\dot{\rho}=\frac{1}{8\pi}\frac{6\dot{a}}{a}\left(\frac{\ddot{a}}{a}-\frac{\left(\dot{a}^2+\varepsilon\right)}{a^2}\right) \tag{2.68}$$

y comparando con el resultado de sumar (2.62) y (2.63)

$$p+\rho=\frac{1}{8\pi}\left(-2\frac{\ddot{a}}{a}+2\frac{\left(\dot{a}^2+\varepsilon\right)}{a^2}\right) \tag{2.69}$$

resulta

$$\dot{\rho}=-3(\rho+p)\frac{\dot{a}}{a}, \tag{2.70}$$

independientemente del valor de la constante cosmológica.

2.4.2 Interpretación clásica de las ecuaciones de Fridman

En este apartado, y a fin de asignar un significado físico a las ecuaciones de Fridman, se emplearán varios símiles clásicos. Para el primero de ellos considérese un sistema aislado, como el universo, cuyo volumen cambia, adiabáticamente, en $\mathrm{d}V$. En ese caso, la energía interna del sistema (U) cambia en $\mathrm{d}U=-p\,\mathrm{d}V$, siendo p la presión. Como el primer principio de la termodinámica nos autoriza a escribir $U=\rho V$, donde ρ es la densidad de energía, resulta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho V)=-p\dot{V} \tag{2.71}$$

finalmente, como el volumen propio es proporcional a la tercera potencia del factor de escala (tal como se estableció en 2.3.6) y la dependencia temporal viene cargada en el factor de escala:

$$\dot{\rho}=-\frac{\dot{V}}{V}(\rho+p)=-3\frac{\dot{a}}{a}(\rho+p). \tag{2.72}$$

Luego (2.70) representa la **conservación de la energía**.

Esta ecuación ha sido deducida utilizando la conservación de la energía desde el punto de vista termodinámico. Desde un punto de vista mecánico, si la energía mecánica por unidad de masa se conserva, la suma de la energía cinética y de la energía potencial gravitatoria de una partícula es constante:

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2-G\frac{M}{R}=\text{cte}, \tag{2.73}$$

donde R es una distancia radial propia. Se ha considerado únicamente la energía cinética radial dado que la expansión del universo es radial. Teniendo en cuenta que $M=\rho V=(4/3)\pi\rho R^3$ y que las distancias propias son proporcionales a las comóviles a través del factor de escala,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=\frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{E}{a^2}, \tag{2.74}$$

donde E puede interpretarse como una energía asociada a la curvatura de la ecuación (2.65). Es una expresión similar a (2.65), salvo la constante cosmológica. Por tanto, (2.65) también representa la **conservación de la energía** (téngase en cuenta que en nuestras unidades $G=1$ y la densidad de masa es igual a la densidad de energía en reposo). Esta ecuación permite interpretar el segundo miembro de (2.65) como un balance de energías, con la **curvatura del espacio representando una energía negativa y la constante cosmológica un nivel cero (u origen) de energía.**

Finalmente, la ecuación (2.64) puede obtenerse de la segunda ley de Newton, también en componentes radiales, suponiendo que la única fuerza que actúa es la gravitación,

$$m\ddot{R}=-G\frac{Mm}{R^2}, \tag{2.75}$$

teniendo en cuenta que $M=\rho V$ y convirtiendo R al factor de escala a:

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4}{3}\pi G\rho. \tag{2.76}$$

Luego la primera ecuación de Fridman (2.64) da cuenta de la dinámica. Esta última ecuación no es exactamente igual a la primera de Fridman (2.64), puesto que la mecánica clásica no tiene en cuenta que la presión contribuye a la masa gravitatoria, ni la posible existencia de una constante cosmológica con efectos dinámicos. Efectivamente, añadir una constante positiva al segundo miembro de (2.75) se traduce en la aparición de una **constante cosmológica** en (2.76) **que por tanto cabe interpretar como una fuerza de signo opuesto a la gravitación. Es decir, una repulsión.**

Podemos concluir que **las ecuaciones de Fridman (2.64) y (2.65) representan, respectivamente, el balance de fuerzas y el balance de energías en el universo,** que permitirán estudiar la **evolución macroscópica del universo,** es decir, obtener $a(t)$.

2.5 La ecuación de estado

Las dos ecuaciones de Fridman relacionan, mediante el balance de fuerzas y de energías, tres variables entre sí: $a(t)$, $\rho(t)$ y $p(t)$. Estas dos ecuaciones incluyen, por tanto, tres incógnitas y dos parámetros libres, la curvatura y la constante cosmológica. Para resolver el sistema y obtener la evolución del universo, o sea, la evolución del factor de escala para cada curvatura, se precisa de una ecuación adicional. La ecuación que falta es la ecuación de estado, $p = p(\rho)$.

2.5.1 Ecuaciones de estado en el universo

El universo lo integran distintos componentes: fotones, neutrinos, galaxias, etc., con propiedades (masas en reposo, velocidades, etc.) muy distintas, por lo que vendrán descritos por distintas ecuaciones de estado. Además, estos componentes interaccionan débilmente entre sí, salvo en etapas breves (pero muy importantes) de la historia temprana del universo, por lo que cada uno de estos constituyentes estará representado por una ecuación de estado independiente, no acoplada con las demás (el ejercicio 2.8 proporciona un contraejemplo)[16].

Es importante señalar que un sistema termodinámico solamente tiene definida una ecuación de estado cuando existe equilibrio termodinámico; en caso contrario no es posible describir el estado del sistema con variables termodinámicas, como la temperatura, que se puedan aplicar para describir al sistema en conjunto. Por consiguiente, se admite implícitamente que en el universo existe equilibrio termodinámico, al menos en algunas de las etapas de su historia. En el capítulo sexto se hará más hincapié sobre el equilibrio termodinámico y las ecuaciones de estado.

[16] Es preciso introducir ahora las distintas ecuaciones de estado para seguir adelante con la interpretación de las ecuaciones de Fridman. El lector encontrará, en el capítulo sexto, una mejor justificación de las distintas ecuaciones de estado y de las implicaciones que las reacciones entre los distintos constituyentes del universo tienen sobre la evolución de sus densidades de energía.

Materia no relativista o en reposo

La primera ecuación de estado que cabe considerar es la de la materia no relativista, llamada también «pulverulenta». En el sistema de unidades aquí adoptado, la densidad de energía de la materia en reposo se mide en el inverso de unidades de longitud al cuadrado y se expresa como la densidad de masa, que es proporcional a a^{-3}.

La materia no relativista tiene una energía cinética despreciable frente a la energía de su masa en reposo. Por tanto, su densidad de energía ρ_m será la correspondiente a la de su masa en reposo, mientras que la presión que ejerce será despreciable, y podemos considerar $p_m = 0$.

Esta ecuación de estado se aplica tanto a la materia difusa, bariónica y no bariónica, como a las mayores agrupaciones de masa que no sufren la expansión del universo al estar internamente ligadas por la gravitación: galaxias de campo y cúmulos de galaxias. Cuando éstas se hallen suficientemente distantes entre sí, estarán afectadas por la expansión y representarán las unidades materiales del fluido cósmico perfecto que constituye el universo en la actualidad.

Radiación y materia relativista

De la mecánica estadística (se da una pequeña revisión en el capítulo sexto) se conoce que se verifica $p_r = \rho_r/3$, donde p_r y ρ_r designan, respectivamente, a la presión y la densidad de energía relativistas. Esta ecuación de estado abarcará tanto los fotones y los neutrinos como la materia relativista.

Materia difusa

En general, la ecuación de estado de cada uno de los constituyentes del universo puede considerarse representada por una relación lineal entre la presión y la densidad[17]:

$$p = w\rho, \tag{2.77}$$

donde la constante de proporcionalidad depende del constituyente considerado, y se designará w^i. La materia pulverulenta y la relativista serán, por tanto, casos particulares de este tipo de ecuación de estado de la materia difusa, con $w = 0$ y $w = 1/3$, respectivamente.

La causalidad requiere que $-1 \leq w^i \leq +1$, dado que para una ecuación de estado genérica la «velocidad del sonido» se define como $\sqrt{|dp_i/d\rho_i|}$, donde la derivada corresponde a condiciones adiabáticas, y ha de ser menor que la velocidad de la luz[18].

[17] Esta ecuación es la causa de que una diferencia en densidad de energía se traduzca en una diferencia de presión en el efecto Casimir: las láminas se atraerán porque hay menor densidad de energía entre ellas y, como ya se ha demostrado, la constante cosmológica puede asimilarse a una repulsión.

[18] Esta condición no se verifica en el caso de la llamada «energía fantasma».

2.5.2 Evolución de la densidad de energía

Para una única ecuación de estado como (2.77) obtenemos, integrando (2.70) entre el instante actual, indicado por el subíndice 0 y un instante t:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w)} . \tag{2.78}$$

Aplicando (2.78) al caso de la materia no relativista ($w = 0$) obtenemos la relación (1.30) esperada $\rho_m \propto a^{-3}$. Para la radiación y materia relativista ($w = 1/3$), $\rho_r \propto a^{-4}$ como indica (1.31).

Como se discutirá a continuación, la expresión (2.78) permite interpretar la constante cosmológica y la curvatura ε, que intervienen en el balance de energías de la segunda ecuación de Fridman (2.65), como densidades de energía correspondientes a ecuaciones de estado de $w = -1$ y $-1/3$, respectivamente. Estas ecuaciones de estado, al contrario que las anteriores, corresponden a presiones negativas.

Constante cosmológica

El término de (2.65) que contiene la constante cosmológica se puede interpretar como una densidad de energía constante,

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi}, \tag{2.79}$$

que es nula si la constante cosmológica lo es. Teniendo en cuenta (2.77), donde (2.78) indica que $w = -1$, (2.64) y (2.65), se podrán escribir,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi\left[(\rho + \rho_\Lambda) + 3(p + p_\Lambda) \right] \tag{2.80}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho + \rho_\Lambda) - \frac{\varepsilon}{a^2} \tag{2.81}$$

Al ser constante la densidad de energía ρ_Λ asociada a la constante cosmológica, su energía no disminuirá con la expansión al aumentar el factor de escala, al contrario que ρ_m y ρ_r que disminuyen como a^{-3} y a^{-4}, respectivamente. Por tanto, **la energía de la constante cosmológica será proporcional al volumen propio**. En cualquier instante de la historia del universo, volúmenes propios iguales tendrán la misma energía de constante cosmológica. Por este motivo se identifica con una energía del vacío, puesto que se puede interpretar como una energía que existe incluso cuando todas las demás densidades de energía sean nulas.

Energía de curvatura

Procediendo análogamente al caso anterior, puede definirse una densidad de energía asociada a la curvatura,

$$\rho_\varepsilon = -\frac{3\varepsilon}{8\pi a^2}, \tag{2.82}$$

que es nula si la curvatura es nula y con la particularidad de que es una densidad de energía que puede adoptar valores negativos (cuando $\varepsilon = +1$), al contrario que las definidas hasta ahora. Según (2.78) se puede identificar con una ecuación de estado del tipo representado por (2.77) con $w = -1/3$. Entonces (2.80) y (2.81) se pueden escribir,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi\left[(\rho + \rho_\Lambda) + 3(p + p_\Lambda) \right] \tag{2.83}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho + \rho_\Lambda + \rho_\varepsilon) \tag{2.84}$$

Quintaesencia

Con esta denominación se designan ecuaciones de estado del tipo de (2.77) con $-1/3 > w > -1$. Sin embargo, en este caso en general, w no es constante sino que depende de z. Su ecuación de estado se obtiene, como se verá en el capítulo quinto, postulando un campo y determinando su lagrangiano. Lo jocoso del término motiva una cierta digresión histórica sobre su origen.

El filósofo de la Magna Grecia Empédocles de Agrigento propuso, en el siglo V a.E.C.[19], que todas las cosas existentes se componían de mezclas de cuatro elementos: tierra, aire, fuego y agua en distintas proporciones. Esta idea fue admitida posteriormente por Aristóteles y pasó, por tanto, a dominar el pensamiento sobre la naturaleza en los siglos posteriores. En el siglo XIV, Johannes de Rupescissa, fraile franciscano originario de Auvernia y dedicado a la alquimia, propuso que el elixir de la larga vida obtenido a partir del *lapis philosophorum* o piedra de los filósofos no podía, por su naturaleza, estar compuesto de materia ordinaria. Tenía que estar compuesto de un quinto elemento o *quinta essentia*.

Debido a la naturaleza desconocida de esta energía oscura cosmológica (tan desconocida y tan buscada como la piedra de los filósofos), y para distinguirla de la energía oscura asociada a la constante cosmológica, se le dio la denominación de quintaesencia. Desconozco, sin embargo, si la denominación se la adjudicaron sus

[19] Antes de la era común.

defensores o sus detractores. Como *advocatus diavoli* de que se enjuicien estas ideas como algo extraño, es preciso tener en cuenta que a principios del siglo XX todavía se creía en la existencia del éter luminífero, responsable de transmitir la luz y, en general, las interacciones a distancia. Dicho éter gozaba de propiedades al menos tan exóticas como la quintaesencia cosmológica: en reposo absoluto, suficientemente tenue como para no ser detectado fácilmente, pero muy rígido para poder transmitir la vibración transversal de la radiación electromagnética.

Energía fantasma

Finalmente, existe un tipo de energía, llamada «energía fantasma» con $w < -1$. No parece existir un lagrangiano estable que la represente, y además viola la causalidad. Por estos motivos se duda de su existencia y no parece que deba ser considerada en la actualidad como un candidato a energía oscura.

En este caso la expansión llega a ser catastrófica, alcanzándose valores infinitos del factor de escala para un tiempo finito (ejercicio 3.19). Pero antes de que eso ocurra, como según la relatividad general la fuente de potencial gravitatorio es la integral de volumen de $(\rho+3p)$, se deshacen los vínculos gravitatorios entre los objetos del universo: las galaxias que componen los cúmulos, las estrellas que forman las galaxias y los planetas de los sistemas solares (Caldwell *et al.* 2003).

Resumen

La siguiente tabla resume algunos de los posibles valores de w en la ecuación de estado (2.77):

w	$\rho(a)$	Forma de la densidad de energía
$+1$	$\rho \propto a^{-6}$	Campos escalares sin masa[20], estado estacionario[21]
$+1/3$	$\rho \propto a^{-4}$	Materia relativista (p. ej. neutrinos), radiación (fotones, ondas gravitatorias)
0	$\rho \propto a^{-3}$	Materia no relativista o «pulverulenta»
$-1/3$	$\rho \propto a^{-2}$	Energía de curvatura, cuerdas cósmicas
$-2/3$	$\rho \propto a^{-1}$	Paredes de dominios
$-1/3>w>-1$	$\rho \propto a^{-3(1+w)}$	Quintaesencia, donde $w(z)$
-1	$\rho \propto a^{0}$	Constante cosmológica o energía del vacío
<-1	$\rho \propto a^{n}$, $n>0$	Energía fantasma, donde $w(z)$

Tabla 2.2 Dependencia funcional de la densidad de energía con el factor de escala para distintas ecuaciones de estado.

[20] En el capítulo quinto se verá el porqué de esta denominación.

[21] En el caso del estado estacionario, la densidad de energía es negativa, como se verá en el capítulo tercero, por lo que aunque $w = +1$, su efecto en la evolución del factor de escala es equivalente a una constante cosmológica.

El estado estacionario se analizará en el capítulo tercero, mientras que las paredes de dominios y cuerdas cósmicas se tratarán brevemente en el capítulo quinto. Todas las ecuaciones de estado con $w < -1/3$ representan la denominada **energía oscura**, que como se verá más adelante es la responsable de la aceleración del universo.

De la dependencia funcional de la densidad de energía con respecto el factor de escala puede deducirse que, a medida que el universo se expande y aumenta a, van dominando distintos tipos de ecuaciones de estado. En los primeros instantes los fotones y las partículas relativistas representaban la contribución dominante a la densidad de energía. En el capítulo tercero se analizará la evolución del factor de escala según los distintos tipos de energía dominante.

2.5.3 La incorporación de la ecuación de estado en las ecuaciones de Fridman

Si no existen interaciones entre los distintos constituyentes del fluido cósmico, según la ley de Dalton la presión total p vendrá dada por la suma de las presiones parciales p_i de cada uno de ellos. Además, la densidad total de energía ρ será igual a la suma de todas las densidades de energía ρ_i de cada constituyente. Es decir:

$$p = \sum_i p_i = w^i \rho_i \tag{2.85}$$

$$\rho = \sum_i \rho_i \tag{2.86}$$

En un caso general, estas son la presión y la densidad que figuran en las ecuaciones de Fridman (2.64), (2.65) y la ecuación de la densidad (2.70),

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi\left(\sum_i \rho_i + 3w^i\rho_i\right) \tag{2.87}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\sum_i \rho_i \tag{2.88}$$

$$\dot{\rho} = -3\left(\sum_i \rho_i + w^i\rho_i\right)\frac{\dot{a}}{a}, \tag{2.89}$$

donde se han incluido en los sumatorios las densidades de energía de curvatura y de constante cosmológica. En el caso de que uno de los constituyentes domine energéticamente, la contribución de los demás puede despreciarse y el factor de escala seguirá la evolución que proporcione la ecuación de Fridman (2.88) con la ecuación de estado del constituyente energéticamente dominante. Ésta es la aproximación usualmente adoptada en cosmología y generalmente válida para la mayor parte de la historia del universo.

Dado que las densidades de energía son positivas[22], si $w \geq -1$,

$$p_i + \rho_i = (w^i + 1)\rho_i \geq 0. \tag{2.90}$$

Finalmente, hay que destacar una vez más que **en un caso general w^i puede depender del tiempo.**

2.6 Implicaciones de las ecuaciones de Fridman y la ecuación de estado

A pesar de la aparentemente escasa información que, debido a un exceso de incógnitas, proporcionan las ecuaciones de Fridman, es posible obtener de forma inmediata y, a lo sumo con unas pocas suposiciones, multitud de inferencias acerca de sus posibles soluciones y su aplicación al universo. **En lo que sigue se indicarán con un subíndice 0 los valores de variables en el instante actual.**

2.6.1 El universo no es estático

Las ecuaciones de Fridman (2.64) y (2.65) indican que el universo no será en general estático. Ésta es una conclusión muy satisfactoria, habida cuenta de las razones sólidas en favor de la expansión y estudiadas en el capítulo primero: **la expansión del universo es una consecuencia natural de las ecuaciones de Fridman.**

Es sencillo demostrar (ejercicio 2.9) que para conseguir una solución estática ($a = a_0$) como caso particular de las ecuaciones de Fridman, no es suficiente con imponer $\dot{a} = 0$ en (2.65), sino que además es necesario conseguir $\ddot{a} = 0$ en (2.64). En caso contrario, y de acuerdo con la interpretación clásica de las ecuaciones de Fridman (2.4.2), existiría una fuerza que rompería el equilibrio energético. Para que (2.65) sea nula es necesario, para densidades de energía positivas, que la curvatura sea positiva para que exista un término negativo que permita anular la primera derivada del factor de escala. De esta manera se obtiene una condición sobre la densidad de energía. Si se admite como hipótesis una ecuación de estado w de materia difusa (2.77) más una constante cosmológica, la segunda derivada se anulará para determinados valores de $w > -1/3$. Los resultados (ejercicio 2.10) se resumen en la tabla 2.3, que representa las soluciones estáticas de las ecuaciones de Fridman.

[22] Salvo en los casos de energía de curvatura y en el del universo estacionario, como se estudiará en el capítulo tercero. Sin embargo, esta afirmación es válida para los modelos de Fridman siempre que no se considere la curvatura como una densidad de energía, y éstas son las condiciones en las que se hará uso de esta relación.

Λ	ε	ρ_{w0}	w	Comentarios
0	+1	$\frac{3}{8\pi a_0^2}$	$-1/3$	Universo dominado por cuerdas cósmicas
$\neq 0$	+1	$\frac{3-\Lambda a_0^2}{8\pi a_0^2}$	$\frac{1-\Lambda a_0^2}{\Lambda a_0^2 - 3}$	La densidad de energía de ecuación de estado w equilibra la constante cosmológica

Tabla 2.3 Valores que permiten obtener un universo estático con y sin constante cosmológica (ejercicio 2.10). Las afirmaciones de la última columna se obtienen de considerar el balance de fuerzas representado por la ecuación (2.64). En el caso del balance energético representado por la ecuación (2.65) habría que añadir el término de energía de curvatura. La solución estática $\Lambda = 0$, $w = -1/3$ es la única estable. Las restantes, cuando $\Lambda \neq 0$, son inestables (ejercicio 2.11).

Sin embargo, **las soluciones estáticas son en general inestables:** salvo en el caso $\Lambda = 0$, $w = -1/3$, cualquier pequeña perturbación provocaría la pérdida del equilibrio con la subsiguiente expansión o contracción (ejercicio 2.11). Representan los llamados **universos holgazanes**[23]: surgen de la perturbación de un universo en equilibrio, estado en el que estos universos pueden permanecer un intervalo de tiempo más o menos dilatado.

Es importante señalar que **la no linealidad de la ecuación de Fridman** (2.88) **indica que sus soluciones tanto pueden ser universos en expansión** ($\dot{a} > 0$) **como en contracción** ($\dot{a} < 0$). La solución elegida dependerá de las condiciones iniciales. En este texto *se dará preferencia a las soluciones en expansión, en especial las que tienen su origen en una «Gran Explosión» inicial*, puesto que a partir de las observaciones disponibles ya se ha visto en el capítulo primero que ésta es previsiblemente la situación que corresponde a nuestro universo.

2.6.2 La densidad de energía disminuye con la expansión

En nuestro universo $\dot{a} > 0$, puesto que se halla en expansión. En un universo en expansión (2.90) aplicado a (2.70) indica que $\dot{\rho} < 0$, excepto en el caso extremo $p = -\rho$, que sabemos que corresponde a un universo dominado por la constante cosmológica y en el que se verifica $\dot{\rho} = 0$. Es decir: la densidad de energía es constante e igual a la de la constante cosmológica. Por consiguiente, salvo en ese caso, podemos concluir que al aumentar a la densidad disminuye si la energía se conserva. Efectivamente, si el factor de escala aumenta con el tiempo, (2.78) indica que la densidad disminuye con el tiempo, salvo en el caso de la constante cosmológica ($w = -1$). La energía fantasma, para la que (2.90) no es válida, aumenta con a en vez de disminuir.

[23] Del inglés *loitering models*.

2.6.3 La expansión no es constante

Si la velocidad de expansión $\dot{a}$ fuera constante, $\ddot{a} = 0$, mientras que (2.87) indica que eso solamente sucede en ciertos casos, cuando $\rho+3p=0$. En general, la expansión no es constante, o bien se está desacelerando ($\ddot{a} < 0$) o bien se está acelerando ($\ddot{a} > 0$) cada vez más. En la tabla 2.4 se analizan los signos de la segunda derivada del factor de escala para el caso de constante cosmológica junto con otra ecuación de estado.

	Casos	Tipo de expansión
$\Lambda = 0$	$p > -\rho/3$	Desacelerada
	$p = -\rho/3$	Constante
	$p < -\rho/3$	Acelerada
$\Lambda \neq 0$	$p > -\rho/3$	Desacelerada primero y acelerada después
	$p \leq -\rho/3$	Acelerada

Tabla 2.4 Signos de la segunda derivada del factor de escala según la constante cosmológica y una ecuación de estado adicional.

Consideremos en más detalle el cuarto caso de la tabla 2.4: dado que en un universo en expansión el primer término del segundo miembro de (2.64) disminuye con el tiempo, puesto que en el apartado anterior se ha demostrado que en este caso la densidad disminuye, mientras que el segundo término es constante y ambos son de signos opuestos, entonces existirá un instante de tiempo cosmológico t' para el que $\ddot{a} = 0$. Éste es un **punto de inflexión**: para $t < t'$ es $\ddot{a} < 0$, la expansión es desacelerada, mientras que para $t > t'$ es $\ddot{a} > 0$ y la expansión es acelerada al pasar a dominar la constante cosmológica en (2.64).

2.6.4 Posible existencia de singularidades

La existencia de un instante inicial en el cual el factor de escala es nulo introduce singularidades incómodas. Dado que $k=\varepsilon/R_C^2$, si $a\to 0$ para algún valor de t, entonces $k\to\infty$ (si $\varepsilon \neq 0$), por tanto **se obtiene una singularidad de curvatura espacio-temporal.** Además, cuando $a\to 0$, entonces $\rho\to\infty$ (2.78), salvo en el caso de un universo dominado por la constante cosmológica ($w = -1$). Por tanto, **resulta también una singularidad material.**

No obstante, la existencia o no de una singularidad dependerá de la ecuación de estado dominante[24]. En efecto, (2.65) muestra que el factor de escala no puede tender a cero para cualquier curvatura y ecuación de estado. Por ejemplo, si $w < -1/3$ y $\varepsilon = +1$, para un tiempo suficientemente pequeño, dominará el término de curvatura, que es negativo, dando una solución imaginaria. Por consiguiente, en un universo de estas características el origen del tiempo cosmológico ($t = 0$) corresponde a una situación en la que $a \neq 0$, para el valor del factor de escala que anula (2.65). Luego, dependiendo de la curvatura y de la ecuación de estado puede haber universos donde el factor de escala no pueda tomar un valor arbitrariamente pequeño cuando el tiempo cosmológico tienda a cero.

[24] Además dependerá del modelo de universo: un universo estático o estacionario puede no tener singularidad. Para ello hay que suponer, o bien que ha sido creado en un instante inicial con el aspecto actual (lo cual no deja de ser una singularidad), o bien que no tiene un origen ni tendrá un fin. Además, como se tratará en el capítulo quinto, los efectos cuánticos no permiten afirmar que exista singularidad.

2.6.5 La curvatura y la densidad

Densidad crítica y densidades adimensionales

Si en (2.88) se separa explícitamente la energía de curvatura se obtiene

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\sum_i \rho_i - \frac{\varepsilon}{a^2}. \tag{2.91}$$

La curvatura es nula si y sólo si la densidad es igual a la **densidad** llamada **crítica** ρ_c,

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi}, \tag{2.92}$$

que en general será una función del tiempo puesto que H es una función del tiempo, y que nos permite definir las **densidades adimensionales de energía,** referidas a dicha densidad crítica,

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_c} \equiv \sum_i \Omega_i, \tag{2.93}$$

donde Ω es la densidad adimensional total de energía (salvo la de curvatura) y Ω_i son las densidades adimensionales de energía de cada ecuación de estado. En general $\Omega(t)$ y $\Omega_i(t)$ puesto que $\rho_i(t)$ y $\rho_c(t)$. Esta afirmación incluye la constante cosmológica, porque aunque ρ_Λ sea constante (2.79), Ω_Λ en general depende del tiempo como se deduce de la definición de densidad adimensional (2.93) y la dependencia de la densidad crítica (2.92) con H, salvo que domine la constante cosmológica, como se demuestra fácilmente.

De (2.65), (2.34), (2.93) y (2.92),

$$\frac{\varepsilon}{a^2}=(\Omega-1)H^2 \tag{2.94}$$

que permite concluir que, en cualquier instante de tiempo,

$$\begin{cases}\varepsilon=0\Leftrightarrow\Omega=1\Leftrightarrow\rho=\rho_c\\ \varepsilon=+1\Leftrightarrow\Omega>1\Leftrightarrow\rho>\rho_c\\ \varepsilon=-1\Leftrightarrow\Omega<1\Leftrightarrow\rho<\rho_c.\end{cases} \tag{2.95}$$

La ecuación (2.94) también puede escribirse, teniendo en cuenta (2.34),

$$\Omega=\frac{\varepsilon}{\dot{a}^2}+1, \tag{2.96}$$

que pone de manifiesto explícitamente la dependencia con el tiempo de la densidad adimensional salvo en el caso particular de velocidad de expansión constante (véase tabla 2.4 para las condiciones en que se da dicho caso).

En consecuencia, según (2.96), **en un universo euclídeo la densidad adimensional no depende del tiempo, sino que es siempre igual a la unidad**, y por tanto la densidad de energía del universo varía como la densidad crítica. **En un universo de curvatura positiva, la densidad adimensional es mayor que la unidad y la densidad de energía es mayor que la densidad crítica aunque puede tomar valores tan próximos a la densidad crítica como se quiera. En un universo cuya curvatura sea negativa, la densidad de energía es menor que la densidad crítica y la densidad adimensional es siempre menor que la unidad, pudiendo adoptar valores tan próximos a cero como se quiera.** En ambos casos la densidad adimensional tenderá a la unidad si $\dot{a}\to\infty$.

El valor de la densidad adimensional en el momento actual se denomina parámetro de densidad, tanto referido a la densidad total Ω_0 como a la correspondiente a cada ecuación de estado Ω_{i0},

$$\Omega_0\equiv\frac{\rho_0}{\rho_{c0}}=\sum_i\frac{\rho_{i0}}{\rho_{c0}}\equiv\sum_i\Omega_{i0}. \tag{2.97}$$

Estos valores sí son, obviamente, constantes.

La densidad adimensional de curvatura

De (2.82), (2.93) y (2.92), se obtiene la expresión para la densidad adimensional de la energía de curvatura,

$$\Omega_\varepsilon=\frac{-\varepsilon}{a^2H^2}\text{, lo que implica que cuando }\begin{cases}\varepsilon=+1 & \text{es} & \Omega_\varepsilon<0\\ \varepsilon=0 & \text{es} & \Omega_\varepsilon=0\\ \varepsilon=-1 & \text{es} & \Omega_\varepsilon>0\end{cases} \tag{2.98}$$

expresión que permite escribir (2.93) de la forma,

$$\Omega=\sum_i\Omega_i=1, \tag{2.99}$$

igualdad que es válida para cada instante de tiempo cosmológico, *siempre que las densidades adimensionales de energía incluyan la energía de curvatura*. En caso contrario la igualdad que se verifica es (2.93).

Sustituyendo en (2.99) la definición de densidad adimensional de (2.93), la expresión de las densidades de energía en función del factor de escala (2.78), utilizando (2.92) para la expresión de la densidad crítica y aplicando otra vez (2.93) y (2.92) en el instante $t=t_0$, para expresar la densidad actual de energía en función del parámetro de densidad, se obtiene

$$H=H_0\sqrt{\sum_i\Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w^i)}}. \tag{2.100}$$

Ecuación que es válida *siempre que se incluya la curvatura como una densidad de energía* y que, como se verá en los capítulos tercero y cuarto, permite una fácil integración numérica para obtener edades y distintas medidas de distancia en el universo en función del desplazamiento al rojo.

En este texto se ha preferido en general, salvo cuando su uso simplifica el problema, como es el caso de integraciones numéricas, no utilizar el concepto de energía de curvatura porque este autor considera que es un tanto artificioso. En efecto, la densidad de energía de curvatura puede ser negativa, lo cual es un concepto un tanto extraño. Por otro lado, el cambio de signo de la densidad de energía de curvatura con respecto a ε implicado en (2.98) puede inducir a confusión. Finalmente este autor opina que es pedagógicamente más claro separar el término de curvatura de las restantes densidades de energía.

2.6.6 La curvatura, la ecuación de estado y el carácter de la expansión

En (2.6.3) se ha analizado el papel de la constante cosmológica y de las distintas ecuaciones de estado en la primera ecuación de Fridman (2.64), que en (2.4.2) se ha interpretado como un balance de fuerzas. Sin embargo, en dicha ecuación no aparece la curvatura, que en cambio sí aparece en el balance de energías representado por (2.65), ecuación que se procederá a analizar ahora.

Del cuadrado de la ecuación (2.100) rescrita en función de los factores de escala y separando explícitamente la densidad de energía de curvatura, se obtiene.

$$\dot{a}^2 = H_0^2 a_0^2 \left[\sum_i \Omega_{i0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w^i)-2} + \Omega_{\varepsilon 0} \right] \tag{2.101}$$

Escalando el factor de escala por a_0: $\tilde{a} \equiv a/a_0$ y despejando el parámetro de curvatura,

$$\Omega_{\varepsilon 0} = \frac{\dot{\tilde{a}}^2}{H_0^2} - \sum_i \frac{\Omega_{i0}}{\tilde{a}^{3(1+w^i)-2}} \tag{2.102}$$

Como esta ecuación procede de (2.65), representa un balance de energías, que se puede interpretar como que la «energía total» $\Omega_{\varepsilon 0}$, que es constante, es igual a la «energía cinética», representada por el primer término del segundo miembro de (2.102), añadida a la «energía potencial efectiva» representada por el segundo término del segundo miembro de (2.102). La particularidad de (2.102) es que la energía total puede ser positiva, negativa o nula según la curvatura sea negativa, positiva o nula.

Finalmente, el sumatorio de (2.102) puede considerarse, por la propiedad asociativa de la suma, descompuesto en la suma para todas las densidades de energía con $w^i \geq -1/3$, y para todas las densidades de energía con $w^j < -1/3$. En el primer caso $\alpha^i \equiv 3(1+w^i)-2 \geq 0$, y en el segundo $-\beta^j \equiv 3(1+w^j)-2 < 0$,

$$\Omega_{\varepsilon 0} = \frac{\dot{\tilde{a}}^2}{H_0^2} - \sum_i \frac{\Omega_{i0}}{\tilde{a}^{\alpha^i}} - \sum_j \Omega_{j0} \tilde{a}^{\beta^j} \tag{2.103}$$

El sumatorio para las α^i es una función que en general diverge cuando $\tilde{a} = 0$ y que tiende a cero cuando $\tilde{a} \to \infty$ (salvo que solamente comprenda la ecuación de estado con $w^i = -1/3$, en cuyo caso toma un valor constante). En cambio, el sumatorio para las β^j es una función que se anula cuando $\tilde{a} = 0$ y que diverge cuando $\tilde{a} \to \infty$. En la figura 2.9 se representa cada término de la energía potencial efectiva de (2.103) frente a $\tilde{a}$. Para cada valor de $\tilde{a}$, la diferencia entre la energía total $\Omega_{\varepsilon 0}$ y el valor de la energía potencial efectiva es igual a la energía cinética, que ha de ser positiva. Como muestra la figura 2.9, cuando la energía total es positiva o nula, lo que según (2.82) corresponde, respectivamente, a los casos de **curvatura negativa o nula,** no existen restricciones al valor que puede adoptar $\tilde{a}$, **la expansión es siempre ilimitada.** En cambio cuando la energía total es negativa, o sea, la curvatura es positiva, el carácter de la expansión depende de las ecuaciones de estado presentes en el universo.

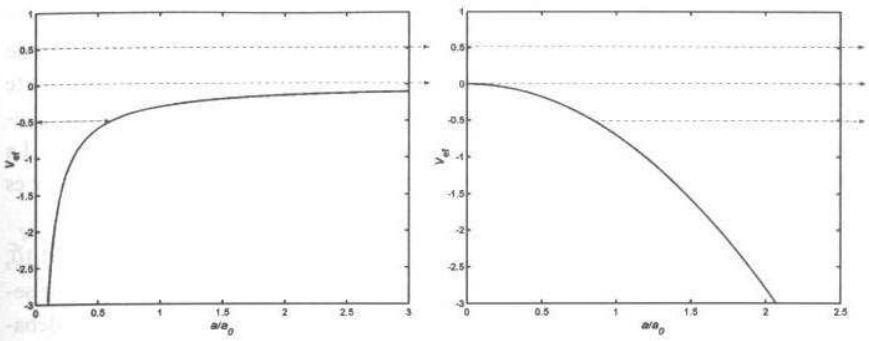


Figura 2.9 a) A la izquierda, la energía potencial de (2.103) en el caso en que solamente existan términos en α^i. Cuando la energía total es negativa, es decir, la curvatura es positiva, la expansión del universo está limitada y la velocidad de expansión se anula para un valor finito de $\tilde{a}$, puesto que el término de energía cinética de (2.103) no puede ser negativo. Cuando la energía total es nula, la curvatura es nula y el universo se expande hasta el infinito donde la velocidad de expansión se anula. Cuando la energía total es positiva la expansión también es ilimitada pero la velocidad de expansión en el infinito no es nula. Se ha representado el caso Ω_{m0} =0.3. b) Derecha, la energía potencial cuando solamente existan términos en β^j. La expansión siempre es ilimitada y acelerada, pero cuando la energía total es negativa (la curvatura es positiva), el factor de escala no puede anularse. Se ha representado el caso $\Omega_{\Lambda 0}$ =0.7.

Si en (2.103) **solamente existen términos en** α^i (figura 2.9a), cuando la energía **total** $\Omega_{\varepsilon 0}$ es negativa (**curvatura positiva**), el universo puede expandirse desde $\tilde{a} = 0$ **hasta** el valor máximo de que anula el término de energía cinética de (2.103) y que corresponde a la abscisa en que la energía potencial es igual a la energía total. Valores mayores de $\tilde{a}$ implicarían que el término de energía cinética de (2.103) es negativo, lo cual carece de sentido físico. En estas circunstancias **un universo puede expandirse desde una Gran Explosión hasta un valor máximo del factor de escala en el cual la expansión se detiene y el universo se colapsa.** Cuando la energía total es positiva o nula, lo que corresponde al caso de **curvatura negativa o nula,** la **expansión es ilimitada y** la energía cinética tiende a la energía total cuando $\tilde{a} \to \infty$. Es decir, **la velocidad de expansión en el infinito es igual a** $a_0 H_0 \sqrt{\Omega_{\varepsilon 0}}$ como se deduce de (2.103), que según (2.98) es igual a **cero si la curvatura es nula y es igual a la unidad si la curvatura es negativa.** En todos los casos, **la expansión es desacelerada** puesto que, como se deduce de la figura 2.9a, la velocidad de expansión diverge en el origen y disminuye cuando aumenta el factor de escala. Sin embargo, **cuando la curvatura es positiva, llega un momento en que la expansión se detiene y le sigue una fase de contracción acelerada.**

Si en (2.103) **solamente existen términos en** β^j (figura 2.9b), **la expansión siempre es ilimitada, y la velocidad de expansión diverge cuando** $\tilde{a} \to \infty$. Es decir, **la expansión es acelerada** puesto que la energía cinética aumenta. Pero cuando la energía total $\Omega_{\varepsilon 0}$ es negativa, es decir, **la curvatura es positiva,** existe un valor mínimo de $\tilde{a}$ que anula el término de energía cinética de (2.103) y que corresponde a la abs-

cisa en que la energía potencial es igual a la energía total. Valores de $\bar{a}$ menores implicarían que el término de energía cinética de (2.103) es negativo, lo cual carece de sentido físico. En estas circunstancias **un universo puede expandirse solamente partiendo de un valor finito del factor de escala.** El factor de escala solamente puede anularse cuando la curvatura es negativa o nula como muestra la figura 2.9b. **La velocidad de expansión inicial es nula cuando la curvatura es positiva o nula, y es igual a** $a_0 H_0 \sqrt{\Omega_{\varepsilon 0}}$, es decir: **a la unidad, cuando la curvatura es negativa.**

Cuando existen términos en α^i **y en** β^j, situación representada en la figura 2.10, **existe un valor negativo del parámetro de densidad de energía de curvatura,** que según (2.99) depende de los valores de los restantes parámetros de densidad, **por debajo del cual, dependiendo del factor de escala inicial, la expansión puede estar acotada o no, y por encima del cual siempre es ilimitada.** En el primer caso cabe distinguir dos situaciones: si el factor de escala inicial es nulo, primero tiene lugar una expansión desacelerada seguida de una contracción acelerada; en cambio, si el factor de escala inicial es suficientemente grande, la expansión es ilimitada y acelerada desde el principio. En el segundo caso la expansión es primero desacelerada hasta el valor de $\bar{a}$ para el que la energía potencial es máxima, y acelerada a partir de este valor. **La velocidad de expansión diverge en el origen y en el infinito y es mínima en el punto de inflexión.**

Es preciso señalar que, desde un punto de vista matemático, el factor de escala inicial no tiene por qué ser nulo o tal que la energía cinética sea nula. Puede adoptar un valor cualquiera, dado por las condiciones iniciales, siempre que verifique que la energía cinética de (2.103) sea positiva. Además, la solución tampoco tiene por qué ser necesariamente un universo en expansión: **un universo en contracción es también una solución válida de las ecuaciones de Fridman para los mismos valores de los mismos parámetros de densidad** (ejercicio 3.29). *En este apartado se han priorizado las soluciones en expansión solamente porque nuestro universo está en expansión.* Como ya se ha señalado, este texto se centrará en el estudio de modelos en fase de expansión. Finalmente, otra solución posible es que tenga lugar una contracción inicial seguida de una expansión que, dependiendo de los parámetros de densidad, ocurrirá cuando el factor de escala se anule o cuando en (2.103) se anule la energía cinética porque la energía potencial efectiva se torne igual a la total. Son los llamados **universos rebote**[25,26], que pueden tener lugar para cualquier curvatura y ecuación de estado (ejercicio 3.29). Un caso particular de universo rebote sería el **universo oscilante,** cuando la expansión estuviera limitada, el rebote ocurriese en $a = 0$, y el universo se contrajese y expandiese sucesiva y repetidamente de forma indefinida.

La siguiente tabla resume estos resultados:

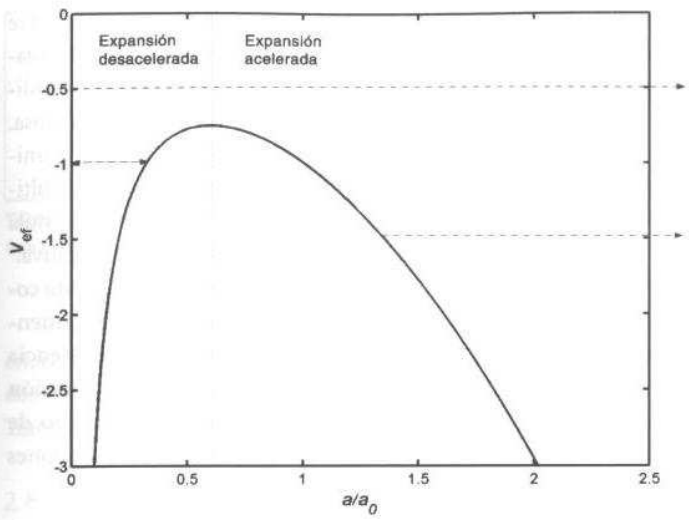


Figura 2.10 En un caso general en que existan términos en α^i y en β^j, existe un valor negativo del parámetro de densidad de energía de curvatura por debajo del cual la expansión puede ser limitada o ilimitada, dependiendo de las condiciones iniciales. Para valores mayores del parámetro de densidad de energía de curvatura la expansión es ilimitada. En este caso, la expansión es primero desacelerada y luego acelerada, y la velocidad de expansión adopta un valor mínimo en el punto de inflexión. Se ha representado el caso $\alpha^1=1$ ($w^i=0$), $\beta^j = 2$ ($w^i=-1$) con $\Omega_{\beta 0}\equiv\Omega_{m0}=0.3$ y $\Omega_{\beta 0}\equiv\Omega_{\Lambda 0}=0.7$. Véase el texto para más detalles.

Ecuaciones de estado	ε	Expansión		Velocidad de expansión ($\dot{a}$)	
				Inicial	Asintótica
$w^i \geq -1/3$	+1	Limitada	Desacelerada	Diverge	–
	0	Ilimitada			0
	−1				1
$w^i < -1/3$	+1[27]	Ilimitada	Acelerada	0	Diverge
	0				
	−1			1	
$w^i \geq -1/3$ y $w^i < -1/3$	+1[28]	Limitada	Desacelerada	Diverge	–
		Ilimitada	Acelerada	0	Diverge
	0	Ilimitada	Desacelerada primero y acelerada después	Diverge	Diverge
	−1				

Tabla 2.5 Carácter de la expansión y valores de la primera derivada del factor de escala dependiendo de la curvatura y la ecuación de estado. Una expansión limitada implica un colapso final. Las ecuaciones de estado del tipo $w^i < -1/3$ rompen la correspondencia entre el signo de la curvatura, que indica si el universo es cerrado o abierto (2.3.6) y el carácter limitado o ilimitado de la expansión, así como con el valor asintótico de la primera derivada del factor de escala. Compárese con la tabla 2.4.

[25] A veces se designan como universos rebote solamente aquellos en los que el rebote, o paso de contracción a expansión, tiene lugar en $a \neq 0$. Con esto se evitan problemas con un valor del factor de escala que llegue a ser tan reducido, que los efectos cuánticos sean notables en una teoría no-cuántica como la relatividad general. Debido a este desconocimiento, no se puede asegurar con propiedad que pueda existir un rebote en $a = 0$. Éste es el problema del universo oscilante. En cambio, si en su contracción el universo llega a un límite en que se anula la energía cinética cuando $a \neq 0$, se encuentra en una situación de equilibrio inestable (2.6.1) en que la única alternativa es expandirse.

[26] Del inglés *bounce universes*.

[27] En este caso el factor de escala no puede anularse.

[28] En este caso el carácter de la expansión depende de la energía total y del valor inicial del factor de escala.

Para ecuaciones de estado con $w^i \geq -1/3$, existe una correspondencia clara entre la curvatura y los valores que puede adoptar el factor de escala y su primera derivada: cuando la curvatura es positiva, el universo es espacialmente cerrado, como indica la métrica (2.3.6) y el universo se expande hasta un cierto valor y luego se colapsa. Por el contrario, cuando la curvatura es nula o negativa, la métrica indica que el universo es espacialmente abierto (2.3.6), y éste se expande ilimitadamente. En este último caso la diferencia reside en el valor de la primera derivada en el infinito: es nula cuando la curvatura es nula y toma un valor finito cuando la curvatura es negativa.

En cambio, **cuando *además* existen ecuaciones de estado con $w^i < -1/3$, esta correspondencia se rompe**: pueden existir universos que se expandan ilimitadamente y de forma acelerada cuando la curvatura es positiva. Sin embargo, la existencia de ecuaciones de estado con $w^i < -1/3$ no implica necesariamente que la expansión sea ilimitada, es preciso además que los parámetros de densidad de este tipo de ecuaciones de estado dominen sobre los parámetros de densidad de las ecuaciones de estado con $w^i \geq -1/3$.

2.6.7 La desaceleración y la densidad

Combinando sucesivamente (2.87), (2.35), (2.93) y (2.92) puede obtenerse

$$q = \frac{1}{2}\left(\sum_i \Omega_i + 3w^i\Omega_i\right) \tag{2.104}$$

donde el segundo miembro es un sumatorio de la contribución de todas las densidades de energía, incluyendo la constante cosmológica. Por ejemplo, un universo de materia pulverulenta y constante cosmológica será acelerado cuando $\Omega_\Lambda > \Omega_m/2$. La tabla 2.6 muestra algunos ejemplos *en los que solamente domina una única ecuación de estado.*

w	Densidad de energía	q
1/3	Radiación	Ω_r
0	Pulverulenta	$\Omega_m/2$
− 1/3	Cuerdas cósmicas	0
− 2/3	Paredes	$-\Omega_p/2$
− 1	Constante cosmológica	$-\Omega_\Lambda$

Tabla 2.6 Valores de la desaceleración para distintas ecuaciones de estado dominantes. En un caso general, la desaceleración vendrá dada por la suma (2.104).

Asimismo, *cuando domina una única ecuación de estado*, (2.104) junto con (2.95) proporcionan una relación directa entre la curvatura y la desaceleración como se muestra en la tabla 2.7.

ε	Ω	q				
		$w = 1/3$	$w = 0$	$w = -1/3$	$w = -2/3$	$w = -1$
+1	> 1	> 1	$> 1/2$	0	$< -1/2$	< −1
0	1	1	$1/2$	0	$-1/2$	−1
−1	< 1	< 1	$< 1/2$	0	$> -1/2$	> −1

Tabla 2.7 Ejemplos de valores de la desaceleración para distintas curvaturas cuando domina una única ecuación de estado.

Finalmente, (2.104) pone de manifiesto una vez más que, si una densidad de energía con una ecuación de estado con $w < -1/3$ domina sobre las otras densidades de energía, la desaceleración es negativa, es decir, la expansión es acelerada. También que la expansión es constante ($q = 0$) si $w = -1/3$ domina.

2.6.8 La edad del universo y la constante de Hubble

En el capítulo primero se ha demostrado cualitativamente la relación que existe entre el inverso de la constante de Hubble y la edad del universo en función de la aceleración. Utilizando las ecuaciones de Fridman es posible deducir dicha relación de forma algo más rigurosa, a partir de (2.100) expresada en función del factor de escala y teniendo en cuenta la definición de H (2.34),

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \sum_i \Omega_{i0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w^i)} \tag{2.105}$$

Integrando esta ecuación de variables separadas entre el origen $t = 0$ cuando $a = 0$ y un tiempo t, se tiene[29],

$$t = \int_0^t dt = \int_0^a \frac{da}{H_0 a\sqrt{\sum_i \Omega_{i0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w^i)}}} \tag{2.106}$$

si se desprecia la contribución de la curvatura, lo cual equivale a suponer que el *universo es de curvatura nula, y se supone que domina energéticamente una única ecuación de estado,* entonces la integración es inmediata. En efecto, en el instante de tiempo actual o edad del universo t_0, para el cual $a = a_0$,

[29] Se están seleccionando, por tanto, universos en expansión que tienen su origen en una «Gran Explosión» inicial, como sería el caso de nuestro universo.

$$t_0 \approx \frac{2}{3(1+w)H_0} \tag{2.107}$$

puesto que al despreciar la curvatura podemos considerar, según (2.95), $\Omega_0 = 1$.

Esta expresión no es, obviamente, válida para el caso de un universo euclídeo dominado por constante cosmológica. La razón es que al integrar (2.106) el factor de escala no puede anularse, por lo que tomará un valor finito a_1 en el origen de tiempos cosmológicos. En este caso, se obtiene

$$t_0 \approx \frac{\ln(a_0/a_1)}{H_0}. \tag{2.108}$$

Por consiguiente, en un universo euclídeo dominado por constante cosmológica, la edad puede adoptar un gran rango de valores, dependiendo de las condiciones iniciales.

La tabla 2.8 aplica estos resultados a algunas ecuaciones de estado. Puede comprobarse que para $w < -1/3$ el inverso de la constante de Hubble pasa de ser una cota superior a una cota inferior de la edad del universo, *siempre que solamente haya dominado una única ecuación de estado* o los periodos en que hayan dominado las demás ecuaciones de estado puedan despreciarse.

w	Edad (H_0^{-1})
1/3	1/2
0	2/3
−1/3	1
−2/3	2
−1	$\ln(a_0/a_1)$

Tabla 2.8 Edad de un universo euclídeo dominado por una única ecuación de estado, para algunos ejemplos de ecuaciones de estado. A medida que las ecuaciones de estado corresponden a presiones más negativas, las edades son mayores, para un mismo valor de la constante Hubble. A partir de $w = -1/3$, el inverso de H_0 es una cota inferior a la edad del universo, siempre que *solamente haya dominado* esa ecuación de estado.

Luego (2.107) puede proporcionar una estimación de la edad del universo conocida la constante de Hubble, si se admite un universo euclídeo, suponiendo que domina energéticamente una única ecuación de estado, y que dicha ecuación de estado *siempre ha dominado* en toda la historia del universo. En caso contrario, habrá correcciones más o menos severas, dependiendo de los parámetros de densidad de las distintas ecuaciones de estado.

Dado el valor de la constante de Hubble puede estimarse la edad de nuestro universo admitiendo el dominio energético de distintas ecuaciones de estado para un universo de curvatura nula. Por ejemplo: si dominase la materia pulverulenta la edad sería de 1.0×10^{10} años, mientras que si dominase una quintaesencia ($w = -2/3$) sería de 3.0×10^{10} años (ejercicio 2.17). El primer valor es claramente incompatible con la edad de los cúmulos globulares más viejos de nuestra Galaxia (véase capítulo primero), por lo que ya se está en condiciones de afirmar que las hipótesis de partida no son válidas. En el capítulo tercero se establecerán los métodos para determinar la edad de un universo denominado simbiótico, en el que coexisten varias ecuaciones de estado.

2.6.9 Evolución de un universo euclídeo

Finalmente, en las mismas hipótesis del caso anterior («Gran Explosión» inicial), la evolución de un *universo euclídeo dominado por una única ecuación de estado* puede determinarse mediante el cociente miembro a miembro de (2.107) para dos instantes de tiempo: el actual y otro anterior t,

$$\frac{t}{t_0} = \frac{H_0}{H}. \tag{2.109}$$

De la definición de (2.100) con $\varepsilon = 0$ y una única ecuación de estado,

$$(1+z) = \frac{a_0}{a} = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}}. \tag{2.110}$$

Esta expresión indica que el desplazamiento al rojo de una fuente no puede ser nunca lineal con respecto al tiempo, puesto que eso implicaría $w < -1$. También implica que el factor de escala es lineal con el tiempo únicamente cuando el universo está dominado por una ecuación de estado $w = -1/3$. Por tanto, **si se observa la radiación procedente de un objeto con un desplazamiento al rojo $z = 1$, puede afirmarse que el factor de escala en el momento en que esta radiación fue emitida era la mitad de su valor actual, pero no que la edad del universo en aquel instante fuera la mitad de la edad actual del universo.**

2.7 Resumen

2.7.1 Métrica de Robertson-Walker estándar

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-\varepsilon r^2} + r^2 d\Phi^2\right]$$

2.7.2 Definiciones

Para un tiempo cosmológico t		Para el instante actual $t=t_0$	
Nombre	Definición	Nombre	Definición
Función H o de Hubble	$H=\frac{\dot{a}}{a}$	Constante de Hubble	$H_0=\frac{\dot{a}_0}{a_0}$
Densidad crítica	$\rho_c=\frac{3H^2}{8\pi}$	Densidad crítica actual	$\rho_{c0}=\frac{3H_0^2}{8\pi}$
Densidad adimensional	$\Omega_i=\rho_i/\rho_c$	Parámetro de densidad	$\Omega_{i0}=\rho_{i0}/\rho_{c0}$
Desaceleración	$q=-\frac{\ddot{a}}{a}\frac{1}{H^2}$	Parámetro de desaceleración	$q_0=-\frac{\ddot{a}_0}{a_0}\frac{1}{H_0^2}$

Tabla 2.9 Principales funciones y parámetros.

2.7.3 Ecuaciones de Fridman

Ecuación[30]	Forma	Interpretación
Primera de Fridman	$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4}{3}\pi\left(\sum_i\rho_i+3w^i\rho_i\right)$	Balance de fuerzas
Segunda de Fridman	$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2=\frac{8\pi}{3}\sum_i\rho_i-\frac{\varepsilon}{a^2}$	Conservación de la energía
Densidad[31]	$\dot{\rho}=-3\left(\sum_i\rho_i+w^i\rho_i\right)\frac{\dot{a}}{a}$	Conservación de la energía

Tabla 2.10 Ecuaciones de Fridman y su interpretación en un caso general. Nótese que se ha supuesto una ecuación de estado de materia difusa $p=\sum_i p_i=w^i\rho_i$ que incluye la constante cosmológica para $w=-1$. Para mayor claridad se ha incorporado de forma explícita la curvatura en la segunda ecuación de Fridman, aunque se puede considerar equivalente a una densidad de energía de la forma (2.82).

2.7.4 Ecuaciones generales

Las siguientes ecuaciones son válidas en general para cualquier instante de tiempo. Nótese que las dos primeras no incluyen la curvatura como una densidad de energía mientras que la tercera sí.

[30] La nomenclatura no es estándar, sino propia de este texto.

[31] Combinación lineal de las otras dos ecuaciones.

$$\varepsilon=a^2\left(\sum_i\Omega_i-1\right)H^2 \qquad q=\frac{1}{2}\left(\sum_i\Omega_i+3w^i\Omega_i\right)$$

$$H=H_0\sqrt{\sum_i\Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w^i)}}$$

Es decir: la curvatura y H dependen de las densidades adimensionales de las distintas ecuaciones de estado, mientras que la desaceleración, además, depende de las presiones. De ahí que si la curvatura nula o positiva se consigue en parte o totalmente con ecuaciones de estado con $w^i\le -1/3$, la desaceleración pueda ser negativa (lo que en este caso implica una expansión ilimitada y acelerada) aunque la curvatura sea positiva.

2.7.5 Ecuaciones para una única ecuación de estado

General $$\rho_i=\rho_{i0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w^i)}$$

Caso euclídeo $$(1+z)=\frac{a_0}{a}=\left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \qquad t_0=\frac{2}{3(1+w)H_0}$$

En este último caso se parte de la hipótesis de que el universo empezó con una «Gran Explosión».

Cuadro resumen

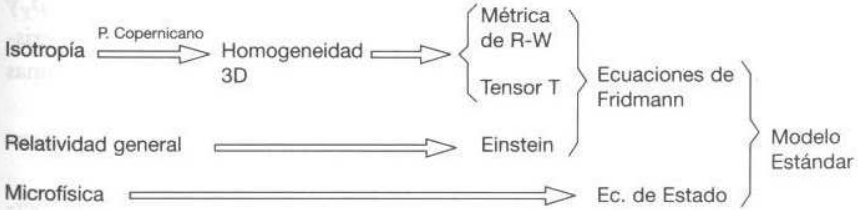


Figura 2.11 Cuadro resumen del capítulo segundo. A partir de la aplicación del principio copernicano espacio-temporal a la isotropía observada se concluye que el universo es espacialmente homogéneo e isótropo. De esta manera pueden expresarse de forma sencilla la métrica y el tensor energía-momento. Por otro lado, la relatividad general proporciona la ecuación de Einstein que relaciona la métrica de Robertson-Walker y el tensor energía-momento y que permite obtener las ecuaciones de Fridman. Finalmente, la microfísica proporciona las ecuaciones de estado necesarias para, en el capítulo tercero, resolver las ecuaciones de Fridman parametrizadas según la curvatura, que conducen al modelo estándar que para el universo se definirá en el siguiente capítulo.

2.8 Ejercicios

2.1 Deducir la métrica que representa la superficie de un elipsoide prolato de revolución y su elemento de superficie. Determinar la superficie y el perímetro ecuatorial.

2.2 Respecto al experimento de Galileo descrito en el apartado 2.2.1, suponiendo un rozamiento lineal con la velocidad:
   a. ¿Cuál de las dos bolas llega antes, la más pesada o la más ligera? ¿Por qué?
   b. ¿Sería suficiente la diferencia de tiempos de llegada como para percibirla fácilmente?

2.3 Demostrar que cuando la curvatura es positiva los cambios $r = (2a/\bar{r})\,[a \mp (a^2 - \bar{r}^2)^{1/2}]$ y $\bar{r} = r'a$ permiten pasar de la representación isótropa de la métrica de Robertson-Walker a la representación estándar. Ídem el cambio $\bar{r} = r/(1-(r/2a)^2)$ y $\bar{r} = r'a$ cuando la curvatura es negativa.

2.4 Demostrar que si en el ejercicio anterior, cuando la curvatura es positiva, en vez del cambio $\bar{r} = r'a$ se utiliza $\bar{r} = a$ sen χ se obtiene la representación comóvil de la métrica de Robertson-Walker. Ídem $\bar{r} = a$ senh χ cuando la curvatura es negativa.

2.5 Si el tiempo de Hubble τ se define como el tiempo que tarda el universo en doblar el factor de escala, suponiendo una velocidad de expansión constante, demostrar que $\tau = H^{-1}$.

2.6 Demostrar que si $G=c=1$, la masa se mide en unidades de longitud y que si además $k=1$, donde k es la constante de Boltzmann, la temperatura se mide en unidades de energía.

2.7 ¿En qué unidades se expresan H, q, ρ, Ω y Λ en el sistema de unidades definido en este capítulo?

2.8 Demostrar que si una partícula no relativista X se desintegra para dar una partícula relativista R con una vida media τ, se verifica: $\dot{\rho}_X = -3H\rho_X - \tau^{-1}\rho_X$ y $\dot{\rho}_R = -4H\rho_R + \tau^{-1}\rho_X(1+z)$. Comparar con el resultado que se obtendría si existieran partículas no relativistas X y relativistas R pero no se convirtiesen unas en otras.

2.9 Suponiendo una ecuación de estado de materia difusa además de la constante cosmológica, demostrar que en general $\dot{a}=0$ no implica $\ddot{a}=0$.

2.10 Determinar, en las condiciones del ejercicio anterior, el valor de w que permite anular la segunda derivada. Demostrar que se verifica $w > -1/3$ (considérense distintos casos).

2.11 Demostrar que las soluciones para un universo estático son inestables y terminan en contracción o expansión, salvo en el caso $\Lambda = 0$, $w = -1/3$. ¿Por qué? (Utilizar (2.78) y considerar pequeñas perturbaciones del factor de escala.)

2.12 Calcular la densidad crítica actual de masa en unidades del sistema internacional. ¿Cómo se compara con el mejor vacío que se puede obtener en laboratorio?

2.13 Determinar Ω_{m0} a partir de una función de Schechter con los parámetros del capítulo primero y una relación masa luminosidad de 300 $h\, M_\odot/L_\odot$.

2.14 Representar la figura 2.10 cuando $\Lambda<0$. ¿Cómo es el universo entonces?

2.15 Dados los valores últimamente más aceptados para nuestro universo, $\Omega_{m0}=0.3$ y $\Omega_{\Lambda 0}=0.7$, determinar el desplazamiento al rojo a partir del cual (o sea, para valores mayores) el universo se expande desaceleradamente.

2.16 Determinar el desplazamiento al rojo a partir del cual nuestro universo se expande desaceleradamente, suponiendo que la densidad crítica se alcanza, en vez de con constante cosmológica, mediante:
   a. Ecuación de estado con $w = -1/3$ (cuerdas cósmicas).
   b. Quintaesencia $w = -2/3$ (paredes de dominios).
   Comparar con el caso en el que la densidad crítica se alcanza mediante constante cosmológica.

2.17 Dado un universo con $\varepsilon=0$, dominado por materia no relativista y $H_0=65$ km/s/Mpc, determinar su edad. Ídem si domina una quintaesencia $w = -2/3$.

2.18 Determinar la dependencia de la densidad adimensional correspondiente a una ecuación de estado cualquiera, con respecto el desplazamiento al rojo y los parámetros de densidad correspondientes a las distintas ecuaciones de estado presentes en el universo.

2.19 Con un espectrógrafo de resolución 2000 ($\lambda/\lambda\Delta$), y en un caso ideal, ¿a qué desplazamiento al rojo podría detectarse una desviación de la ley de Hubble en un universo de curvatura nula dominado por energía no relativista? ¿Por qué no se detecta?

2.20 Suponiendo que Planilandia (un universo bidimensional) es homogénea e isótropa:
   a. Analizar su espacio.
   b. Determinar la relación entre el desplazamiento al rojo y el factor de escala.
   c. Determinar sus ecuaciones de Fridman con constante cosmológica.
   d. Determinar la ecuación de la densidad de materia difusa en función del factor de escala (2.78) y aplicarla a los casos de una Planilandia dominada por materia no relativista y dominada por radiación.
   e. Calcular la densidad crítica de una Planilandia con la misma constante de Hubble que nuestro universo.
   f. Determinar las ecuaciones que obedecen los parámetros cosmológicos (es decir, como las (2.94), (2.100) y (2.104)) y estudiar su comportamiento para distintas ecuaciones de estado.

   Comparar cada resultado con el correspondiente al universo espacialmente tridimensional y explicar el origen de las similitudes y diferencias.

2.9 Bibliografía

2.9.1 Referencias

CALDWELL, R. R.; KAMIONKOWSKI, M. y WEINBERG, N. N. (2003), *Phys.Rev.Lett.* 91, 071301.

RUPESCISSA, J. DE (s. XIV), *Liber de consideratione quintae essentiae omnium rerum.*

TROCCHIO, F. DI (1995), *Las mentiras de la ciencia. ¿Por qué y cómo engañan los científicos?*, Alianza Editorial.

EMPÉDOCLES DE AGRIGENTO (s. V a.C.), *Sobre la naturaleza.*

LAMOREAUX, S. K. (1997), *Phys.Rev.Lett.* 78, 5.

WEINBERG, S. (1972), *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons.

2.9.2 Textos recomendados

LANDAU, L. D. y LIFSHITZ, E. M., *Teoría clásica de los campos: volumen 2 del curso de física teórica*, Reverté (segunda edición, principalmente capítulos 11 y 12).

LINDER, E. V. (1997), *First Principles of Cosmology*, Addison-Wesley.

NARLIKAR, J. V. ([3]2002), *Introduction to Cosmology*, Cambridge University Press.

WEINBERG, S. (1972), *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons.

2.9.3 Enlaces útiles

Página www de este texto

http://webpages.ull.es/users/jcepano

Generales

Diccionario en línea: http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page

Buscador de pretirajes de artículos (astro-ph y otros): http://www.arxiv.org

Página general de cosmología: http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5

Capítulo 3 | MODELOS COSMOLÓGICOS

A lo largo de este capítulo se hallarán las soluciones a las ecuaciones de Fridman en varios casos, algunos de los cuales ya han sido analizados cualitativamente en el capítulo segundo. En primer lugar se resolverán los casos más sencillos, que además presentan un interés histórico, y luego se procederá a abordar situaciones más complejas. Se persigue así ilustrar de forma práctica el análisis cualitativo del capítulo segundo mediante modelos simples, para concluir planteando el modelo que hoy se considera estándar[1]. Además, también se pretende familiarizar al lector con los conceptos, definiciones y nomenclatura del capítulo anterior, para que los pueda utilizar con soltura en los capítulos siguientes.

Los distintos modelos cosmológicos, también llamados «cosmologías», se distinguen por el valor de la constante de Hubble H_0 y el de los parámetros de densidad Ω_{w0} (2.97) para cada ecuación de estado (2.77) **existente en el universo,** dado que la dependencia funcional de la densidad con el factor de escala que se deduce de (2.70) permite determinar la ecuación de estado dominante en cada momento, mientras que de la suma de parámetros se deriva el parámetro de densidad total, es decir, la curvatura según (2.95). **Si alguna de las w** de (2.77) **no es constante, será preciso conocer, además, su dependencia funcional con el tiempo o con el desplazamiento al rojo.** La mayoría de los modelos que se estudiarán estarán, lógicamente, basados en la relatividad general y la homogeneidad e isotropía espaciales del universo. El último apartado de este capítulo se dedica a describir someramente algunos modelos alternativos basados en teorías distintas de la relatividad, y al basado en el supuesto de homogeneidad e isotropía espacio-temporales que da lugar al modelo de estado estacionario.

El procedimiento adoptado en este texto para el estudio de un modelo cosmológico empieza por determinar la evolución del factor de escala que se deduce de la que convencionalmente denominamos segunda ecuación de Fridman (2.88), que permite obtener la relación entre el desplazamiento al rojo y el tiempo mediante (2.32), y por tanto la edad de dicho universo en función de H_0. En todos los casos *se han supuesto soluciones en expansión partiendo de una «Gran Explosión» inicial, siempre que sea posible.* La evolución macroscópica de un universo, es decir, su origen, su final y la evolución de su expansión, vienen dadas por la evolución de su

[1] Entendiendo como tal el basado en la relatividad general con isotropía y homogeneidad espaciales, sin inflación.

factor de escala. La evolución microscópica, es decir, la evolución de los distintos constituyentes que componen el universo debido a la expansión[2], así como sus interacciones mutuas, serán el objeto del capítulo sexto.

En conclusión, el objeto del presente capítulo es estudiar una parte de la gran familia de universos posibles y su posterior evolución macroscópica. El universo en el que vivimos no es más (ni menos) que un caso particular de esta gran familia. No se excluye la posibilidad antrópica de que el universo en el que vivimos sea el único posible, en el sentido de que las leyes físicas que lo gobiernan y los parámetros cosmológicos que lo definen no podrían ser de otra manera para dar lugar a la existencia de estrellas y planetas que puedan sostener vida.

3.1 Universos de Einstein y de De Sitter

3.1.1 Universo de Einstein

Cuando en 1917 Einstein aplicó por vez primera la relatividad general a la cosmología, todavía no estaba establecido que los objetos extragalácticos presentaran un desplazamiento al rojo. Más aún: no estaba establecido que una fracción de las «nebulosas» que se observaban a través de los telescopios y que impresionaban las placas fotográficas fueran galaxias: objetos compuestos de gran cantidad de estrellas, gas y polvo y situados a grandes distancias. En estas circunstancias, y dada la escasez de datos, era natural suponer *a priori* un universo estático, como hizo Einstein.

Como se señala en el capítulo octavo, las ecuaciones de Fridman fueron deducidas varios años después del primer modelo cosmológico basado en la relatividad general. Asimismo, la métrica de Robertson-Walker fue incluso posterior a las ecuaciones de Fridman. Sin embargo, vamos a utilizar dichas ecuaciones para plantear el problema de Einstein y la solución que propuso. Ello no alterará los resultados, dado que las ecuaciones que utilizó Einstein estaban basadas en las mismas hipótesis simplificadoras de homogeneidad e isotropía del universo.

Inicialmente Einstein partió de un **universo compuesto de materia no relativista y sin constante cosmológica**. En tales circunstancias, como se estableció en el capítulo anterior (2.6.1), **no existe una solución compatible con un universo estático**. En estas condiciones parecía que la única manera de conseguir un universo estático era introducir una constante en la ecuación de Einstein, la denominada constante cosmológica. A partir de la solución de la tabla 2.3 para $w = 0$, se obtiene,

$$4\pi\rho_{m0} = \Lambda = a_0^{-2}, \tag{3.1}$$

[2] Aunque, como se establecerá en los capítulos quinto y sexto, no solamente la expansión afecta la evolución de las partículas del universo, sino que dicha evolución afecta, a su vez, a la expansión.

donde $\varepsilon = 1$, teniendo en cuenta que la densidad y el factor de escala de un universo estático no varían con el tiempo.

Por consiguiente, existiría una relación fija (3.1) entre la densidad de materia, la constante cosmológica y el factor de escala del universo[3] en el instante actual. Los datos actuales (ejercicio 1.12) indican que $\rho_{m0} = 10^{-27}$ kg/m^3, de donde se obtiene $a_0 \sim 8500$ Mpc, que es suficientemente grande y $\Lambda \sim 10^{-53}$ m^{-2}, que es un valor confortablemente pequeño.

Sin embargo, como puso de manifiesto Fridman unos años más tarde, y ya se demostró en el capítulo anterior (apartado 2.6.1 y ejercicio 2.11), este universo no es estable. La constante cosmológica actúa como una fuerza de repulsión que contrarresta la densidad de energía de la masa en reposo. Para que el universo sea estático, ambas cantidades deben compensarse exactamente. Cualquier pequeña discrepancia a escala local, que resulta fácil que se produzca en un universo donde la materia se encuentra distribuida en forma discreta y tiene movimientos peculiares no ordenados, causaría una expansión o contracción progresivamente crecientes. Además, el posterior descubrimiento del desplazamiento al rojo motivó que dicho modelo fuera rechazado, y que Einstein renegase de la introducción de la constante cosmológica calificándola como «la mayor equivocación de su vida», puesto que su introducción fue motivada, *ad hoc* y *a posteriori* de la teoría general de la relatividad, a fin de conseguir un universo estático. Si Einstein no hubiera partido de ideas preconcebidas, habría podido predecir la expansión del universo antes de que ésta se descubriera.

3.1.2 Universo de De Sitter

El universo de Einstein pretende ser estático y con una densidad de materia distinta de cero. El universo de De Sitter (1917), por el contrario, es un universo sin materia y de curvatura nula que sin embargo se encuentra en expansión. Si en la ecuación de Fridman con constante cosmológica (2.67) se impone que la densidad de energía correspondiente a otras ecuaciones de estado sea nula y que la curvatura también sea nula, resulta

$$\Lambda = 3H^2, \tag{3.2}$$

con $q = -1$ (de 2.66), es decir, la expansión es acelerada.

[3] Como se demostró en el capítulo anterior, apartado 2.3.6, el factor de escala representa el tamaño del universo cuando la curvatura es positiva. Cuando la curvatura es nula o negativa, el factor de escala solamente representa una medida de la distancia característica entre los objetos cuya separación venga determinada fundamentalmente por la expansión del universo y no por sus movimientos peculiares.

La ecuación (3.2) implica que la función H no varía con el tiempo, o sea, la constante de Hubble es realmente una constante $H = H_0$, y que por tanto el factor de escala varía con el tiempo exponencialmente,

$$a = a_1 \exp(H_0 t) \tag{3.3}$$

tal como se deduce de integrar (2.65) teniendo en cuenta (3.2) y la constancia de H. En suma, en este modelo la expansión es exponencial y en el origen de tiempos cosmológico el universo tiene un factor de escala finito a_1. La edad de este universo será (2.108),

$$t_0 = \frac{\ln(a_0/a_1)}{H_0} = \frac{\ln(z_M+1)}{H_0}, \tag{3.4}$$

donde z_M es el máximo desplazamiento al rojo observable. Por consiguiente, un universo euclídeo, donde la densidad crítica se alcance únicamente con constante cosmológica, no presenta necesariamente singularidad inicial y se encuentra en expansión exponencial con $H = H_0$. Debido a las peculiaridades de este modelo, suele decirse que un universo que se halle en expansión exponencial transitoria se halla en o que presenta una «fase de De Sitter» en ese momento.

3.2 Universos euclídeos con una única ecuación de estado

La integración de la segunda ecuación de Fridman (2.65), imponiendo $\varepsilon = 0$ y la existencia de una única ecuación de estado $w > -1$ considerada constante, que por tanto verifica (2.78), permite obtener (ejercicio 3.1)

$$a = a_0\left(\frac{3(1+w)}{2}H_0 t\right)^{\frac{2}{3(1+w)}}, \tag{3.5}$$

de donde, para el tiempo $t = t_0$ se obtiene la ya conocida igualdad,

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0} \tag{3.6}$$

que permite rescribir (3.5), en la forma

$$a = a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}}, \tag{3.7}$$

de donde, por la relación entre el desplazamiento al rojo y el factor de escala y de (3.6), resulta,

$$t = \frac{2}{3(1+w)H_0}(1+z)^{-3(1+w)/2} \tag{3.8}$$

De (3.7) y (2.78),

$$\rho = \rho_0\left(\frac{t_0}{t}\right)^2, \tag{3.9}$$

resultado que es independiente de la ecuación de estado y donde, al ser la curvatura nula, $\rho_0 = \rho_{c0} = 3H_0^2/(8\pi)$.

Dado que $a \to 0$ cuando $t \to 0$ (3.7), de la segunda ecuación de Fridman (2.65) y de (2.78) se deduce que para $t \to 0$, $\dot{a} \to \infty$ cuando $w > -1/3$, y $\dot{a} \to 0$ cuando $w < -1/3$. Análogamente, $a \to \infty$ cuando $t \to \infty$, por lo que en ese caso $\dot{a} \to 0$ cuando $w > -1/3$, y $\dot{a} \to \infty$ cuando $w < -1/3$. Cuando $w = -1/3$, $\dot{a} =$ cte siempre.

Las anteriores ecuaciones y comportamientos asintóticos son válidos para un universo euclídeo representado por una única ecuación de estado con $w =$ cte, salvo en el caso $w = -1$, que corresponde al modelo de De Sitter ya estudiado en (3.1.2).

3.3 Universos dominados por la masa en reposo

En estos modelos de universo se considera nula la constante cosmológica y que la densidad de energía es debida únicamente a la materia no relativista o pulverulenta, es decir, a la energía asociada a la densidad de masa en reposo: $\rho_0 \equiv \rho_{m0}$. En este caso, el parámetro de densidad es el de materia no relativista: $\Omega_0 \equiv \Omega_{m0}$ que verifica (2.104) $q_0 = \Omega_0/2$.

Es importante tener en cuenta que estos modelos presentan singularidad inicial o «Gran Explosión» en el origen de tiempos cosmológico. Por tanto, para valores del tiempo suficientemente pequeños, el factor de escala llegará a ser lo bastante reducido como para que la materia pase a ser relativista y llegue a dominar esta forma de densidad de energía, que corresponde a otra ecuación de estado. En este caso, las ecuaciones aquí deducidas dejan de ser válidas y en ese momento el universo evolucionará tal como se deduce en el apartado 3.4.

3.3.1 Curvatura nula

También llamado modelo de Einstein-De Sitter (1932), constituye una aproximación razonable al universo actual para pequeños desplazamientos al rojo. Sin

embargo, las diferencias se tornan significativas a desplazamientos al rojo intermedios/altos y, por supuesto, en cuanto a la edad que se deduce para el universo.

Dado que la curvatura es nula la densidad resulta igual a la densidad crítica y $\Omega_{m0} = 1$ (2.95), por lo que $q_0 = {}^1/_2$ (2.104), tal como se dedujo en el capítulo segundo.

Del anterior apartado (3.2), se obtiene, para el caso $w = 0$,

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}. \tag{3.10}$$

De la expresión que relaciona el desplazamiento al rojo con el cociente de factores de escala (2.32) se obtiene

$$1 + z = \left(\frac{t_0}{t} \right)^{2/3}. \tag{3.11}$$

Por otro lado (2.107) la edad del universo es,

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}, \tag{3.12}$$

que, como ya se vio en el capítulo segundo (2.6.8), es demasiado breve para la edad estimada en el capítulo primero en base a cúmulos globulares y nucleocosmocronología.

Este universo presenta una singularidad material y de curvatura espacio-temporal en el origen. Su expansión es ilimitada, tendiendo a una densidad de energía nula en el infinito, y la segunda ecuación de Fridman (2.65) junto con (2.78) indican que cuando $t \to \infty$, $\dot{a} \to 0$.

3.3.2 Curvatura positiva

Cuando la curvatura no es nula, la segunda ecuación de Fridman para el caso de materia no relativista se reduce a

$$\dot{a}^2 = \frac{\alpha}{a} - \varepsilon, \tag{3.13}$$

donde (ejercicio 3.4)

$$\alpha = \frac{8\pi}{3} \rho_{m0} a_0^3 = \frac{\Omega_{m0}}{\pm H_0 \left[\varepsilon (\Omega_{m0} - 1) \right]^{3/2}} > 0 \tag{3.14}$$

La segunda igualdad se obtiene expresando ρ_{m0} en función de la densidad crítica actual (2.92) y del parámetro de densidad (2.97), y expresando a_0 en función de H_0 y el parámetro de densidad a través de (2.94) en el instante actual (de ahí el doble signo de H_0: se origina en la raíz cuadrada de a_0). El valor de α siempre es positivo, puesto que las cantidades que figuran en la primera igualdad de (3.14) son positivas. Nótese que no se podrán extrapolar los resultados al caso euclídeo (Ω_{m0}=1), dado que α presenta una singularidad.

La ecuación (3.13) indica que, cuando la curvatura es positiva, el factor de escala no puede crecer indefinidamente dado que la primera derivada del factor de escala tomaría valores imaginarios. En estas condiciones, el máximo valor que puede adoptar el factor de escala es α, para el que la velocidad de expansión se anula ($\dot{a}$=0). En cambio, cuando la curvatura es negativa, el factor de escala puede crecer sin límites. Este hecho sugiere la utilización de una función acotada como solución de (3.13) cuando la curvatura es positiva y de una función no acotada cuando la curvatura es negativa.

Efectivamente, cuando $\varepsilon = +1$ la integración de (3.13) es casi inmediata con el cambio,

$$a = \alpha \operatorname{sen}^2 \frac{Q}{2} \tag{3.15}$$

que permite parametrizar en función de la variable auxiliar Q el factor de escala y el tiempo cosmológico.

Derivando (3.15) con respecto al tiempo, combinando con (3.13) e integrando desde a=Q=0 cuando t=0, permite obtener (ejercicio 3.5),

$$t = \frac{\alpha}{2}(Q - \operatorname{sen} Q), \tag{3.16}$$

expresión que, con (3.15), proporciona pares (a, t) para cada valor de Q (figura 3.1).

Según (3.15), el máximo valor $a_{máx} = \alpha$, del factor de escala tendrá lugar cuando Q=π, es decir t=$\alpha\pi/2$, y el factor de escala volverá a anularse para Q=2π, que corresponde a t=$\alpha\pi$. Además, cuando $\pi < Q < 2\pi$, es decir, cuando $\alpha\pi/2 < t < \alpha\pi$, $\dot{a}$<0, puesto que $\dot{a} = \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} Q \, \dot{Q}$ como se deduce de la derivada de (3.15)[4]. Por consiguiente, el universo se expande hasta llegar a un máximo y luego se vuelve a contraer hasta llegar a otra singularidad que representa el fin del universo (figura 3.1). De ahí el doble signo de (3.14): en la fase de expansión H_0>0 y el signo será «+», mientras que en la de contracción H_0<0 y el signo a adoptar será el «−». El fin del universo tendrá lugar en un tiempo,

[4] Dado que (3.13) presenta la ambigüedad del doble signo de la raíz cuadrada.

$$t_f = \alpha\pi = \frac{\pi\Omega_{m0}}{\pm H_0\left(\Omega_{m0}-1\right)^{3/2}} \equiv \frac{\pi\Omega_{m0}}{\left|H_0\right|\left(\Omega_{m0}-1\right)^{3/2}} \tag{3.17}$$

Luego, para un mismo valor de H_0 la duración del universo disminuye cuando el parámetro de densidad aumenta, dado que en este caso α disminuye (figura 3.1). Por este mismo motivo $a_{máx}$ disminuye cuando Ω_{m0} aumenta.

La edad t_0 se obtiene sustituyendo en (3.16) el valor Q_0 para el cual $a = a_0$ en (3.15). Es decir, teniendo en cuenta que

$$\text{sen}^2\frac{Q}{2} = \frac{1-\cos Q}{2},$$

aplicando (3.15) al instante actual y de las expresiones (3.14) y (2.94), esta última aplicada al instante actual, se obtiene (ejercicio 3.6),

$$\cos Q_0 = \frac{2-\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}}, \tag{3.18}$$

y, por tanto,

$$\text{sen}Q_0 = \frac{2\sqrt{\Omega_{m0}-1}}{\Omega_{m0}} \tag{3.19}$$

Finalmente, del valor actual de (3.16) con (3.18) y (3.19), teniendo en cuenta (3.14), se obtiene,

$$t_0 = \frac{\Omega_{m0}}{\pm 2H_0(\Omega_{m0}-1)^{3/2}}\left[\arccos\left(\frac{2-\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}}\right) - \frac{2\sqrt{\Omega_{m0}-1}}{\Omega_{m0}}\right] \tag{3.20}$$

que al igual que (3.17) también se puede escribir sustituyendo el doble signo por el valor absoluto de la constante de Hubble.

La edad del universo sigue siendo inversamente proporcional a la constante de Hubble, pero la constante de proporcionalidad ahora depende del parámetro de densidad, puesto que la relación (3.6) entre t_0 y H_0 solamente es válida si la curvatura es nula o despreciable. De la ecuación (3.20) se infiere que para un mismo valor de la constante de Hubble, la edad disminuye cuando Ω_{m0} aumenta (ejercicio 3.7), y que las edades obtenidas son menores que para el caso euclídeo durante la expansión, mientras que en la contracción pueden ser menores o mayores (ejercicio 3.7).

Nótese que la ecuación (3.20) está bivalorada debido a la ambigüedad del arcocoseno frente a un cambio de signo de Q_0. Esta bivaloración se corresponde con los

dos valores posibles de la edad para un mismo valor absoluto de H_0 pero con signos opuestos: para la fase de expansión, donde $H_0>0$ y $Q = Q_0$, y para la de contracción, donde $H_0<0$ y $Q = 2\pi-Q_0$.

De la ecuación para la densidad de energía en función del factor de escala (2.78), y de (3.15), (3.14) y (2.94), puede obtenerse (ejercicio 3.8)

$$\rho_m = 8\rho_{c0}\frac{\left(\Omega_{m0}-1\right)^3}{\Omega_{m0}^2\left(1-\cos Q\right)^3}. \tag{3.21}$$

En suma, cuando

$0 < t < \alpha\pi/2$ es $0 < Q < \pi$ y $\dot{a} > 0$

$t = \alpha\pi/2 = t_f/2$ es $a_{máx} = \alpha$ y $\dot{a} = 0$ (máximo de a y mínimo de ρ_m)

$\alpha\pi/2 < t < \alpha\pi$ es $\pi < Q < 2\pi$ y $\dot{a} < 0$

Lógicamente, la densidad presenta un mínimo cuando a es máximo y una singularidad en el origen y en el fin del universo.

Finalmente, todas las ecuaciones son bien comportadas respecto los parámetros dado que $\varepsilon = +1$ implica $\Omega_{m0}>1$ (2.95).

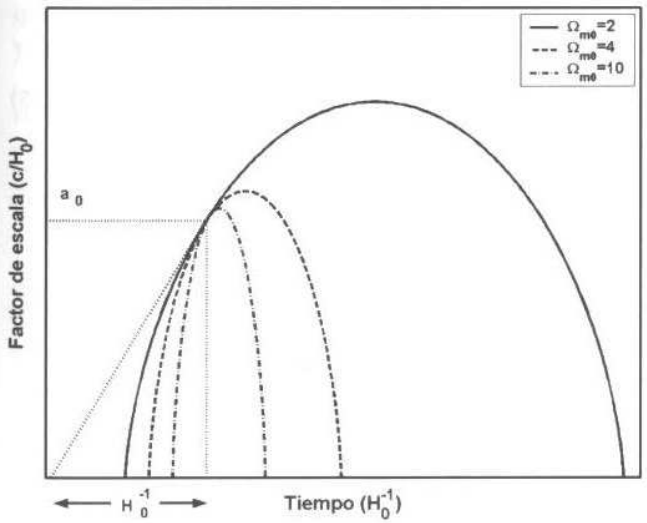


Figura 3.1 Evolución del factor de escala en un universo de curvatura positiva dominado por materia no relativista en función del parámetro de densidad. Se han desplazado y escalado las curvas para que tengan una tangente en común que representa el instante actual t_0, para el cual el factor de escala es a_0. El tiempo que representa la distancia entre t_0 y la intersección de la tangente común con el eje de abscisas es H_0^{-1}, que proporciona una cota superior a la edad de estos universos. A medida que el parámetro de densidad aumenta, la edad del universo, el valor máximo del factor de escala y de la duración t_f disminuyen.

3.3.3 Curvatura negativa

Procediendo de manera análoga al caso anterior, con el cambio

$$a = \alpha \operatorname{senh}^2 \frac{Q}{2} \tag{3.22}$$

se obtiene (ejercicio 3.5)

$$t = \frac{\alpha}{2}(\operatorname{senh} Q - Q), \tag{3.23}$$

expresión que, con (3.22), proporciona las parejas (a, t) para cada valor de Q. En este caso la expansión del universo no está limitada (figura 3.2).

La edad de este universo se obtiene como en el caso anterior, calculando el valor Q_0 para el cual (3.22) da a_0 y sustituyendo dicho valor en (3.23). Utilizando (3.22), (3.14) y (2.94) para el instante actual, teniendo en cuenta que $\operatorname{senh}^2 Q/2 = (\cosh Q - 1)/2$, se obtiene

$$\cosh Q_0 = \frac{2 - \Omega_{m0}}{\Omega_{m0}} \tag{3.24}$$

y, por tanto,

$$\operatorname{senh} Q_0 = \frac{2\sqrt{1 - \Omega_{m0}}}{\Omega_{m0}}. \tag{3.25}$$

De estas ecuaciones y a partir de la definición de las funciones hiperbólicas seno y coseno,

$$Q_0 = \ln (\operatorname{senh} Q_0 + \cosh Q_0), \tag{3.26}$$

se obtiene finalmente

$$t_0 = \frac{\Omega_{m0}}{2H_0(1 - \Omega_{m0})^{3/2}} \left[\frac{2(1 - \Omega_{m0})^{1/2}}{\Omega_{m0}} - \ln \left(\frac{2(1 - \Omega_{m0})^{1/2}}{\Omega_{m0}} + \frac{2 - \Omega_{m0}}{\Omega_{m0}} \right) \right] \tag{3.27}$$

donde *el doble signo* de (3.14) *se ha omitido puesto que ahora en un universo con una «Gran Explosión» inicial siempre es* $H_0 > 0$. Tanto en este caso como en el anterior, de curvatura positiva, y para un mismo valor de la constante de Hubble, la edad disminuye cuando Ω_{m0} aumenta (ejercicio 3.9). Sin embargo, ahora las edades que se obtienen son mayores que en el caso euclídeo (ejercicio 3.9). En el límite de (3.27) cuando $\Omega_{m0} \to 0$, se obtiene $t_0 \to H_0^{-1}$ (ejercicio 3.10). Éste es otro caso particular de universo con densidad de materia nula pero, al contrario que el de De Sitter, sin constante cosmológica. Es el llamado **modelo de Milne**. Retomando para este caso las ecuaciones de Fridman sin la constante cosmológica (2.66) y (2.67) e imponiendo $\rho = 0$ y $p = 0$, se obtiene $q = 0$ y $a = H^{-1}$, ecuación esta última que indica una expansión constante y lumínica ($\dot{a} = 1$) y que el factor de escala es lineal con el tiempo, $a = t$, lo cual implica que $1 + z = a_0/a = t_0/t$, y **es el único caso en el que el desplazamiento al rojo es inversamente proporcional al tiempo.** Este modelo permite demostrar que puede existir expansión sin ningún tipo de densidad de energía en el universo[5] y con una singularidad de curvatura espacio-temporal en el origen del tiempo cosmológico, es decir, con una «Gran Explosión».

Finalmente, de la ecuación para la densidad de energía en función del factor de escala (2.78), y de (3.22), (3.14) y (2.94) puede obtenerse,

$$\rho_m = 8\rho_{c0} \frac{(1 - \Omega_{m0})^3}{\Omega_{m0}^2 (\cosh Q - 1)^3} \tag{3.28}$$

que permite comprobar que la densidad disminuye al aumentar el factor de escala y que existe una singularidad material en el origen de tiempo cosmológico.

La ecuación (3.13) implica que cuando $a \to \infty$, lo cual según (3.22) y (3.23) ocurre cuando $t \to \infty$, entonces $\dot{a} \to 1$, es decir, la expansión es superlumínica decelerada, tendiendo a lumínica en el infinito. Además, en estas condiciones $\rho \to 0$, luego **un universo de curvatura negativa y sin constante cosmológica tiende al modelo de Milne** (figura 3.2), de ahí la importancia de éste.

Todas las ecuaciones son bien comportadas respecto los parámetros dado que $\varepsilon = -1$ implica $\Omega_{m0} < 1$ (2.95).

La figura 3.3 resume la variación de la edad de universos dominados por materia pulverulenta con respecto al parámetro de densidad.

[5] Sin embargo, *si la constante cosmológica se interpreta como una «energía del vacío»*, nunca podrá conseguirse un espacio sin, al menos, la densidad de energía asociada a la constante cosmológica. Luego el modelo minimalista de universo sería el de De Sitter.

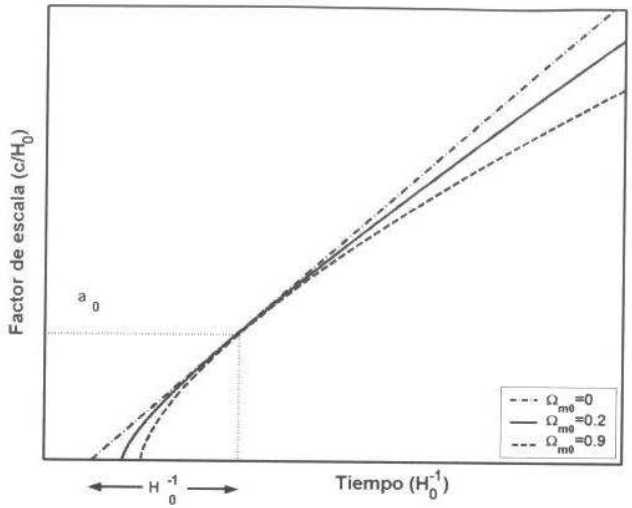


Figura 3.2 Evolución del factor de escala en un universo de curvatura negativa dominado por materia no relativista en función del parámetro de densidad. Se han desplazado y escalado las curvas para que tengan una tangente en común que representa el instante actual t_0, para el cual el factor de escala es a_0. El tiempo que representa la distancia entre t_0 y la intersección de la tangente común con el eje de abscisas es H_0^{-1}, que proporciona una cota superior a la edad de estos universos. A medida que el parámetro de densidad disminuye, la edad del universo aumenta, siendo máxima para el modelo de Milne ($\Omega_{m0}=0$).

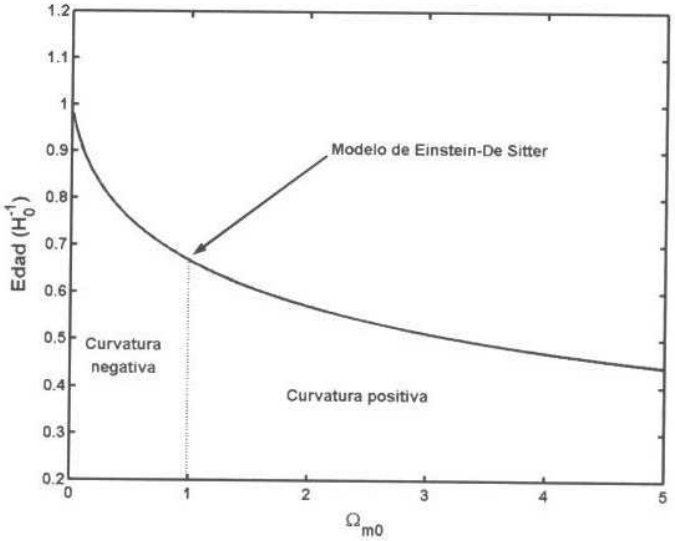


Figura 3.3 Edades de distintos modelos de universos dominados por materia no relativista en función del parámetro de densidad. El valor $\Omega_{m0}=1$ separa los modelos abiertos de los cerrados. La edad es igual a H_0^{-1} para el modelo de Milne, y disminuye a medida que aumenta el parámetro de densidad de materia.

3.4 Universos dominados por radiación

En estos modelos de universo, la constante cosmológica es nula y la densidad de energía dominante es la de la radiación y materia relativista: $\rho_0 \equiv \rho_{r0}$. Por tanto, el parámetro de densidad total es idénticamente igual al de la radiación: $\Omega_0 \equiv \Omega_{r0}$ y verifica $q_0 = \Omega_0$. Como en el caso anterior, estos modelos también presentan una singularidad inicial en el origen de tiempos cosmológicos y, como se demostró en el capítulo primero (1.7.3), son representativos de las primeras etapas del universo (y también de las últimas etapas en el caso de curvatura positiva), donde esta densidad de energía domina sobre las demás.

Puede suponerse que, en general[6], para valores suficientemente grandes del tiempo cosmológico[7], la densidad de energía de la materia no relativista terminará dominando sobre la radiación, y entonces las ecuaciones que se van a deducir a continuación perderán su validez, siendo sustituidas por las deducidas en el apartado anterior (3.3) para un universo dominado por energía asociada a la materia pulverulenta.

Sin embargo, para valores más reducidos del tiempo cosmológico, el factor de escala puede llegar a ser suficientemente pequeño, como para que la distancia característica de las zonas en contacto causal en el universo sea del orden de la longitud de onda Compton, que viene dada por $h/(\rho a^3)$. En este caso los efectos cuánticos no serán despreciables y la relatividad general no será válida. Por tanto, incluso los modelos dominados por radiación pierden validez para tiempos muy próximos a la singularidad representada por la Gran Explosión.

3.4.1 Curvatura nula

Como se discutirá más adelante, este modelo ofrece una buena aproximación a las etapas iniciales del universo, dominadas por la densidad de energía de la radiación. Dado que la curvatura es nula la densidad iguala la densidad crítica y $\Omega_{r0} = 1$ (2.95), por lo que $q_0 = 1$, tal como se dedujo en el capítulo segundo (2.104).

Del apartado (3.2), obtenemos, para el caso $w = 1/3$,

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2} \tag{3.29}$$

[6] En un universo compuesto únicamente por fotones siempre existirá, si la energía es suficientemente elevada, creación de pares de partículas según reacciones como la (1.25). Estos pares, dependiendo de la energía y de la partícula que se trate, podrán ser relativistas o no. A medida que se expande el universo disminuirá la energía de los fotones, que cesarán de crear pares. Tarde o temprano, a no ser que el universo se vuelva a contraer, los pares restantes se aniquilarán entre sí, con lo que el universo terminará constituido únicamente por fotones. Este escenario no se ajusta al de nuestro universo, que en sus etapas iniciales, según se discutirá en el capítulo quinto, sufrió una asimetría materia-antimateria que generó un levísimo exceso de materia. Con la expansión del universo este exceso terminó siendo no relativista, dominando energéticamente el universo, y generando las actuales estructuras materiales observadas. Un universo en el que esa asimetría no se produjera terminaría constituido únicamente por fotones, y las ecuaciones aquí deducidas serían válidas a lo largo de toda su historia. En mi opinión, sin embargo, esta asimetría materia-antimateria no constituye un caso particular de nuestro universo sino un caso general, por lo que un universo terminará dominado por materia o por constante cosmológica.

[7] A no ser que la curvatura sea positiva y la densidad de energía de radiación suficientemente alta como para que se contraiga sin que la radiación haya dejado de dominar.

o también

$$1+z=\left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/2} \tag{3.30}$$

y la ya conocida expresión para la edad del universo

$$t_0=\frac{1}{2H_0}. \tag{3.31}$$

Este universo no está acotado, la expansión es ilimitada, tendiendo a una densidad de energía nula, y presenta una singularidad material y de curvatura espaciotemporal en el origen. La segunda ecuación de Fridman (2.65) con (2.78) y (3.29) indica que cuando $t \to \infty$, $\dot{a} \to 0$.

3.4.2 Curvatura positiva

Cuando la curvatura es positiva, la integración de la segunda ecuación de Fridman (2.65), utilizando (2.78) para la densidad de energía de radiación, con los mismos límites integrales que en el caso anterior de dominio de materia no relativista, puesto que el valor $a = 0$ no está excluido, proporciona (ejercicio 3.11)

$$a=\left[\left(\frac{32\pi\rho_{r0}}{3}\right)^{1/2} a_0^2\, t-t^2\right]^{1/2}, \tag{3.32}$$

ecuación que presenta dos ceros: $t = 0$ y $t=a_0^2\sqrt{32\pi\rho_{r0}/3}\equiv t_f$. Es decir: un universo de curvatura positiva dominado por radiación también tiene un origen y un final, la «Gran Implosión» en un tiempo cosmológico $t = t_f$. En ambos instantes de tiempo tienen lugar singularidades de densidad de energía y de curvatura espaciotemporal. La ecuación (3.32) también puede escribirse

$$a=(t_f\, t-t^2)^{1/2} \tag{3.33}$$

Para tiempos pequeños, $a \sim t^{1/2}$. Por otro lado, de (2.65) resulta que la primera derivada del factor de escala se anula cuando $a = t_f/2$ valor que, de acuerdo con (3.33), corresponde a un tiempo $t = t_f/2$ (ejercicio 3.12). Para tiempos anteriores el universo se expande ($\dot{a}>0$) y para tiempos posteriores el universo se contrae ($\dot{a}<0$).

Teniendo en cuenta que el valor del factor de escala en el momento actual se obtiene de (2.94), la definición de parámetro de densidad (2.97) y la densidad crítica (2.92), es posible expresar el tiempo t_f en función del parámetro de densidad,

$$t_f=\frac{2\sqrt{\Omega_{r0}}}{\pm H_0(\Omega_{r0}-1)}\equiv\frac{2\sqrt{\Omega_{r0}}}{|H_0|(\Omega_{r0}-1)} \tag{3.34}$$

donde el doble signo corresponde a las dos soluciones para el mismo valor absoluto de H_0 pero signos opuestos: «+» en la fase de expansión en que $H_0>0$ y «–» en la fase de contracción, en que $H_0<0$.

La ecuación (3.34) indica que para una misma constante de Hubble t_f disminuye cuando Ω_{r0} aumenta.

La edad de este universo (ejercicio 3.11) se obtiene a partir de (3.33) cuando $t = t_0$, de (2.94) y (3.34)

$$t_0=\frac{\sqrt{\Omega_{r0}}\pm 1}{|H_0|(\Omega_{r0}-1)}, \tag{3.35}$$

donde el doble signo corresponde a las dos soluciones con el mismo $|H_0|$: cuando el universo se contrae (+) y cuando se expande (–), de forma análoga al caso de curvatura positiva dominado por materia no relativista (3.3.2). Una vez más la edad es proporcional al inverso de H_0, donde la constante de proporcionalidad depende del parámetro de densidad: disminuye cuando el parámetro de densidad aumenta. Para un mismo valor de la constante de Hubble la edad es menor que el caso euclídeo durante la expansión y mayor o menor durante la contracción dependiendo del parámetro de densidad (ejercicio 3.7).

Finalmente, la densidad se obtiene (ejercicio 3.13) de (2.78) cuando w=1/3, utilizando (3.33), (3.34) y (2.94)

$$\rho_r=\frac{3\Omega_{r0}}{8\pi\left[2\sqrt{\Omega_{r0}}\, t-|H_0|(\Omega_{r0}-1)t^2\right]^2}. \tag{3.36}$$

En conclusión, el factor de escala no puede crecer indefinidamente y el universo tiene un principio y un final en un tiempo finito, análogamente al caso de un universo dominado por materia pulverulenta con curvatura positiva. La densidad pasa por un mínimo cuando $t = t_f/2$, instante de tiempo que coincide, en nuestras unidades, con el valor máximo del factor de escala, y presenta una singularidad material en el inicio y el final de tiempo cosmológico. Por tanto, puede que un universo de curvatura positiva no llegue a estar dominado nunca por materia no relativista si la densidad de radiación es suficientemente alta: volverá a contraerse antes de que domine la materia pulverulenta (ejercicio 3.14).

Todas las ecuaciones son bien comportadas respecto los parámetros dado que $\varepsilon = +1$ implica $\Omega_{r0}>1$ (2.95).

3.4.3 Curvatura negativa

En el caso de curvatura negativa, la solución de (2.65) con (2.78) permite obtener (ejercicio 3.11)

$$a=\left[t^2+\left(\frac{32\pi\rho_{r0}}{3}\right)^{1/2}a_0^2t\right]^{1/2} \tag{3.37}$$

o, en función del parámetro de densidad,

$$a=\left[t^2+\frac{2\sqrt{\Omega_{r0}}}{H_0(1-\Omega_{r0})}t\right]^{1/2}, \tag{3.38}$$

donde, como en el caso de dominio de materia pulverulenta, *el doble signo de H_0 se ha omitido puesto que ahora en un universo con una «Gran Explosión» inicial siempre es $H_0>0$.* En este caso, la expansión no está limitada. Para tiempos cosmológicos pequeños, $a\sim t^{1/2}$, para tiempos grandes, $a\sim t$, que corresponde al caso $\Omega_{r0}\to 0$. Por tanto, también en un universo dominado por radiación los modelos con curvatura negativa tienden al modelo de Milne. En general, de la segunda ecuación de Fridman (2.65) y de (2.78) se deduce que, siempre que $w>-1/3$, todos los modelos de curvatura negativa tenderán al modelo de Milne. Análogamente, siempre que $w>-1/3$, la ecuación de Fridman (2.65) y la ecuación (2.78) implican que cuando $a\to\infty$, lo cual según (3.37) ocurre cuando $t\to\infty$, $\dot{a}\to 1$, es decir, la expansión es superlumínica decelerada, tendiendo a lumínica en el infinito. Por tanto, **todos los modelos de curvatura negativa tienden al modelo de Milne cuando $t\to\infty$ siempre que $w>-1/3$**

Finalmente, obtenemos

$$t_0=\frac{1-\sqrt{\Omega_{r0}}}{H_0\left(1-\Omega_{r0}\right)} \tag{3.39}$$

que indica que la edad disminuye al aumentar el parámetro de densidad, y que las edades son mayores que en el caso euclídeo, para el mismo valor de H_0 (ejercicio 3.9).

Finalmente,

$$\rho_r=\frac{3\Omega_{r0}}{8\pi\left[2\sqrt{\Omega_{r0}}t+H_0\left(1-\Omega_{r0}\right)t^2\right]^2} \tag{3.40}$$

Luego la densidad varía como t^{-2} para los instantes iniciales y como t^{-4} para tiempos mayores. **Para cualquier curvatura, en un universo dominado por radiación $a\sim t^{1/2}$ en los primeros instantes, luego $(1+z)\sim(t_0/t)^{1/2}$ y $\rho_r\sim t^{-2}$.**

Todas las ecuaciones son bien comportadas respecto a los parámetros dado que $\varepsilon=-1$ implica $\Omega_0<1$ (2.95).

Podemos concluir que, para un mismo valor de la constante de Hubble, cuando $w>-1/3$, las edades son mayores que en el caso euclídeo cuando la curvatura es negativa. Cuando la curvatura es positiva, las edades son menores que en el caso euclídeo durante la expansión y pueden ser mayores o menores durante la contracción.

Análogamente al caso de materia no relativista, se podría representar gráficamente tanto la variación del factor de escala para cada curvatura como la edad, ambos en función del parámetro de densidad (ejercicio 3.15).

3.5 Universos dominados por constante cosmológica

En este tipo de universos la densidad de energía asociada a la masa no relativista o a la radiación es nula o despreciable, bien porque inicialmente ya fuera así, o bien porque la expansión está suficientemente avanzada como para que así sea. En efecto, la densidad de energía asociada a la constante cosmológica es constante, mientras que las demás disminuyen de forma potencial al aumentar el factor de escala[8]. Por tanto, debido a la expansión, cualquier otra densidad de energía[8] llegará, con el tiempo, a ser despreciable frente a la constante cosmológica. La excepción la constituyen universos de curvatura positiva que empiecen a contraerse antes de que la constante cosmológica llegue a dominar. En este caso, el universo vendrá descrito macroscópicamente por los modelos de los apartados (3.3) y/o 3.4).

Todos los modelos que contengan constante cosmológica y de expansión ilimitada terminarán dominados por la densidad de energía de la constante cosmológica[8].

En estos universos la densidad de energía, que viene dada por (2.79), es constante, y se verifica $q=-\Omega_\Lambda$ (2.104 y tabla 2.7), mientras que en general, salvo cuando la curvatura es nula o despreciable, la densidad adimensional varía con el tiempo: $\Omega_\Lambda=\Lambda/(3H^2)$, como se deduce utilizando (2.93) y (2.92).

El caso de curvatura nula ya ha sido analizado y constituye el modelo de De Sitter (3.1.2). A continuación se analizarán los restantes casos.

[8] Salvo en el caso de la energía fantasma.

3.5.1 Curvatura positiva

Tanto en este caso como en el de curvatura nula no puede existir singularidad inicial o «Gran Explosión», puesto que el factor de escala no puede anularse. Cuando la curvatura es nula, porque la integración de (2.65) genera una función logaritmo neperiano (3.1.2) y cuando la curvatura es positiva, porque para factores de escala suficientemente pequeños dominaría el término de curvatura en (2.65) y la primera derivada del factor de escala sería imaginaria. Por tanto, el mínimo valor de $a = a_1$ que corresponde al origen de tiempos cosmológico $t = 0$ es el que anula la primera derivada del factor de escala. Luego, en estos modelos, **en el origen de tiempos cosmológicos la velocidad de expansión es nula** (tabla 2.5),

$$a_1 = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} \tag{3.41}$$

de (2.65), donde la segunda igualdad procede de la definición del parámetro de densidad de la constante cosmológica, de (2.79) y de la definición de densidad crítica (2.92).

Integrando (2.65) y operando, teniendo en cuenta (3.41), se obtiene

$$a = \frac{\cosh\left(H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}\, t\right)}{H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}, \tag{3.42}$$

que también puede escribirse

$$1+z = \frac{\cosh\left(H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}\, t_0\right)}{\cosh\left(H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}\, t\right)}. \tag{3.43}$$

Al contrario que en el caso de la radiación y el polvo, la expansión no está limitada aunque la curvatura sea positiva.

De (3.42) en el instante $t = t_0$ y considerando (2.94) se obtiene,

$$t_0 = \frac{\operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\dfrac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{\Lambda 0}-1}}\right)}{H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}, \tag{3.44}$$

que muestra que para una misma H_0, cuando el parámetro de densidad aumenta, la edad se reduce (ejercicio 3.16).

3.5.2 Curvatura negativa

En este caso, el factor de escala sí puede llegar a anularse, como se comprueba a partir del límite de (2.65), por lo que al contrario que los demás casos de dominio de constante cosmológica, existirá una «Gran Explosión» inicial. La integración de (2.65) siguiendo los mismos pasos que en el caso anterior permite obtener

$$a = \frac{\operatorname{senh}\left(H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}\, t\right)}{H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} \tag{3.45}$$

o también

$$1+z = \frac{\operatorname{senh}\left(H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}\, t_0\right)}{\operatorname{senh}\left(H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}\, t\right)}. \tag{3.46}$$

La expansión es ilimitada y acelerada, puesto que $q < 0$, pero existe una singularidad inicial que en este caso es únicamente de curvatura, dado que la densidad es constante.

La edad se obtendrá a partir de (3.45) cuando $t = t_0$ y de (2.94),

$$t_0 = \frac{\operatorname{arcsenh}\left(\sqrt{\dfrac{\Omega_{\Lambda 0}}{1-\Omega_{\Lambda 0}}}\right)}{H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}, \tag{3.47}$$

donde al contrario que en el caso de curvatura positiva, para un mismo valor de la constante de Hubble, la edad aumenta cuando lo hace el parámetro de densidad (ejercicio 3.16).

De la segunda ecuación de Fridman (2.65) también se deduce que cuando $t\to\infty$, que corresponde a $a\to\infty$ según (3.45) ó (3.42), es $H^2 \to \Lambda/3$. De ahí que de (2.34) sea $\dot{a}\to\infty$, de (2.66) resulte $q\to -1$ y de (2.104) se obtenga $\Omega_\Lambda \to 1$, es decir: estos modelos tienden al modelo de De Sitter en el infinito. Luego **todos los modelos que contengan constante cosmológica tienden al modelo de De Sitter cuando** $t\to\infty$.

3.6 Universos dominados por otras energías oscuras

En estos casos dominan ecuaciones de estado con $w < -1/3$ que, al igual que la constante cosmológica, también aceleran la expansión. Cabe distinguir dos casos: quintaesencia $-1 < w < -1/3$ y energía fantasma, con $w < -1$.

La quintaesencia presenta en general una ecuación de estado $w(z)$, con una dependencia funcional que dependerá del potencial asumido. Luego, en general, su densidad de energía no será una potencia del factor de escala, y la integración de las ecuaciones de Fridman deberá ser numérica. Sin embargo, dados los errores en las actuales medidas de las distancias a SNIa, y suponiendo que a desplazamientos al rojo no muy elevados la variación de w es pequeña, puede admitirse que w es constante[9] y utilizar las ecuaciones del apartado (3.2) si la curvatura es nula o en caso contrario proceder por integración numérica mediante las técnicas descritas en el caso general (apartado 3.7.1). En el caso particular de $w = -2/3$ existe solución analítica sencilla de las ecuaciones de Fridman (ejercicio 3.17).

Análogo razonamiento es aplicable a la energía fantasma, con la salvedad de que no existe un potencial estable que la defina, por lo que su existencia es discutible (2.5.2). Para la mayor parte de modelos que incluyen este tipo de energías, el factor de escala diverge para un tiempo cosmológico finito (ejercicio 3.19), fenómeno que se denomina «Gran Fuga»[10].

3.7 Universos simbióticos

Cuando no pueda considerarse que domina una única ecuación de estado, no siempre existirán soluciones analíticas de las ecuaciones de Fridman o las soluciones analíticas no serán tan simples. En este apartado se tratará el caso general y posteriormente se aplicará a dos universos simbióticos destacados: de radiación-materia y de materia-constante cosmológica, a modo de ejemplo.

3.7.1 Modelo completo

En general, asumiendo que w es constante, (2.34) puede expresarse utilizando (2.100),

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\sum_i \Omega_{i0} (1+z)^{3(1+w^i)}}, \tag{3.48}$$

donde las Ω_{i0} representan los parámetros de densidad para cada ecuación de estado w^i, *incluyendo la curvatura*.

Derivando con respecto al tiempo la relación $1+z=a_0/a$, se obtiene

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{z}}{(1+z)}, \tag{3.49}$$

[9] Que correspondería, por tanto, a una w media.

[10] Del inglés *Big Rip*.

que permite expresar de la manera siguiente la relación entre el desplazamiento al rojo y el tiempo cosmológico (nótese el cambio de límites de la integral relacionado con el signo de (3.49))

$$t = \int_0^t \mathrm{d}t = \int_z^\infty \frac{\mathrm{d}z}{H_0 (1+z) \sqrt{\sum_i \Omega_{i0} (1+z)^{3(1+w^i)}}}, \tag{3.50}$$

así como el tiempo retrospectivo en función del desplazamiento al rojo,

$$t_0 - t = \int_t^{t_0} \mathrm{d}t = \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{H_0 (1+z) \sqrt{\sum_i \Omega_{i0} (1+z)^{3(1+w^i)}}}, \tag{3.51}$$

o la edad del universo,

$$t_0 = \int_0^{t_0} \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{H_0 (1+z) \sqrt{\sum_i \Omega_{i0} (1+z)^{3(1+w^i)}}}. \tag{3.52}$$

De la solución analítica o numérica de la ecuación (3.50) y teniendo en cuenta la relación entre el desplazamiento al rojo y el factor de escala, puede obtenerse el factor de escala en función del tiempo cosmológico y, a partir de éste, la evolución de las densidades de energía según (2.78). En el caso de que la curvatura no sea nula el valor de a_0 se puede hallar a partir de la ecuación (2.94) para el caso $t = t_0$.

Para resolver (3.50) solamente se precisa conocer la constante de Hubble y los parámetros de densidad para cada ecuación de estado, salvo el de curvatura, dado que se verifica (2.99).

3.7.2 Universos de radiación y materia no relativista

En este apartado se aplicará el anterior desarrollo general a un universo con densidades de energía de radiación y de materia no relativista dadas por (2.78) con $w = 1/3$ y 0, de valores actuales ρ_{r0} y ρ_{m0}, y parámetros de densidad Ω_{r0} y Ω_{m0}, respectivamente. Según (2.93) se verifica $\Omega_0 = \Omega_{r0} + \Omega_{m0}$, mientras que según (2.99), añadiendo el parámetro de curvatura se obtiene la unidad.

Ésta es una situación transitoria en nuestro universo, que se produce durante un intervalo de tiempo más o menos corto, dependiendo del ritmo de expansión. En instantes anteriores domina la radiación, y en posteriores domina la materia pulverulenta. Este modelo constituye, pues, la transición entre los modelos descritos en (3.4) y en (3.3). Aplicando (3.50),

$$t=\int_0^t \mathrm{d}t=\int_z^\infty \frac{\mathrm{d}z}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_{r0}(1+z)^4+\Omega_{m0}(1+z)^3+\Omega_{\varepsilon 0}(1+z)^2}} \tag{3.53}$$

Análogamente se escribirían (3.51) y (3.52). Sin embargo la edad proporcionada en este caso por (3.52) solamente tiene sentido si en el universo no han dominado otras ecuaciones de estado previamente.

El caso de curvatura nula admite una solución analítica sencilla de la ecuación de Fridman (2.88),

$$t=\frac{4}{3H_0\sqrt{\Omega_{m0}}}\left[\left(\frac{a}{2a_0}-\frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{m0}}\right)\sqrt{\frac{a}{a_0}+\frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{m0}}}+\left(\frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{m0}}\right)^{3/2}\right] \tag{3.54}$$

(ejercicio 3.20) que proporciona la edad si se toma $a = a_0$.

3.7.3 Universos de materia no relativista y constante cosmológica

En este apartado las densidades de energía relevantes son las de la materia no relativista y la debida a la constante cosmológica, dadas por (2.78) con $w = 0$ y -1, de valores actuales ρ_{m0} y ρ_Λ, y parámetros de densidad Ω_{m0} y $\Omega_{\Lambda 0}$, respectivamente. Según (2.93) se verifica $\Omega_0=\Omega_{m0}+\Omega_{\Lambda 0}$, mientras que según (2.99), al añadir el parámetro de curvatura se obtiene la unidad.

Aplicando (3.50),

$$t=\int_0^t \mathrm{d}t=\int_z^\infty \frac{\mathrm{d}z}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3+\Omega_{\varepsilon 0}(1+z)^2+\Omega_{\Lambda 0}}}. \tag{3.55}$$

Expresiones análogas se derivarían utilizando (3.51) y (3.52) para el tiempo retrospectivo y la edad, con la misma salvedad para esta última que la expresada en el apartado anterior.

En el caso euclídeo, puede hallarse fácilmente una solución analítica (ejercicio 3.21),

$$t=\frac{1}{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}\ln\left(\frac{\sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3+\Omega_{\Lambda 0}}+\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}{\sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3+\Omega_{\Lambda 0}}-\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}\right) \tag{3.56}$$

de donde se obtiene la edad de este universo al tomar $z = 0$,

$$t_0=\frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}{\sqrt{\Omega_{m0}}}\right) \tag{3.57}$$

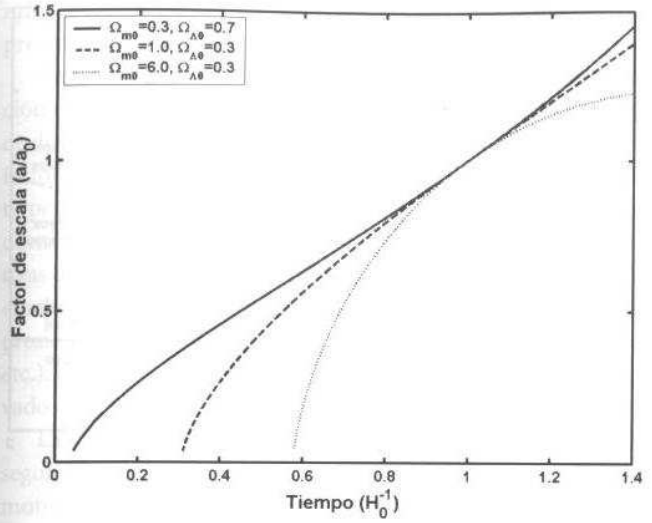


Figura 3.4 Evolución del factor de escala para distintos valores de los parámetros de densidad en universos simbióticos de materia no relativista y constante cosmológica. Si el parámetro de densidad de materia no relativista es suficientemente alto comparado con el de constante cosmológica, el universo se cierra antes de que llegue a expandirse aceleradamente. En caso contrario, existirá un punto de inflexión.

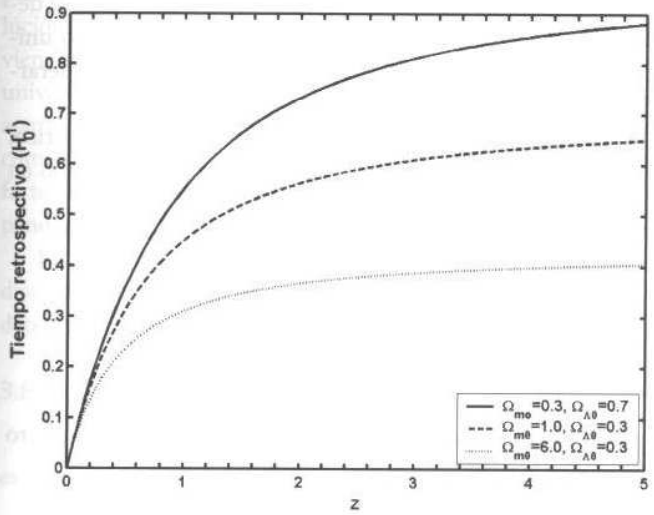


Figura 3.5 Tiempos retrospectivos para distintos valores de los parámetros de densidad en universos simbióticos de materia no relativista y constante cosmológica.

De (3.56) se puede obtener asimismo el factor de escala,

$$a=a_0\left[\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0}}\operatorname{senh}^2\left(\frac{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}\,t}{2}\right)\right]^{1/3}, \tag{3.58}$$

expresión de donde se obtiene trivialmente el desplazamiento al rojo en función del tiempo cosmológico.

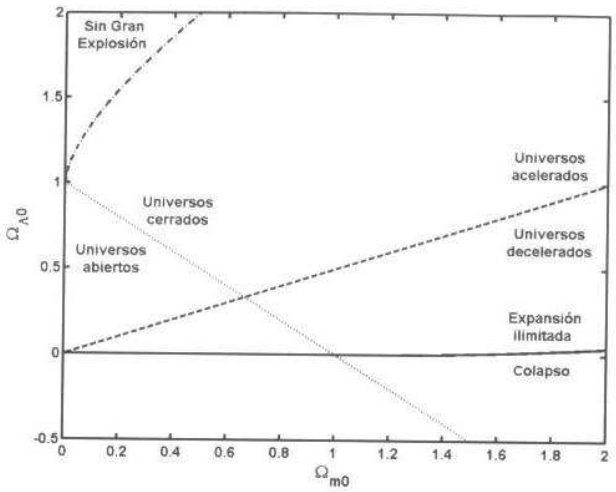


Figura 3.6 Distintas posibilidades que permite un modelo simbiótico de materia no relativista y constante cosmológica en función de distintos pares de valores (Ω_{m0}, $\Omega_{\Lambda 0}$). Como ya se discutió en el capítulo anterior, la sola presencia de una energía de ecuación de estado $w < -1/3$ no es suficiente para acelerar el universo, ni para evitar que colapse.

Este modelo simbiótico es uno de los más interesantes puesto que, como se demostrará en el siguiente apartado, **representa muy adecuadamente nuestro universo en tiempos recientes**, y **la edad proporcionada por (3.57) puede considerarse suficientemente aproximada**.

Finalmente cabe comentar que el espacio de parámetros Ω_{m0}-$\Omega_{\Lambda 0}$ es muy rico, y origina una gran variedad de posibilidades que plasman el análisis efectuado en el capítulo anterior, como se muestra en la figura 3.6 (ejercicio 3.24).

3.8 El modelo estándar

3.8.1 Definición

Se denominará «**modelo estándar**» al modelo que mejor represente a nuestro universo basado en las hipótesis:

- Homogeneidad e isotropía espaciales
- Validez de la relatividad general
- Densidades de energía que persisten durante toda la historia del universo[11]

Es decir, al que resulta de aplicar las ecuaciones de Fridman al universo en el que vivimos. Para poder definir este modelo estándar es preciso, por tanto, determinar H_0 y los parámetros de densidad asociados a todas las densidades de energía presentes en el universo[12].

[11] Esta condición elimina la inflación del modelo estándar.

Sin embargo, la evolución macroscópica del universo, entendida como la variación del factor de escala en función del tiempo, puede provocar el dominio sucesivo de distintas densidades de energía, dado que éstas dependen de distintas potencias del factor de escala. De manera intuitiva, para valores del factor de escala suficientemente pequeños, es decir, instantes de tiempo cosmológico suficientemente reducidos, dominarán primero las densidades de energía proporcionales a potencias más negativas del factor de escala. Primero la materia relativista y la radiación. Luego tomarán el relevo sucesivamente la materia pulverulenta y las densidades correspondientes a presiones cada vez más negativas (curvatura, quintaesencia[13], constante cosmológica, etc.). En el capítulo primero ya se ha demostrado que a un desplazamiento al rojo elevado dominaba la radiación sobre la materia no relativista.

La evolución macroscópica del universo viene determinada, tal como indica la segunda ecuación de Fridman (2.88), por el balance de energías en el mismo. Por ese motivo, en la época de dominio de una ecuación de estado podrá simplificarse el problema si se desprecian las demás densidades de energía y se considera que la evolución viene determinada únicamente por la densidad de energía dominante. Volviendo al ejemplo del capítulo primero, cuando domina la materia pulverulenta, el universo se expandirá de acuerdo con la solución de las ecuaciones de Fridman del apartado (3.3). Sin embargo, la densidad de energía de la radiación siempre variará como a^{-4}. Es decir, **la ecuación de estado dominante determinará la evolución del factor de escala, y todas las densidades de energía variarán de acuerdo con la dependencia funcional del factor de escala que les corresponde** según (2.78).

En el presente apartado se tratará primero el caso general y a continuación se discutirán las aproximaciones que, convenientemente, simplifican el problema de determinar la evolución del universo.

3.8.2 Caso general

En nuestro universo, las observaciones indican que las ecuaciones de estado existentes son las correspondientes a:

- La radiación, $w = -1/3$, puesto que observamos el fondo cósmico de microondas.
- La materia pulverulenta, $w = 0$, puesto que observamos galaxias, cúmulos de galaxias y estrellas, incluida la materia oscura.
- Una densidad de energía, llamada energía oscura, con $w < -1/3$, puesto que las SNIa indican que el universo está acelerado.

[12] De acuerdo con esta definición, el llamado «modelo estándar» depende del tiempo, puesto que a lo largo de los años se han dado distintos valores a los parámetros de densidad.

[13] Supuesto w constante.

No se dispone en la actualidad de una determinación de la ecuación de estado de la energía oscura, es decir, del valor de su w, ni mucho menos se sabe si éste es constante o no. Dado que distintas ecuaciones de estado variarán el desplazamiento al rojo al cual tiene lugar el punto de inflexión (ejercicio 2.16), la determinación del z al cual ocurre la inflexión es uno de los observables que se está intentando medir para determinar la ecuación de estado de la energía oscura.

Sin embargo, las observaciones actuales son compatibles con la constante cosmológica. Además, su ecuación de estado simplifica las ecuaciones: no es preciso recurrir a w variables, y su densidad es constante. Por estos motivos se acostumbra a asumir que la energía oscura es debida a la constante cosmológica.

Finalmente, como se verá en el capítulo séptimo (apartado 7.7.3), las observaciones de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo indican que el universo es euclídeo[14].

Por consiguiente, las densidades de energía a considerar en el universo son: ρ_r, ρ_m, y ρ_Λ, de parámetros de densidad: Ω_{r0}, Ω_{m0} y $\Omega_{\Lambda 0}$, con $\Omega_{\varepsilon 0}=0$.

Entonces (3.50) se puede escribir

$$t=\int_0^t \mathrm{d}t=\int_z^\infty \frac{\mathrm{d}z}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_{r0}(1+z)^4+\Omega_{m0}(1+z)^3+\Omega_{\Lambda 0}}}. \qquad (3.59)$$

Al variar los límites de la integral como en (3.51) y (3.52) se obtiene el tiempo retrospectivo y la edad del universo, respectivamente.

Las observaciones actuales permiten plasmar el modelo estándar con las siguientes características:

- $H_0=65$ ó 72 km/s/Mpc. El primer valor es el deducido a partir de lentes gravitatorias, utilizado en este texto y preferido por el autor, y el segundo es el que se deduce del proyecto clave del telescopio espacial *Hubble* (véase capítulo primero).
- Curvatura nula (deducida a partir de las anisotropías del fondo cósmico de microondas, como se muestra en el capítulo séptimo).
- Compuesto de radiación, materia no relativista y constante cosmológica.
- $\Omega_{m0}=0.3$, deducido a partir de observaciones de la dinámica de las galaxias pertenecientes a cúmulos (Turner 2002). Se descompone en 0.005 de materia emisora, 0.035 de materia no emisora bariónica y 0.26 de materia no emisora no bariónica («materia oscura»).
- $\Omega_{r0}=0.0001$, como puede deducirse del desplazamiento al rojo $z\approx 3000$ que se dedujo en el apartado 1.7.3 al cual ocurre la equivalencia radiación-materia, y del anterior valor de Ω_{m0} tomando el cociente de las densidades (2.78) para la radiación y la materia, y convirtiendo las densidades de energía actuales en parámetros de densidad mediante (2.93). En el capítulo sexto se obtendrá una estimación más rigurosa, independiente de Ω_{m0}. En cualquier caso, el valor es despreciable en la actualidad frente a la materia pulverulenta y la constante cosmológica.
- Dado que las anisotropías de la radiación de fondo indican que la curvatura ha de ser nula, y las distancias a SNIa indican una expansión acelerada que es signatura de *ecuaciones de estado con $w<-1/3$*, la denominada **energía oscura**, la densidad de energía necesaria para alcanzar la densidad crítica se considera debida a esta energía oscura. *Como los datos son compatibles con la constante cosmológica*, el modelo estándar en el que la energía oscura *se considera* constante cosmológica se denomina **modelo concordante**. Es decir, salvo redondeos: $\Omega_{\Lambda 0}=0.7$.

El modelo estándar actualmente aceptado está definido por $H_0=65$ km/s/Mpc, con curvatura nula y de $\Omega_{r0}=0.0001$, $\Omega_{m0}=0.3$, $\Omega_{\Lambda 0}=0.7$. También se denomina **«modelo concordante»**.

3.8.3 Aproximaciones al modelo estándar

Puesto que la segunda ecuación de Fridman (2.88) establece que H (2.34) depende del balance de energías (apartado 2.4.2), para decidir si una ecuación de estado es dominante y cuándo domina, es preciso evaluar el *cociente de pares de densidades de energía* y determinar el desplazamiento al rojo al cual son equivalentes. Es decir,

$$1=\frac{\rho_i}{\rho_j}=\frac{\rho_{i0}}{\rho_{j0}}\left(1+z_{ij}\right)^{3(w^i-w^j)}, \qquad (3.60)$$

de donde, si se despeja $1+z_{ij}$ y se expresan las densidades de energía actuales en función de los parámetros de densidades y la densidad crítica,

$$1+z_{ij}=\left(\frac{\Omega_{j0}}{\Omega_{i0}}\right)^{\frac{1}{3(w^i-w^j)}} \qquad (3.61)$$

Cuando $z>>z_{ij}$ domina una de las ecuaciones de estado, cuando $z<<z_{ij}$ domina la otra. ***La ecuación de estado que determina la evolución del universo en una época determinada será la que domine sobre todas las demás.*** Es importante señalar que **este dominio energético no tiene por qué coincidir con el punto de inflexión del**

[14] Espero que el lector sabrá disculpar que en este momento se haga esta afirmación sin justificarla.

factor de escala, el cual se obtendrá al resolver el desplazamiento al rojo al cual se anula su segunda derivada, o sea, el que se obtiene de igualar a cero la primera ecuación de Fridman (ejercicio 2.16). La razón de la discrepancia es que en la primera ecuación de Fridman (2.87) intervienen, no solamente las densidades de energía, sino además las presiones, mientras que en la segunda ecuación (2.88), de la que se deriva la evolución del factor de escala, solamente intervienen las densidades.

Con los valores comúnmente aceptados de los parámetros de densidad del apartado anterior, obtenemos los valores de la tabla 3.1, que indican los dominios energéticos que permiten aproximar la evolución del factor de escala por los modelos de la tabla 3.2.

z_{ij}	Valor de z_{ij}	Dominio
z_{rm}	3000	Radiación para $z >> 3000$
$z_{r\Lambda}$	8	
$z_{m\Lambda}$	0.33	Materia no relativista para $0.33 << z < 3000$

Tabla 3.1 Valores isoenergéticos del desplazamiento al rojo para los distintos pares de ecuaciones de estado en el universo.

z	Modelo aproximado $a(t)$	Apartado
$z >> 3000$	$\varepsilon = 0, w = 1/3$	3.2
$0.33 << z < 3000$	$\varepsilon = 0, w = 0$	3.2
$0 < z < 1$	$\varepsilon = 0, w = 0$ y $w = -1$	3.7.3
$-1 \leq z < 0$	$\varepsilon = 0, w = -1$	3.1.2

Tabla 3.2 Dominios energéticos de cada ecuación de estado del universo y modelo que permite aproximar, en ese intervalo aproximado de desplazamientos al rojo, la evolución macroscópica del universo. El futuro se representa con $z < 0$; $z = -1$ para $t \to \infty$.

Hay que señalar que los resultados expresados en las tablas 3.1 y 3.2 no se verían sustancialmente afectados por la presencia de curvatura (es decir, si la curvatura no fuera exactamente nula). Si consideramos el caso extremo $\Omega_{\varepsilon 0} = 0.70$, se obtiene $z_{r\varepsilon} = 82.67$ y $z_{m\varepsilon} = 1.33$. Es decir, el universo a $z >> 3000$ sigue dominado por materia relativista y radiación, a desplazamientos al rojo menores que 3000 sigue dominado por materia no relativista, y en ambos casos se puede despreciar la curvatura. En la actualidad se acepta que vivimos en un universo simbiótico de materia pulverulenta y constante cosmológica (caso del modelo concordante) en el que la curvatura es nula o despreciable: para que la curvatura dominase en la actualidad sobre la constante cosmológica debería ser $\Omega_{\varepsilon 0} = \Omega_{\Lambda 0} = 0.35$ (ejercicio 3.25), valores descartados por las observaciones de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo.

Es muy importante destacar que este dominio energético no solamente afecta a la evolución del factor de escala, sino también a las edades. En efecto, en (3.50) se integra desde el origen de tiempos hasta el tiempo t, en (3.51) desde el tiempo t hasta t_0 y en (3.52) para toda la edad del universo. Para estimar un valor aproximado de estos tiempos, cada una de las integrales puede considerarse como una suma de integrales donde domina una única ecuación de estado en cada una de ellas,

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^{\infty} \frac{dz}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0}}}$$
$$\approx \int_0^{3000} \frac{dz}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0}}} + \int_{3000}^{\infty} \frac{dz}{H_0(1+z)^3\sqrt{\Omega_{r0}}} \qquad (3.62)$$

donde la última de las integrales puede despreciarse (ejercicio 3.26). En consecuencia, **la edad actual del universo se puede estimar con mucha aproximación si se desprecia la era dominada por radiación y se considera un universo euclídeo compuesto de materia no relativista y constante cosmológica. Lo mismo cabe concluir con los tiempos retrospectivos para la era no dominada por radiación.** En cuanto a las edades de objetos a desplazamientos al rojo no muy elevados, **si el desplazamiento al rojo es suficientemente grande, puede considerarse un modelo euclídeo dominado por materia no relativista.** En caso contrario, hay que considerar también la constante cosmológica (tabla 3.2).

En conclusión, para el estudio del presente y pasado del modelo estándar bastará con utilizar los modelos euclídeos dominados por materia pulverulenta o por radiación descritos en (3.2) o bien el modelo simbiótico de materia no relativista y constante cosmológica con curvatura nula descrito en (3.7.3).

3.8.4 Aplicación del modelo estándar a nuestro universo

Evolución del factor de escala

El modelo estándar actual puede, por tanto, describirse mediante la combinación euclídea de ecuaciones de estado de radiación, de materia no relativista y de energía oscura, representada esta última como constante cosmológica en el modelo concordante. Por tanto, según el apartado (2.6.6), la expansión será ilimitada, desacelerada primero y acelerada después, con el punto de inflexión a $z = 0.67$ en el modelo concordante (ejercicio 2.15), aunque puede ocurrir a otros desplazamientos al rojo, dependiendo de la ecuación de estado de la energía oscura (ejercicio 2.16). En la figura 3.7 se representan gráficamente las evoluciones del factor de escala y del tiempo retrospectivo para el modelo concordante.

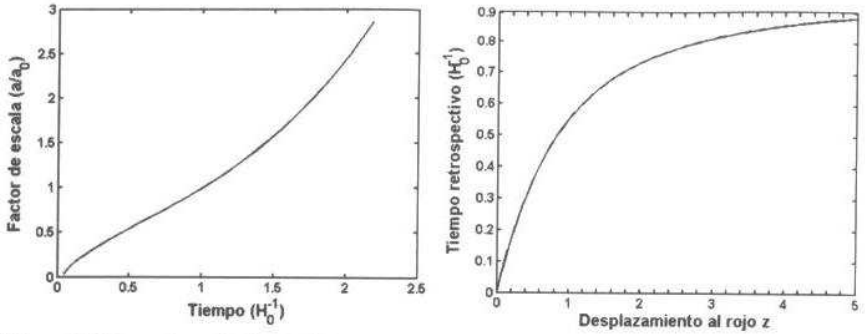


Figura 3.7 Factor de escala (izquierda) y tiempo retrospectivo (derecha) para el modelo concordante. En la gráfica de la izquierda puede apreciarse el punto de inflexión en $z = 0.67$ (ejercicio 2.15). Dicho punto no corresponde al de igualdad de densidades de energía de materia y de constante cosmológica.

Edad

La energía oscura aumenta la edad del universo para un mismo valor de la constante de Hubble (apartado 2.6.8). Sin embargo, los valores de los parámetros de densidad del modelo concordante son tales que el inverso de la constante de Hubble no llega a ser una cota inferior de la edad del universo (figura 3.8). De (3.57) se infiere que, para el modelo concordante, $t_0 = 14.5$ Ga cuando $H_0 = 65$ km/s/Mpc, valor que puede considerarse suficientemente aproximado, puesto que la radiación domina solamente durante los primeros ~0.0001 Ga, como se deduce de aplicar (3.56) para $z = 3000$. **Este valor de la edad del universo es consistente con el inferido a partir de las edades de cúmulos globulares** (1.3.3).

Este resultado constituye un argumento adicional en favor de la energía oscura. En efecto, de (3.27) para $\Omega_{m0} = 0.3$ y $H_0 = 65$ km/s/Mpc, es decir: un universo sin energía oscura compuesto solamente de materia no relativista, se obtiene $t_0 = 12.2$ Ga, valor claramente incompatible con las edades de cúmulos globulares.

Nótese, sin embargo, que un valor de $H_0 = 72$ km/s/Mpc como el deducido a partir del proyecto clave del HST (tabla 1.4, apartado 1.5.10), no es compatible con las edades de los cúmulos globulares del apartado (1.3.3), puesto que con este valor de H_0 la ecuación (3.57) proporciona $t_0 = 13.1$ Ga.

Ecuación de estado de la energía oscura

Los datos actuales, procedentes tanto de las SNIa como de las edades de los cúmulos globulares, no permiten asegurar que la ecuación de estado de la energía oscura corresponda a la constante cosmológica, en vez de a una quintaesencia. La determinación de la ecuación de estado de la energía oscura es uno de los aspectos clave de la investigación actual, que se abordaba a partir de la determinación ob-

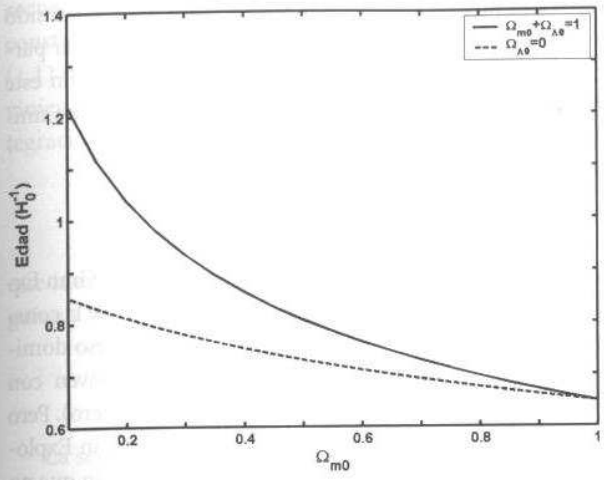


Figura 3.8 Edades para distintos valores de los parámetros de densidad de un universo de curvatura nula compuesto de materia no relativista y constante cosmológica. Nótese que en el caso del modelo concordante, a pesar de estar dominado en la actualidad por constante cosmológica, el inverso de la constante de Hubble sigue siendo una cota superior a la edad del universo. Ello es debido a que durante la mayor parte de la historia del universo ha dominado la materia pulverulenta, y no la constante cosmológica. La edad del universo deducida tanto a partir de las edades de cúmulos globulares (1.3.1), como con su combinación con los resultados de la nucleocosmocronología (1.3.2) es consistente con la edad del modelo concordante cuando $H_0 \approx 65$ km/s/Mpc.

servacional del desplazamiento al rojo al cual ocurre el punto de inflexión (figura 3.7). Es importante señalar que si se acepta un valor $H_0 = 72$ km/s/Mpc, habrá que suponer, o bien que las edades de los cúmulos globulares están sobreestimadas, o bien que la energía oscura no es debida a una constante cosmológica sino a una energía fantasma (Cepa 2004), lo cual no es satisfactorio habida cuenta de la ausencia de un potencial estable para este tipo de ecuaciones de estado. Cabe concluir, por tanto, que **el modelo concordante con $H_0 = 65$ km/s/Mpc es el modelo que mejor se ajusta a los datos actualmente disponibles sobre nuestro universo.**

3.9 **Modelos alternativos**

Partiendo del cuadro resumen de la figura 2.11, es posible determinar fácilmente los puntos en los cuales es posible introducir variantes o alteraciones que proporcionen modelos cosmológicos alternativos. El primero de ellos afecta a la hipótesis de homogeneidad e isotropía. Es lógicamente difícil obtener las ecuaciones equivalentes a las de Fridman a partir de una métrica que no sea homogénea e isótropa. Más aún, ¿con qué criterio se elige semejante métrica? Sin embargo, lo que sí puede hacerse es extender la homogeneidad e isotropía a la dimensión temporal, de donde se obtiene el modelo de universo estacionario. Otro punto susceptible de alteración constituye la ecuación de Einstein de la relatividad general: un abanico de distintos modelos cosmológicos tiene su origen en modificaciones a la relatividad general. Estos modelos representan teorías que engloban a la relatividad general como un caso particular. Finalmente, pueden considerarse nuevas formas de densidad de energía: la quintaesen-

cia, la energía fantasma y la constante cosmológica generan modelos que ya han sido estudiados y que, en el caso de la constante cosmológica, ya ha pasado a formar parte del modelo estándar en la forma del denominado modelo concordante. En este apartado no se pretende dar una revisión exhaustiva de todos los modelos sino únicamente de algunos entre los más significativos.

3.9.1 Estado estacionario

Propuesto por Hoyle y Bondi y Gold en 1948 como una alternativa a la «Gran Explosión», su origen está justificado por los problemas que la determinación de la constante de Hubble causaba en la estimación de la edad del universo: un universo dominado por materia pulverulenta con $H_0 \geq 100$ km/s/Mpc era demasiado joven con respecto la edad de los cúmulos globulares de nuestra Galaxia (capítulo primero). Pero además existía el problema de la singularidad inicial que presentaba la «Gran Explosión». Un modelo estacionario solucionaba ambos problemas en una época en que no se tenían noticias de la radiación de fondo cósmico de microondas y en que no estaba claro que las estrellas no pudieran generan todos los elementos químicos conocidos.

El estado estacionario, de acuerdo con Bondi y Gold (1948), se basa en la hipótesis del **principio cosmológico perfecto (PCP)**: la extensión de la homogeneidad e isotropía espaciales a la dimensión temporal. El universo no solamente es homogéneo e isótropo en cada instante de tiempo, sino que además siempre ha tenido las mismas propiedades físicas que en la actualidad. Por tanto, el universo a gran escala no varía con el tiempo, aunque sus constituyentes (galaxias, estrellas, etc.) sí evolucionen. De forma más rigurosa podemos expresar el PCP enunciando que «**las propiedades físicas y geométricas de las hipersuperficies t = cte no varían con el tiempo cosmológico**».

Aunque el modelo estacionario no acepta una singularidad inicial[15], sí admite la relatividad general y el hecho observado de la expansión del universo. **La estacionariedad del universo surge al aceptar la expansión e incorporar el PCP.** La aceptación de la relatividad general implica que una vez definida la métrica y el tensor energía-momento, la resolución de la ecuación de Einstein proporcionará las ecuaciones que rigen la evolución del universo estacionario.

Dado que la métrica de Robertson-Walker es la métrica más general posible con homogeneidad e isotropía para cada instante de tiempo, la métrica estacionaria será un caso particular de la de Robertson-Walker[16]. En efecto, **la primera consecuencia de la aplicación del PCP a la expansión del universo es que H ha de ser constante**: $H=H_0$. En caso contrario, la velocidad de recesión, que viene dada por (1.11) no solamente variaría con la distancia sino también con el tiempo, contraviniendo el PCP. Sin embargo, de la definición de H (2.34) concluimos que, por integración,

$$a \propto \exp(H_0 t), \tag{3.63}$$

que indica que el universo se comporta como el universo de De Sitter. Por consiguiente, la expansión es acelerada con $q = -1$, y

$$1+z = \exp\left[H_0(t_0 - t)\right]. \tag{3.64}$$

La segunda consecuencia de la aplicación del PCP es que el universo ha de ser euclídeo ($\varepsilon = 0$), dado que al estar el universo en expansión, el factor de escala varía con el tiempo, por lo que la curvatura espacio-temporal variaría con el tiempo al ser inversamente proporcional al cuadrado del factor de escala. Como según el PCP las propiedades geométricas no deben variar con el tiempo, la única posibilidad es que la curvatura sea nula[17]. Basándose en ambas aplicaciones del PCP, puede escribirse directamente la métrica del estado estacionario a partir de la de Robertson-Walker,

$$ds^2 = -dt^2 + \exp(2H_0 t)(dr^2 + r^2 d\Phi^2), \tag{3.65}$$

donde la constante de integración de (3.64) está englobada en el elemento de longitud comóvil.

La tercera consecuencia del PCP es que las densidades de energía correspondientes a cada una de las ecuaciones de estado presentes en el universo deben ser constantes. Sin embargo, para que un universo en expansión conserve las mismas propiedades físicas a lo largo del tiempo, en particular la densidad de masa, debe crear energía en forma de materia[18] para compensar la expansión. En efecto, si la densidad media de masa $\rho_m = M/V$ ha de ser una constante ρ_{m0}, donde M es la masa y V es el volumen que contiene dicha masa, su derivada con respecto al tiempo ha

[15] Existen modelos de estado estacionario con formación explosiva de materia en un instante inicial, pero a baja temperatura, por lo que no pueden explicar la radiación de fondo cósmico ni la nucleosíntesis primordial.

[16] De la misma manera que la métrica estática es un caso particular de la estacionaria, siempre que se admita homogeneidad e isotropía.

[17] Esta conclusión, teniendo en cuenta que está establecido observacionalmente, y de forma independiente del modelo asumido, que la densidad de materia pulverulenta es inferior a la crítica, conduce de inmediato a la conclusión de que ha de existir una densidad de energía adicional que añadida a la pulverulenta proporcione un parámetro de densidad total igual a la unidad.

[18] En cierto sentido, en la «Gran Explosión» también se crea energía en el instante inicial. En el estado estacionario, por el contrario, se crea energía a un ritmo constante.

de ser nula y, por tanto, el ritmo Q de creación de materia por unidad de volumen propio será,

$$Q \equiv \frac{\dot{M}}{V} = \frac{M\dot{V}}{V^2} = \rho_m \frac{\dot{V}}{V} = 3H_0\rho_{m0} \tag{3.66}$$

puesto que $V \propto a^{-3}$.

Expresando la densidad actual en función del parámetro de densidad (2.93) y la densidad crítica (2.92),

$$Q = \frac{9H_0^3}{8\pi}\Omega_{m0} = 5\times10^{-44}\ \Omega_{m0}\ \text{kg/s/m}^3 = 0.02\ \Omega_{m0}\ \text{M}_\odot/\text{Ma/kpc}^3, \tag{3.67}$$

donde se ha considerado H_0=65 km/s/Mpc, y se ha tenido en cuenta que en las unidades aquí utilizadas debe dividirse la ecuación anterior por G para obtener las unidades físicas.

Si esta creación de materia es debida a un campo escalar C (Hoyle y Narlikar 1962), el tensor energía-momento del estado estacionario $T^{EE}_{\alpha\beta}$ adopta la forma

$$T^{EE}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - f(C_\alpha C_\beta - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}C^\gamma C_\gamma), \tag{3.68}$$

donde $T_{\alpha\beta}$ es el tensor energía-momento de un fluido perfecto, $C_\alpha = \partial C/\partial x^\alpha$, y f es una constante positiva.

Resolviendo la ecuación de Einstein para la métrica de Robertson-Walker con el tensor energía-momento dado por (3.68), si se tiene en cuenta que domina la masa en reposo,

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi}{3}(\rho_{m0} - 2f\dot{C}^2)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho_{m0} - \frac{f\dot{C}^2}{2}) \tag{3.69}$$

$$\dot{C}f(\ddot{C} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{C}) = (\dot{\rho}_{m0} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_{m0}),$$

donde la densidad de energía ρ_{m0} es la correspondiente al tensor $T_{\alpha\beta}$ para un fluido perfecto. Comparando con las ecuaciones de Fridman (2.87) y (2.88) del capítulo segundo, se deduce fácilmente que el planteamiento anterior es equivalente a

proponer que existe una **densidad de energía adicional negativa** debida al campo escalar de creación de materia, que puede expresarse en la forma (2.77), y que debe añadirse a la densidad de energía pulverulenta para proporcionar la densidad total de energía. Esta densidad de energía adicional tiene una **ecuación de estado** $w = 1$, con lo que **la presión es también negativa** como corresponde a una expansión acelerada,

$$p_{EE} = \rho_{EE} = -\frac{f\dot{C}^2}{2} < 0. \tag{3.70}$$

La cuarta consecuencia del PCP es que $\dot{C}$ ha de ser constante para garantizar la constancia de ρ_{EE}. Como es precisamente esta derivada del campo la que crea energía, entonces creará partículas de masa constante m: $\dot{C} = m$ (en las unidades utilizadas $c = 1$). Tradicionalmente se considera que se crean neutrones, partículas inestables en solitario, que se desintegran según

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}, \tag{3.71}$$

creando, por tanto, hidrógeno. Esta reacción viola la conservación del número bariónico lo cual, como se verá más adelante, es una situación que también se produce en las primeras etapas del universo según el modelo estándar[19]. En el caso de que solamente se creasen protones, se violaría además la conservación de la carga, y también se introduciría una carga electrostática neta en el universo. Si en cambio se creasen protones y electrones por igual, entonces no sería suficiente con un único campo escalar, y además habría que introducir mecanismos adicionales que garantizasen que se crean tantos protones como electrones. Así pues, la hipótesis efectuada es la alternativa más simple.

Con estas consideraciones, y teniendo en cuenta la constancia de la densidad de masa, (3.69) puede escribirse, finalmente,

$$H_0^2 = -\frac{4\pi}{3}(\rho_{m0} - 2fm^2)$$

$$H_0^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho_{m0} - \frac{fm^2}{2}) \tag{3.72}$$

$$fm^2 = \rho_{m0},$$

[19] Pero únicamente en esas primeras etapas, no a lo largo de todas las edades, lo cual es conceptualmente muy distinto.

sistema de ecuaciones que no es independiente, puesto que de la igualación de las dos primeras se obtiene la tercera. Esta tercera ecuación permite determinar el valor del parámetro libre f de tal manera que se ajuste a la densidad de materia medida y a la masa de la partícula cuya creación se postula. Sustituyendo la tercera ecuación de (3.72), en la segunda,

$$\rho_{m0} = \frac{3H_0^2}{4\pi} = 2\rho_{c0}. \tag{3.73}$$

Luego, **en todo universo estacionario la densidad de materia no relativista es igual al doble de la densidad crítica.** Es decir:

$$\Omega_{m0} = 2 \tag{3.74}$$

aunque el universo sea euclídeo. Ello es debido a que la densidad de energía asociada al campo C es negativa (3.70), contrariamente a todas las densidades de energía consideradas hasta ahora, salvo la de curvatura. Una densidad de energía negativa reduce, por debajo de las otras densidades de energía ya presentes, la densidad crítica necesaria para conseguir un universo de curvatura nula (ejercicio 3.30). En efecto, el término entre paréntesis de la segunda ecuación de (3.72) es la densidad crítica. De este modo puede conseguirse un universo euclídeo con $\Omega_{m0} > 1$. En cambio la primera ecuación de (3.72) se comporta de forma análoga a la primera ecuación de Fridman (2.87) en el caso de un universo simbiótico de masa no relativista y constante cosmológica, dado que en (2.87) interviene la presión y el producto $w^{EE}\rho_{EE}$ no se verá afectado por un intercambio de los signos de w^{EE} y de ρ_{EE}. Como las densidades de energía son constantes y el balance es positivo, la expansión es exponencial (3.63) como en el caso de De Sitter (3.1.2).

Finalmente, dado que la aplicación del PCP implica que el universo no ha pasado nunca por fases de temperatura mayor que la actual, no se ha podido efectuar la nucleosíntesis primordial ni conseguir un equilibrio con la materia que explique la radiación cósmica de fondo y su espectro de cuerpo negro. Dado que la nucleosíntesis de elementos como el ^{4}He no se ha podido producir en interiores estelares (como se mostró en el capítulo primero; véase ejercicio 1.14) y el modelo de estado estacionario no permite explicar de forma satisfactoria la radiación cósmica de fondo, este modelo ha sido abandonado.

3.9.2 Modelos con constante de gravitación dependiente del tiempo

Estos modelos cosmológicos alternativos al estándar se obtienen a partir de teorías que reemplacen a la teoría de la relatividad general. Entre ellos destacan el modelo de Dirac (1938, 1974), basado en la hipótesis de los grandes números, y el de Brans-Dicke (1961) y el de Hoyle-Narlikar (1964) basados en la hipótesis de Mach[20] (1893). Todos ellos conducen a modelos en los que la constante de gravitación universal G depende del tiempo en la forma,

$$\frac{\dot{G}}{G} = -\alpha H, \tag{3.75}$$

donde α es una constante positiva, generalmente del orden de la unidad. Cuando $\alpha \to 0$, la teoría se reduce a la de la relatividad general. Por consiguiente, en la actualidad,

$$\left.\frac{\dot{G}}{G}\right|_{t=t_0} = -\alpha H_0 = -\alpha\, 6.6\times10^{-11}\,\text{años}^{-1}. \tag{3.76}$$

No es fácil medir variaciones de G, y sus medidas (basadas en tamaños de galaxias, por ejemplo) no pueden efectuarse a distancias cosmológicas, dado que se mezclarían con efectos evolutivos y con los debidos a la cosmología utilizada (véase la sección sobre distancias de ángulo en el siguiente capítulo). Las determinaciones más recientes y precisas se han obtenido a partir de heliosismología (Guenther *et al.*, 1998):

$$\frac{\dot{G}}{G} \le -1.6\times10^{-12}\,\text{años}^{-1}, \tag{3.77}$$

valor significativamente inferior al esperado (3.76), y que representa un límite difícil de superar por este tipo de teorías.

Hipótesis de los grandes números

Esta hipótesis dio lugar al modelo de Dirac (1938) y, dada su sencilla formulación, se incluye en este apartado a título de ilustración de este tipo de modelos con constante de gravitación dependiente del tiempo.

Las constantes de la física varían su magnitud acorde con el sistema de unidades utilizado (MKS, cgs, etc.). Sin embargo, existen combinaciones de constantes que son adimensionales, por lo que su magnitud no depende del sistema de unidades empleado. Estas combinaciones, por tanto, se supone que expresan

[20] La inercia de un sistema es el resultado de su interacción con el resto del universo. Es decir, cada partícula del universo influye sobre cada una de las demás.

algún hecho físico significativo. Por ejemplo, la constante de estructura fina, $2\pi e^2/hc$ proporciona la intensidad de la interacción electromagnética, que se considera constituye una propiedad intrínseca de la naturaleza. La intensidad de la atracción electrostática entre un protón y un electrón (en unidades gaussianas) relativa a la intensidad de su atracción gravitatoria es otra constante adimensional,

$$\frac{e^2}{Gm_p m_e} \approx 10^{40}, \tag{3.78}$$

del mismo orden de magnitud que la razón entre el radio de Hubble c/H_0 entendido como una longitud de escala del universo, y la longitud $e^2/m_e c^2$ que representa el radio clásico del electrón en unidades gaussianas,

$$\frac{m_e c^3}{e^2 H_0} \approx 10^{40} \tag{3.79}$$

Sin embargo, el valor de esta última expresión depende del tiempo, dado que H es una función del tiempo. Por consiguiente, en otras épocas los valores de (3.78) y de (3.79) no coincidirían. Luego, o bien es una casualidad que ambos valores coincidan precisamente en la época actual, o bien, como Dirac afirmó, ambas constantes adimensionales coinciden porque G varía como lo hace H. Se acepta la variación de G en vez de, por ejemplo, la carga del electrón, porque G y H son constantes de implicaciones macroscópicas mientras que las demás son cantidades microscópicas. Por otro lado, en la hipótesis de Mach, ambas cantidades tienen relación con la estructura a gran escala del universo, lo cual enlaza esta teoría de Dirac con las basadas en la hipótesis de Mach.

Sin embargo, se demuestra que en un universo de curvatura nula dominado por una única ecuación de estado $H \approx t^{-1}$, por lo que en consecuencia $G \approx t^{-1}$ y finalmente se obtiene (3.75) con $\alpha = 1$.

En esta cosmología también se espera creación de materia. En efecto, si se calcula el número N de protones de masa m_p contenidos en una esfera de radio c/H_0 para un universo euclídeo, se obtiene,

$$N = \frac{4\pi}{3m_p}\left(\frac{c}{H_0}\right)^3 \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \frac{c^3}{2m_p G H_0} \approx 10^{80}. \tag{3.80}$$

Luego, $N \approx t^2$.

3.10 **Resumen**

3.10.1 Representación gráfica

A modo de breve resumen gráfico y a título comparativo, en la figura 3.9 se representan tres modelos considerados estándar en distintos momentos de la historia: dos modelos euclídeos, uno de materia no relativista, y el otro simbiótico de materia y constante cosmológica, correspondiente al actual modelo concordante, y el tercero abierto con solamente materia pulverulenta.

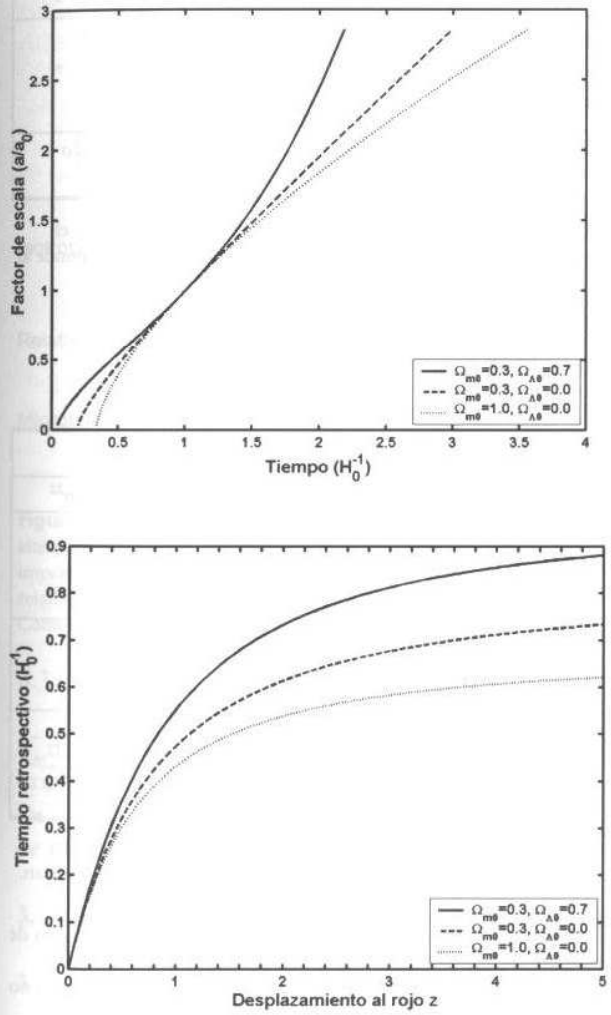


Figura 3.9 Factor de escala (arriba) y tiempo retrospectivo (abajo) para distintos modelos considerados estándar en distintos momentos de la historia, incluyendo el modelo concordante actual.

3.10.2 El modelo estándar

Parámetros de densidad

Ω_{x0}	Valor	Comentarios	Rango de z
Ω_{r0}	0.0001	Deducida a partir del fondo cósmico de fotones, añadiendo los neutrinos	$z >> 3000$
Ω_{m0}	0.30	Deducida a partir del estudio de cúmulos de galaxias. Se descompone en 0.005 emisora, 0.035 no emisora bariónica, 0.26 no emisora no bariónica	$0.33 << z < 3000$
$\Omega_{\Lambda 0}$	0.70	Las observaciones de SNIa y la edad de cúmulos globulares sugieren la presencia de energía oscura con $w < -1/3$. En el modelo concordante se asume que su ecuación de estado corresponde a la constante cosmológica	$-1 \leq z < 0$
$\Omega_{\varepsilon 0}$	0.0	La curvatura es nula como se infiere de las anisotropías del fondo cósmico de radiación	

Tabla 3.3 Valores de los parámetros de densidad comúnmente aceptados en la actualidad para el universo, según el modelo concordante, y su dominio de desplazamientos al rojo. $z < 0$ corresponde al futuro ($z = -1$ cuando $t \to \infty$).

Aproximaciones al modelo estándar

Rango de z	Modelo aproximado		
	Factor de escala	Edad[21]	Edad del universo[22]
$z >> 3000$	$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}}$	$t = \frac{1}{2H_0}(1+z)^{-2}$	$t_0 = \frac{1}{2H_0}$
$0.33 << z < 3000$	$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}$	$t = \frac{2}{3H_0}(1+z)^{-3/2}$	$t_0 = \frac{2}{3H_0}$
$0 < z < 1$	$a = a_0 \left[\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda 0}} \operatorname{senh}^2\left(\frac{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}\,t}{2}\right)\right]^{1/3}$	$t = \frac{1}{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} \ln\left(\frac{\sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3+\Omega_{\Lambda 0}}+\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}{\sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3+\Omega_{\Lambda 0}}-\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}\right)$	$t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}{\sqrt{\Omega_{m0}}}\right)$

Tabla 3.4 Ecuaciones para estimar factores de escala en función del tiempo, edades en función del desplazamiento al rojo y edades del universo, para los rangos de desplazamiento al rojo que se indican.

[21] Entendida como la edad del universo a ese desplazamiento al rojo, despreciando el término de radiación cuando éste ya no domina.

[22] Para el H_0 correspondiente a ese instante. Se desprecia el término de radiación cuando ésta ya no domina.

3.10.3 Cuadro resumen

La manera de obtener modelos cosmológicos alternativos es mediante una o más de tres alteraciones posibles al modelo estándar (figura 3.10):

- Cambiar las condiciones de homogeneidad e isotropía. Por ejemplo, extendiéndolas al tiempo para generar el principio cosmológico perfecto, lo que da lugar al estado estacionario. Modelos que incorporen heterogeneidades espaciales pueden complicar sobremanera la métrica.
- Cambiar la ecuación de Einstein mediante alteraciones en la teoría general de la relatividad, de la cual la solución de Einstein sería un caso particular.
- Utilizar ecuaciones de estado distintas de las de la materia difusa actualmente conocida: sean constante cosmológica o quintaesencias. Estas últimas proporcionan un universo con una expansión menos acelerada que con la constante cosmológica (ejercicio 3.17).

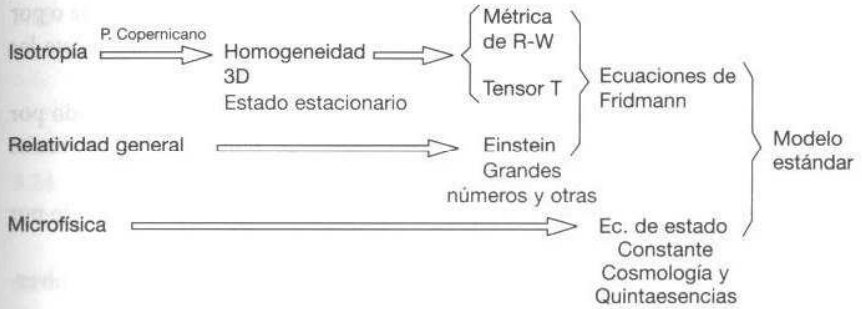


Figura 3.10 Cuadro resumen del capítulo tercero: posibilidades de obtener modelos cosmológicos alternativos mediante alteraciones del modelo estándar. Estas alteraciones pueden consistir en imponer una homogeneidad espacio-temporal, lo que da lugar al estado estacionario, cambiar la relatividad general, o bien definir ecuaciones de estado alternativas a la constante cosmológica. Comparar con el cuadro resumen de la figura 2.11.

3.11 Ejercicios

La comprobación de cada una de las deducciones efectuadas en este capítulo brinda numerosos y excelentes ejercicios, que permitirán familiarizar al lector con los distintos modelos, así como en el manejo de parámetros cosmológicos. A modo de ejemplo se proponen los siguientes ejercicios:

3.1 Determinar la evolución del factor de escala y la edad de un universo de curvatura nula dominado por una única ecuación de estado w = cte.

3.2 Dado un universo con $\varepsilon = 0$, dominado por materia no relativista y $H_0 = 100$ km/s/Mpc, determinar la edad con la que se observa un objeto situado a z = 1.2.

3.3 Determinar la evolución de un universo dominado por energía de curvatura.

3.4 Deducir el valor de la constante α a partir de parámetros cosmológicos (ecuación 3.14).

3.5 Obtener las ecuaciones de la evolución de un universo no euclídeo dominado por materia no relativista (ecuaciones 3.16 y 3.23).

3.6 Deducir la ecuación (3.18).

3.7 Demostrar que para un mismo valor absoluto de la constante de Hubble, la edad de un universo de curvatura positiva dominado por materia no relativista o por radiación disminuye cuando aumenta el parámetro de densidad, y que las edades son menores que en el caso euclídeo correspondiente durante la fase de expansión, mientras que pueden ser menores o mayores durante la fase de contracción.

3.8 Obtener la evolución de la densidad en un universo de curvatura positiva dominado por materia no relativista (ecuación 3.21).

3.9 Demostrar que, para un mismo valor de la constante de Hubble, la edad de un universo de curvatura negativa dominado por materia no relativista o por radiación disminuye cuando aumenta el parámetro de densidad, y que las edades son mayores que en el caso euclídeo correspondiente.

3.10 Demostrar que la edad de un universo de curvatura negativa dominado por materia pulverulenta tiende a la del modelo de Milne en el caso límite $\Omega_{m0} \to 0$.

3.11 Determinar la evolución y la edad de un universo no euclídeo dominado por radiación.

3.12 ¿Para qué valor del tiempo se anula la velocidad de expansión en un universo de curvatura positiva dominado por radiación?

3.13 Obtener la evolución de la densidad en un universo de curvatura positiva dominado por radiación (ecuación 3.36).

3.14 Determinar el valor del parámetro de densidad de radiación para que un universo simbiótico de radiación y materia no relativista no llegue a estar dominado por esta última.

3.15 En el caso de dominio de la radiación, representar gráficamente la evolución del factor de escala y de la edad, para cada curvatura, en función del parámetro de densidad.

3.16 Determinar la evolución de un universo dominado por constante cosmológica. Demostrar que, cuando el parámetro de densidad aumenta, la edad disminuye cuando la curvatura es positiva y aumenta cuando es negativa.

3.17 Determinar la evolución de un universo dominado por una ecuación de estado $w = -1/3$, de otro dominado por quintaesencia de ecuación de estado $w = -2/3$. Compararlos entre sí y con el universo dominado por constante cosmológica. Considerar distintas curvaturas.

3.18. Determinar la evolución de un universo dominado por una ecuación de estado de energía fantasma $w = -4/3$. Comparar con el universo dominado por constante cosmológica.

3.19. Demostrar que un universo dominado por energía fantasma termina con una «Gran Fuga» (el factor de escala diverge) en un tiempo finito.

3.20. Determinar la evolución de un universo euclídeo compuesto de radiación y de materia no relativista.

3.21. Determinar la evolución de un universo euclídeo con constante cosmológica y materia no relativista. Demostrar que sería más viejo que un universo euclídeo del mismo H_0 sin constante cosmológica.

3.22. Estudiar la evolución de una Planilandia euclídea, comparando con el caso tridimensional, cuando domina:
   a. Materia no relativista.
   b. Radiación.
   c. Constante cosmológica.

3.23. Demostrar que, según el modelo concordante, en nuestro universo la energía debida a la constante cosmológica será diez veces mayor que la debida a la materia pulverulenta cuando el factor de escala sea 1.6 veces mayor que el actual. ¿A que desplazamiento al rojo corresponde ese valor? ¿A qué tiempo cosmológico?

3.24. Determinar las ecuaciones que definen todas las curvas de la gráfica 3.6 y reproducir dicha gráfica. ¿Qué hipótesis adicional es preciso imponer para obtener la gráfica 3.6?

3.25. Determinar el valor de $\Omega_{\Lambda 0}$ para el que la curvatura dominaría en nuestro universo en la actualidad.

3.26. ¿Cuál es la fracción de la edad del universo durante la que ha dominado la radiación?

3.27. Determinar el valor de $\Omega_{\Lambda 0}$ para que en nuestro universo nunca llegase a dominar la materia no relativista.

3.28. Demostrar que con $\Omega_{m0} = 0.3$ y constante cosmológica, las observaciones indican que nuestro universo no puede ser un universo rebote en $a \neq 0$.

3.29. Determinar la evolución del factor de escala para universos euclídeos en fase de contracción (universos rebote), dominados por:
   a. Radiación.
   b. Materia no relativista.
   c. Constante cosmológica.

3.30. Determinar el parámetro de densidad de la energía asociada al campo escalar del estado estacionario.

3.12 Bibliografía

3.12.1 Referencias

BONDI y GOLD, T. (1948), *MNRAS* 108, 252.

BRANS, C. y DICKE, R. H. (1961), *Phys.Rev.* 124, 125.

CEPA, J. (2004), *A&A* 422, 831.

DIRAC, P. A. M. (1938), «A new basis for cosmology», *Proc.Roy.Soc.* A165, 199.

DIRAC, P. A. M. (1974), «Cosmological models and the large numbers hypothesis», *Proc.Roy.Soc.* A333, 439.

EINSTEIN, A. (1917), «Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie», *Preuss.Akad.Wiss.*Berlín, Sitzber, 142.

EINSTEIN, A. y SITTER DE, W. (1932), «On the relation between the expansion and the mean density of the Universe», *Proc.Natl.Acad.Sci.* (EEUU) 18, 213.

GUENTHER, D. B.; KRAUSS, L. M. y DEMARQUE, P. (1998), *ApJ* 498, 871.

HOYLE, F. (1948), *MNRAS* 108, 372.

HOYLE, F. y NARLIKAR, J. V. (1962), «Mach's principle and the creation of matter», *Proc. Roy.Soc.* A270, 334.

HOYLE, F. y NARLIKAR, J. V. (1964), «A new theory of gravitation», *Proc.Roy.Soc.* A282, 191.

MACH, E. (1893) *The Science of Mechanics*, Chicago, Open Court.

SITTER DE, W. (1917), «On the relativity of inertia: remarks concerning Einstein's latest hypothesis», *Proc.Akad.Weteusch. Amsterdam*, 19, 1217.

TURNER, M. S. (2002), *ApJ* 576, L101.

3.12.2 Textos recomendados

NARLIKAR, J. V. (^{3}2002), *Introduction to Cosmology*, Cambridge University Press.

LINDER, E. V. (1997), *First Principles of Cosmology*, Addison–Wesley.

HOGG, D. W. (1999), *Distance measures in Cosmology*, astro-ph/9905116.

WEINBERG, S. (1972), *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons.

BERGSTRÖM, L. y GOOBAR, A. (1999), *Cosmology and particle Astrophysics*, John Wiley & Sons.

3.12.3 Enlaces útiles

Página www de este texto

http://webpages.ull.es/users/jcepano

Generales

Diccionario en línea: http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page

Buscador de pretirajes de artículos (astro-ph, y otros): http://www.arxiv.org

Página general de cosmología: http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5

Capítulo 4 | COSMOMETRÍA

Dado un modelo cosmológico definido por la constante de Hubble y los parámetros de densidad de cada una de las ecuaciones de estado que intervienen, las ecuaciones de Fridman permiten determinar la evolución del factor de escala. Salvo incertidumbres a nivel cuántico, y en la suposición de homogeneidad e isotropía espaciales, esta evolución permite determinar la edad y la composición del universo, deducida esta última a partir de la microfísica, como se verá en los capítulos siguientes.

Por el término *cosmometría* se designa la parte de la cosmología que trata de la medición de distancias y volúmenes, la variación de la velocidad de recesión con el tiempo, los objetos que pueden o podrán y no pueden o no podrán observarse, la relación entre las distribuciones espectrales de energía observadas y emitidas, entre otros aspectos. Lógicamente, la métrica es el punto de partida básico de la cosmometría. La métrica de Robertson-Walker viene definida por la curvatura y el factor de escala. Ambas quedan determinadas por los parámetros de densidad de las energías existentes en el universo y además, en el caso del factor de escala, por H_0. Es decir, el modelo cosmológico también determina la cosmometría.

En este capítulo se analizará la cosmometría correspondiente a distintos modelos cosmológicos. Desde los modelos que pueden denominarse básicos, de curvatura nula y una única energía dominante, pasando por los que pueden denominarse históricos, dominados por la energía de la masa en reposo y con distintas curvaturas, hasta concluir con el modelo concordante. El abanico barrido es más que suficiente para que el lector pueda analizar cualquier otro modelo distinto de los aquí presentados. Para terminar, también se revisarán algunas de las características observables discutidas en el capítulo primero bajo la nueva luz aportada por la cosmometría.

4.1 Distancias

La medida de distancias en un universo estático, como puede considerarse a las distancias locales en la Tierra, el Sistema Solar o dentro de la Galaxia, que no están afectadas por la expansión, es conceptualmente más sencilla que la medida de distancias en un universo en expansión. En este último caso es preciso definir distin-

tos tipos de distancias con diferentes aplicaciones. Es decir, la distancia no es un concepto unívoco. Para cada tipo de distancia existirá una dependencia funcional con el desplazamiento al rojo distinta, que dependerá del modelo cosmológico.

4.1.1 Distancias propias y comóviles

Salvo que se especifique lo contrario, el término distancia implica generalmente longitudes que separan un objeto de un observador. Las distancias utilizadas en cosmología no corresponden propiamente a «distancias radiales», ya que no vienen dadas por la coordenada radial r como en el caso estático. La **distancia propia** ya se ha mencionado en el capítulo primero, y es la que mide un observador a un objeto en un instante de tiempo fijo. Se obtiene integrando la métrica de Robertson-Walker (2.26) para un tiempo constante, desde un origen de coordenadas comóviles $r = 0$ centrado en el emisor y hasta el receptor, cuya coordenada comóvil es r. Dado que la métrica es espacialmente isótropa, el resultado no dependerá de la dirección, y podemos considerar cualquier dirección con coordenadas (θ, φ) fijas. Para el instante $t = t_0$ se obtiene

$$D_P = \int_0^{D_P} ds = a_0 \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-\varepsilon r^2}}, \tag{4.1}$$

ecuación que representa la distancia propia en el instante $t = t_0$ a un objeto de coordenada comóvil r.

Cuando la curvatura es nula, y solamente en este caso, la integración de (4.1) proporciona

$$D_P = a_0 r. \tag{4.2}$$

Es decir: la distancia propia en el caso euclídeo es la utilizada en el capítulo primero cuando se introdujo por primera vez el concepto de distancias propias y comóviles.

La segunda integral de (4.1) constituye la **distancia comóvil**,

$$D_C = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-\varepsilon r^2}}, \tag{4.3}$$

que no depende del tiempo si el movimiento peculiar del objeto es despreciable. **Cuando la curvatura es nula, y únicamente en este caso, la distancia comóvil es igual a la coordenada radial comóvil,**

$$D_C = r. \tag{4.4}$$

Por consiguiente, de (4.1) resulta que ambas distancias se hallan relacionadas en cada instante de tiempo por el factor de escala:

$$D_P = aD_C. \tag{4.5}$$

La ecuación (4.5) permite obtener la distancia comóvil tanto analítica como numéricamente a partir de la distancia propia y viceversa.

Es muy importante señalar que en otros textos se designa por distancia comóvil a la propia en el caso $t = t_0$. Sin embargo, ello implica asignar un significado especial al instante actual t_0. Además, el convenio seguido aquí permite identificar la distancia comóvil con la coordenada radial comóvil en el caso euclídeo.

Si el movimiento peculiar es despreciable, y por consiguiente la coordenada comóvil r de un objeto no depende del tiempo, el cociente de la expresión (4.1) entre la misma expresión en un instante de tiempo t permite obtener,

$$D_P \equiv D_P(t_0) = (1+z)D_P(t), \tag{4.6}$$

que proporciona la evolución de la distancia propia con el tiempo o, equivalentemente, con el desplazamiento al rojo: **la distancia propia que nos separa de un objeto dado es $(1+z)$ veces la que nos separaba del mismo objeto, cuando la edad del universo era la correspondiente al desplazamiento al rojo con el que vemos el objeto en la actualidad. A no ser que se indique lo contrario, las distancias y volúmenes propios que se derivan a continuación se entenderán siempre definidos en el instante actual $t = t_0$. Las distancias y volúmenes así obtenidos se acostumbran a denominar comóviles en otros textos.**

La ecuación (4.1) permite calcular la distancia propia en función de la coordenada radial comóvil. La dependencia de la distancia propia con el desplazamiento al rojo se obtiene mediante la relación entre el espacio conforme y el tiempo conforme. Es decir, **midiendo la distancia propia mediante la propagación de la luz,**

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-\varepsilon r^2}} = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a}, \tag{4.7}$$

expresión que se obtiene de la métrica, considerando la trayectoria geodésica $ds = 0$ que sigue un rayo de luz en una dirección fija, que debido a la isotropía espacial es arbitraria, que parte en un tiempo t de una coordenada $r = 0$, y se recibe en un tiempo t_0 en r.

Para visualizar que (4.7) representa la medición de distancias utilizando la luz, es preciso tener en cuenta que, en las unidades utilizadas en este texto y según (4.5), el intervalo diferencial espacial propio cdt dividido por el valor del factor de escala a en ese instante representa la distancia diferencial espacial comóvil que recorre la luz en el

intervalo dt en el cual se puede considerar que el factor de escala no varía. La integral (4.7) de dicho cociente para todo el intervalo temporal transcurrido entre emisión y recepción proporciona la distancia comóvil total que, multiplicada por el valor del factor de escala en el instante t, permite obtener la distancia propia en ese instante (4.5).

La expresión (4.7) depende del modelo cosmológico a través de la dependencia en $a(t)$ y permite hallar la relación entre la coordenada comóvil r y el tiempo o, equivalentemente, el desplazamiento al rojo. Eso no implica que la coordenada comóvil dependa del tiempo, lo cual sería un contrasentido, sino que observar objetos a distintos z equivale a observar estos objetos a distintos t y, debido al carácter finito de la velocidad de la luz, observar a distintas r. Dicho de otra manera, **debido al carácter finito de la velocidad de la luz es posible establecer una relación entre r y la edad a la que se observa ahora dicho objeto en la escala de tiempos cosmológica.**

Finalmente, de (4.1) y (4.7) se obtiene

$$D_P = a_0 \int_t^{t_0} \frac{dt}{a}, \tag{4.8}$$

donde se comprueba explícitamente que se están midiendo distancias con la luz. En efecto, de (4.8) se infiere que en un universo estático, $a = a_0$ y por tanto $D_P = t_0 - t$, que en nuestras unidades ($c = 1$) representa la distancia recorrida por la luz en el intervalo de tiempo transcurrido entre t y t_0. Sin embargo, en un universo en expansión, el factor de escala aumenta en el tiempo $t_0 - t$ transcurrido. Por ese motivo hay que sumar trayectos diferenciales en los que se pueda considerar que en ese intervalo de tiempo el factor de escala no ha variado. Dado que $a < a_0$, la integral (4.8) dará un resultado mayor que en el caso estático. Por tanto, **en un universo en expansión D_P es mayor que en un universo estático debido a que en el intervalo de tiempo transcurrido entre emisión y recepción, la distancia propia ha aumentado.** En un universo en contracción sucedería lo opuesto.

Curvatura nula con una única ecuación de estado dominante

a) $w \neq {}^1/_3, -1$

En el capíulo segundo se demostró que, cuando la curvatura es nula y domina una única ecuación de estado con $w \neq -1$, entonces

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/[3(1+w)]}, \tag{4.9}$$

expresión de la que se obtiene, por definición de H,

$$H = \frac{2}{3(1+w)}\frac{1}{t}. \tag{4.10}$$

La ecuación (4.9) es equivalente a,

$$1+z = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/[3(1+w)]}. \tag{4.11}$$

Sustituyendo (4.9) en (4.8) y aplicando (4.11) y (4.10) para $t = t_0$, se obtiene la distancia propia (ejercicio 4.1),

$$D_P = t_0 \frac{3(1+w)}{1+3w}\left[1-(1+z)^{\frac{-(1+3w)}{2}}\right] = \frac{2}{H_0(1+3w)}\left[1-(1+z)^{\frac{-(1+3w)}{2}}\right], \tag{4.12}$$

expresión que es válida salvo cuando $w = -1/3, -1$, casos que se analizan seguidamente.

Es sencillo demostrar que para z pequeño (4.12) se reduce a la ley de Hubble (1.8).

b) $w = -1/3$

Las ecuaciones (4.9), (4.10) y (4.11) siguen siendo válidas, pero la integración de (4.9) según (4.8) y aplicando (4.11) y (4.10) para $t = t_0$ proporciona

$$D_P = t_0 \ln(1+z) = \frac{\ln(1+z)}{H_0}. \tag{4.13}$$

c) $w = -1$

Corresponde al universo de De Sitter (3.1.2), donde $a = a_1 e^{H_0 t}$. La integración de (4.8) y la expresión del desplazamiento al rojo como cociente de factores de escala proporciona

$$D_P = \frac{z}{H_0}, \tag{4.14}$$

que coincide con el límite de (4.12) cuando $w = -1$. Es decir, **en este caso la ley de Hubble es exacta**. En la figura 4.1 se representa la relación entre la distancia propia y el desplazamiento al rojo para distintas ecuaciones de estado cuando la curvatura es nula.

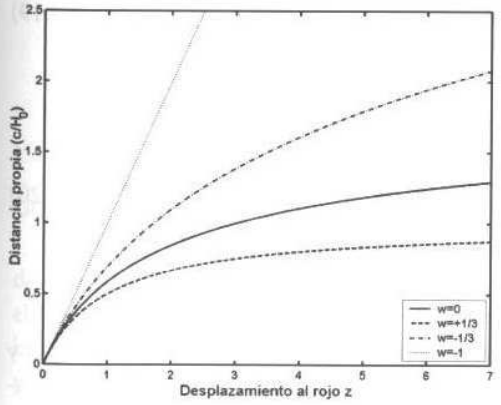


Figura 4.1 La distancia propia para curvatura nula y dominio de una única ecuación de estado en toda la historia del universo.

Curvatura no nula con dominio de masa en reposo

a) $\varepsilon = +1$

En este caso, la integración de (4.8) se realiza mediante el cambio de variable utilizado en el capítulo tercero: $a = \alpha\,\mathrm{sen}^2(Q/2)$. Diferenciando esta última expresión, teniendo en cuenta que $dt = da/\dot{a}$ y que la segunda ecuación de Fridman (3.13) permite escribir $\dot{a} = \sqrt{(\alpha/a)-1}$, se obtiene

$$D_P = a_0(Q_0 - Q). \tag{4.15}$$

Sabiendo que

$$1+z = \frac{a_0}{a} = \frac{\mathrm{sen}^2(Q_0/2)}{\mathrm{sen}^2(Q/2)} = \frac{1-\cos Q_0}{1-\cos Q} \tag{4.16}$$

resulta

$$\cos Q = \frac{z+\cos Q_0}{1+z}. \tag{4.17}$$

Por otro lado, como ya se dedujo en el capítulo tercero (ecuación 3.18),

$$\cos Q_0 = \frac{2-\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}} \tag{4.18}$$

y de (2.94) para $t = t_0$,

$$a_0 = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{m0}-1}}. \tag{4.19}$$

Por tanto, finalmente se obtiene

$$D_P = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{m0}-1}}\left[Q_0 - \arccos\left(\frac{2+\Omega_{m0}(z-1)}{\Omega_{m0}(1+z)}\right)\right]. \tag{4.20}$$

b) $\varepsilon = -1$

Procediendo como en el caso anterior, obtenemos el mismo resultado (4.15) y una expresión equivalente a (4.17) con funciones hiperbólicas. Teniendo en cuenta que $Q=\ln(\mathrm{senh}Q+\cosh Q)$, y que a_0, $\cosh Q_0$ y $\mathrm{senh}Q_0$ se determinaron en el capítulo tercero ((3.24), (3.25)),

$$D_P = \frac{1}{H_0\sqrt{1-\Omega_{m0}}}\left[Q_0 - \ln\left(\frac{2+\Omega_{m0}(z-1)+2\sqrt{(1-\Omega_{m0})(1+z\Omega_{m0})}}{\Omega_{m0}(1+z)}\right)\right] \tag{4.21}$$

(ejercicio 4.2), donde (3.24)

$$\cosh Q_0 = \frac{2-\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}}. \tag{4.22}$$

En la figura 4.2 se representan las distancias propias para un universo dominado por masa en reposo, para distintas curvaturas.

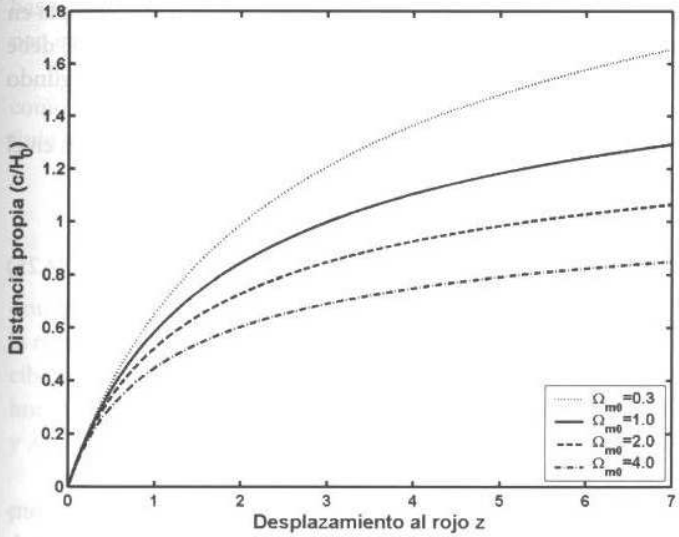


Figura 4.2 Distancias propias en función del desplazamiento al rojo y de la curvatura para un universo dominado por masa en reposo.

Universos simbióticos

Las distancias anteriores son válidas en el caso de que exista una única ecuación de estado, o bien cuando la densidad de energía correspondiente domine en todo el intervalo temporal considerado (que equivale a un intervalo de distancias) de la integral (4.8). Si no domina una única densidad de energía, o bien el intervalo temporal abarca el dominio de varias densidades de energía, puede que (4.8) no tenga

solución analítica, o que ésta sea de una cierta complejidad. Para estos casos simbióticos se acostumbra a expresar la integral (4.8) en función de H y z, mediante diferenciación de la relación entre z y el factor de escala, utilizando la definición de H para sustituir el valor de da en función de dt,

$$D_P = \int_0^z \frac{dz}{H}, \tag{4.23}$$

donde los límites de la integral han cambiado de acuerdo con el cambio de signo. Finalmente, como ya se dedujo en el segundo capítulo (2.100), la segunda ecuación de Fridman permite escribir

$$D_P = \frac{1}{H_0}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\sum_i \Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w^i)}}}. \tag{4.24}$$

Dadas H_0 y las Ω_{i0}, la integración de (4.24) proporciona la distancia propia en función de z en un caso general y en el instante actual. Recuérdese que (4.24) debe incluir el parámetro de densidad de curvatura definido en el capítulo segundo (2.99).

Por ejemplo, en nuestro universo, con las densidades de energía asumidas en el anterior apartado,

$$D_P = \frac{1}{H_0}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0}}}, \tag{4.25}$$

donde Ω_{r0} puede despreciarse cuando $z << 3000$.

4.1.2 Distancia de luz

La distancia propia se obtiene, por tanto, tomando una instantánea del universo, midiendo distancias comóviles diferenciales, sumando dichas distancias y multiplicando por el factor de escala en el instante considerado. Ése no es un procedimiento muy operativo ni que se ajuste a los métodos de medida comúnmente utilizados. Tal como se ha mencionado someramente en el capítulo primero, existen dos métodos principales para la medida de distancias:

- El basado en la medición del flujo de una fuente y su comparación con la luminosidad predicha por otros medios.

- El basado en la medición del ángulo subtendido sobre el cielo por una fuente extensa y su comparación con el tamaño físico del objeto, deducido por otros medios.

En un espacio euclídeo estático, el flujo de una fuente es proporcional a su luminosidad dividida por el cuadrado de la distancia que separa el emisor del receptor, mientras que el ángulo subtendido es igual al tamaño físico de la fuente dividido por la distancia que separa la fuente del receptor. Si se utilizan esas relaciones para ***definir*** distancias en el caso general de un universo no estático, euclídeo o no, las distancias que se obtienen difieren entre sí y de la distancia propia. Éste es el origen del concepto de **distancia de luz** y de **distancia de ángulo**. La primera se define como la raíz cuadrada del cociente de la luminosidad emitida en un instante t dividido por el producto de 4π por el flujo recibido en un instante $t = t_0$, y la segunda como el cociente entre el tamaño físico y el ángulo subtendido en un instante $t = t_0$. Ambas dependen del modelo cosmológico. En este apartado se hallará la expresión de la distancia de luz y en el (4.1.6) el de la distancia de ángulo. A ambas se dedicará especial atención puesto que, como ya se ha mencionado, intervienen en la medida de distancias.

Por tanto, en un universo en expansión y de curvatura arbitraria, se define como distancia de luz D_L aquella que permite establecer la misma relación entre flujo y luminosidad que en el caso euclídeo estático,

$$dF_0 = \frac{dL}{4\pi D_L^2}, \tag{4.26}$$

donde en este caso, como la expansión del universo entre el instante de emisión y la recepción afecta a la longitud de onda de la radiación recibida, dF_0 es el flujo recibido en $t = t_0$ de longitudes de onda comprendidas entre λ_0 y $\lambda_0+d\lambda_0$, y dL es la luminosidad emitida en el instante t de longitudes de onda comprendidas entre λ y $\lambda+d\lambda$, donde se verifica $\lambda_0/\lambda = 1+z$.

Para determinar la relación entre el flujo recibido y la luminosidad emitida, procederemos a calcular el número de fotones emitidos en un tiempo dt con frecuencias comprendidas entre ν y $\nu+d\nu$,

$$dN_\gamma = \frac{dL}{h\nu}dt, \tag{4.27}$$

donde h es la constante de Planck. Si se supone que en el camino que sigue la luz desde el emisor al receptor no existen procesos de creación o absorción de fotones, el número de fotones emitidos será el mismo que el de los fotones recibidos. Si ade-

más se supone que la luz no ha sufrido otros procesos que hagan variar su energía, la única variación de energía que sufrirán entre su emisión y su recepción será una disminución causada por el desplazamiento al rojo. Además, y también debido a la expansión, el emisor emite los fotones en un intervalo de tiempo dt, mientras que el receptor los recibe en un intervalo de tiempo dt_0. Por consiguiente, el receptor detectará el mismo número de fotones dN_γ pero en un intervalo de tiempo dt_0, y con frecuencias comprendidas entre ν_0 y $\nu_0+d\nu_0$. La luminosidad emitida se distribuirá uniformemente, debido a la isotropía del espacio, sobre una superficie «esférica» σ en la que se sitúa el receptor, y cuyo centro es el emisor. Es decir, el flujo recibido dF_0 será

$$dF_0 = \frac{h\nu_0\, dN_\gamma}{\sigma\, dt_0}. \tag{4.28}$$

Sustituyendo (4.27), teniendo en cuenta que $\nu/\nu_0 = dt_0 / dt = \lambda_0/\lambda = 1+z$, y que la métrica estándar (2.26) permite obtener la superficie propia de una «esfera» de coordenada comóvil r fija en un instante de tiempo $t = t_0$ utilizando (2.8),

$$\sigma = a_0^2 r^2 \int_{4\pi} d\Omega, \tag{4.29}$$

resulta

$$dF_0 = \frac{dL}{4\pi a_0^2 r^2 (1+z)^2}, \tag{4.30}$$

de donde, por comparación con (4.26) se obtiene,

$$D_L = a_0 r(1+z) \tag{4.31}$$

ecuación que no depende del modelo cosmológico adoptado y que indica que **la distancia de luz no es igual a la distancia propia, ni siquiera cuando la curvatura es nula.**

A continuación se determinan las distancias de luz para algunos casos relevantes.

Curvatura nula con una única ecuación de estado dominante

Dado que (4.2) y (4.31) muestran que, cuando la curvatura es nula, la distancia de luz es igual a la propia multiplicada por $(1+z)$, la expresión (4.12), (4.13) ó (4.14) multiplicada por $(1+z)$ permite obtener la distancia de luz.

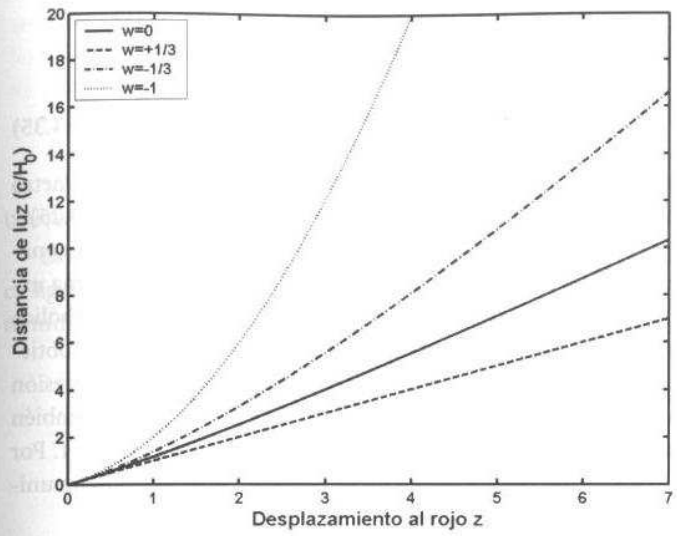


Figura 4.3 La distancia de luz para curvatura nula y dominio de una única ecuación de estado en toda la historia del universo.

Curvatura no nula con dominio de masa en reposo

a) $\varepsilon = +1$

De (4.31) resulta que es preciso determinar r para obtener la distancia luminosa, operación que puede efectuarse mediante (4.7), que permite obtener la coordenada comóvil en función del tiempo o equivalentemente del desplazamiento al rojo. De (4.1) y (4.15) se obtiene

$$r = \text{sen}(Q_0 - Q). \tag{4.32}$$

En el capítulo tercero se dedujeron las expresiones del seno (3.19) y coseno (3.18) de Q_0 en función del parámetro de densidad, mientras que (4.17) proporciona el coseno de Q, expresión a partir de la cual puede obtenerse el valor del seno utilizando las propiedades de las funciones trigonométricas. Armados con estas ecuaciones, (4.32) puede escribirse (ejercicio 4.3),

$$r = \frac{2\sqrt{\Omega_{m0}-1}}{\Omega_{m0}^2(1+z)}\left[\Omega_{m0}z + (2-\Omega_{m0})\left(1-\sqrt{1+\Omega_{m0}z}\right)\right], \tag{4.33}$$

de donde, a partir del valor de a_0 en función del parámetro de densidad (2.94), se obtiene, por sustitución en la ecuación (4.31),

$$D_L = \frac{1}{H_0}\frac{2}{\Omega_{m0}^2}\left[\Omega_{m0}z + (\Omega_{m0}-2)\left(\sqrt{1+\Omega_{m0}z}-1\right)\right]. \tag{4.34}$$

b) $\varepsilon = -1$

Procediendo análogamente al caso anterior,

$$r = \operatorname{senh}(Q_0 - Q). \tag{4.35}$$

Las expresiones del seno y coseno hiperbólicos de Q_0 en función del parámetro de densidad ya han sido deducidas en el capítulo tercero en las ecuaciones (3.25) y (3.24). El coseno hiperbólico de Q puede determinarse por un procedimiento análogo al seguido para obtener la ecuación (4.17), y que proporciona la misma expresión (4.17) cambiando coseno por coseno hiperbólico. Del coseno hiperbólico se puede obtener el seno hiperbólico, mientras que el valor de a_0 también se obtiene de (2.94). Finalmente, sustituyendo en (4.31) se obtiene la misma expresión (4.34) que la obtenida para la curvatura positiva. Asimismo, esta expresión también es válida cuando la curvatura es nula, como se comprueba haciendo $\Omega_{m0} = 1$. Por tanto se deduce que (4.34) **es la ecuación general de la distancia de luz para un universo dominado por materia no relativista.**

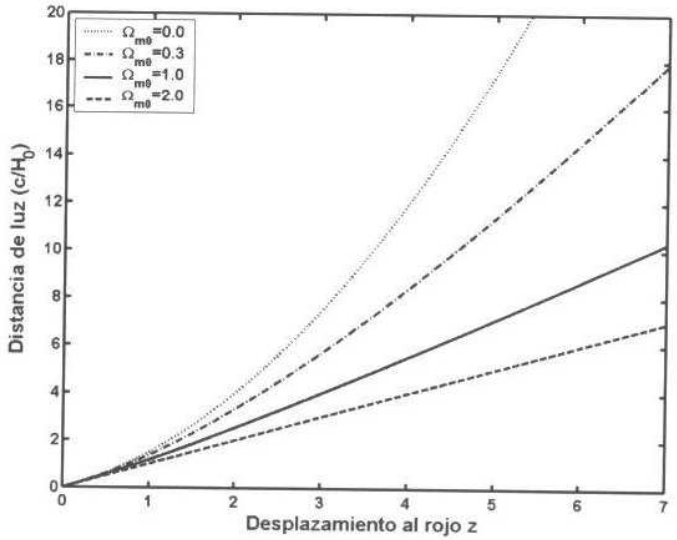


Figura 4.4 Distancias luz en función del desplazamiento al rojo y de la curvatura para un universo dominado por masa en reposo.

Nótense las siguientes características de las ecuaciones de las distancias luz deducidas en este apartado y que se plasman en las curvas de la figura 4.4.

- Desarrollando en serie para pequeños desplazamientos al rojo (ejercicio 4.4), se obtiene la ley de Hubble: $D_L = z/H_0$.
- Para $\Omega_{m0}=2$, la distancia de luz sigue exactamente la ley de Hubble.

- Para $\Omega_{m0}= 0$ (universo de Milne), $D_L = (z/H_0)(1+(z/2))$.
- Cuando $\Omega_{m0}<2$ la ley de Hubble es un límite inferior: las distancias crecen más rápido con z.
- Cuando $\Omega_{m0}>2$ la ley de Hubble es un límite superior: las distancias crecen más despacio con z.

Universos simbióticos

La distancia propia puede obtenerse analíticamente o por integración numérica siguiendo el procedimiento descrito en (4.1.1). Esta distancia propia permite determinar la coordenada radial comóvil r mediante (4.1),

$$r = \begin{cases} \operatorname{senh}\left(D_P/a_0\right) & \text{cuando } \varepsilon = -1 \\ D_P/a_0 & \text{cuando } \varepsilon = 0 \\ \operatorname{sen}\left(D_P/a_0\right) & \text{cuando } \varepsilon = +1, \end{cases} \tag{4.36}$$

teniendo en cuenta la expresión (2.98) de definición del parámetro de densidad de curvatura: $-\varepsilon/a_0^2 = H_0^2\Omega_{\varepsilon 0}$, resulta que $a_0^{-1} = H_0\sqrt{\Omega_{\varepsilon 0}}$ cuando $\varepsilon = -1$ y $a_0^{-1} = H_0\sqrt{|\Omega_{\varepsilon 0}|}$ cuando $\varepsilon = +1$. Entonces, finalmente, de (4.31):

$$D_L = \begin{cases} \dfrac{1+z}{H_0\sqrt{\Omega_{\varepsilon 0}}} \operatorname{senh}\left(D_P H_0\sqrt{\Omega_{\varepsilon 0}}\right) & \text{cuando } \varepsilon = -1 \\ D_P(1+z) & \text{cuando } \varepsilon = 0 \\ \dfrac{1+z}{H_0\sqrt{|\Omega_{\varepsilon 0}|}} \operatorname{sen}\left(D_P H_0\sqrt{|\Omega_{\varepsilon 0}|}\right) & \text{cuando } \varepsilon = +1. \end{cases} \tag{4.37}$$

4.1.3 La corrección K

La distancia de luz (4.31) permite, según (4.30), relacionar el **flujo dF_0 *observado* en un rango de longitudes de onda *entre* λ_0 *y* $\lambda_0+d\lambda_0$** con la **luminosidad dL *emitida* en un rango *entre* λ *y* $\lambda+d\lambda$** donde $\lambda_0=(1+z)\lambda$. Si designamos por $L(\lambda)$ el espectro *emitido* por el objeto, calibrado en luminosidades por unidad de longitud de onda, entonces,

$$dL = L(\lambda)\,d\lambda = \frac{L\left(\dfrac{\lambda_0}{1+z}\right)d\lambda_0}{1+z}. \tag{4.38}$$

donde en la segunda igualdad el espectro emitido se ha desplazado al rojo[1], expresándolo en función de la longitud de onda recibida.

El flujo bolométrico F_0 se obtendrá integrando (4.30) para todo el rango espectral,

$$F_0 = \int_0^\infty \mathrm{d}F_0 = \frac{\int_0^\infty L(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{4\pi D_L^2} = \frac{L_{\mathrm{Bol}}}{4\pi D_L^2}, \tag{4.39}$$

donde L_{Bol} es la luminosidad bolométrica *emitida o recibida*.

Sin embargo, si se trabaja con luminosidades en un rango espectral finito, entre λ_0 y $\lambda_0+\Delta\lambda_0$ el flujo total *observado* en ese rango espectral se obtendrá sustituyendo (4.38) en (4.30) e integrando para el rango espectral observado el espectro desplazado al rojo,

$$F_0^{\Delta\lambda_0} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\Delta\lambda_0} \mathrm{d}F_0 = \frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\Delta\lambda_0} L\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right)\mathrm{d}\lambda_0}{4\pi D_L^2(1+z)}. \tag{4.40}$$

Pero **si se pretende comparar la emisión de dicho objeto en dicho rango espectral con otros del universo local, es preciso determinar el flujo en el rango entre λ_0 y $\lambda_0+\Delta\lambda_0$ correspondiente a la luminosidad *emitida en el mismo rango*.** Por ejemplo, si se observa el flujo a través de un filtro que selecciona la banda espectral B del sistema fotométrico de Johnson, no se estará determinando el flujo de dicho objeto en B, sino el correspondiente a otra banda fotométrica más azul, que no tiene porque tener un equivalente en ningún sistema fotométrico. Existirá, por tanto, una corrección, la llamada **corrección *K***, que permitirá estimar el flujo ***intrínseco*** de un objeto en una banda fotométrica de interés, a partir del flujo ***recibido*** en dicha banda. A desplazamientos a rojo pequeños, se puede considerar que ambos flujos coinciden y la corrección K es despreciable, pero eso no es así a desplazamientos al rojo incluso moderados.

Entonces, como el flujo total $F^{\Delta\lambda_0}$ *emitido* en un rango espectral entre λ_0 y $\lambda_0+\Delta\lambda_0$ será

$$F^{\Delta\lambda_0} = \frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\Delta\lambda_0} L(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{4\pi D_L^2}. \tag{4.41}$$

[1] Nótese que el espectro no solamente se desplaza sino que se distorsiona la escala de longitudes de onda (ejercicio 1.4).

La ecuación (4.40) puede escribirse

$$F_0^{\Delta\lambda_0} = F^{\Delta\lambda_0}\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\Delta\lambda_0} L\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right)\mathrm{d}\lambda_0}{(1+z)\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\Delta\lambda_0} L(\lambda)\mathrm{d}\lambda}, \tag{4.42}$$

expresión que permite determinar el flujo *emitido* en la banda espectral $\Delta\lambda_0$ a partir del flujo *observado* en la misma banda, *conocido el espectro de la fuente en ambos rangos*, para poder determinar las integrales del numerador y denominador de (4.42) (figura 4.5).

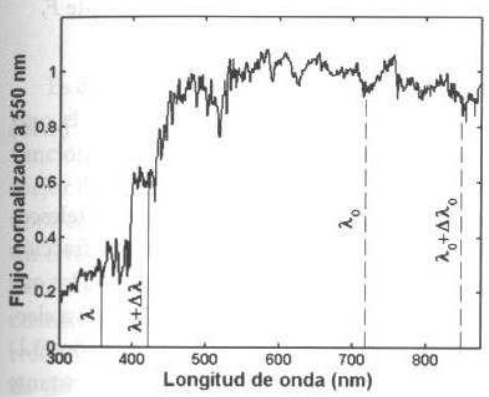


Figura 4.5 Espectro $L(\lambda)\Delta\lambda$ *emitido* por una galaxia elíptica patrón escalado a su flujo a 550 nm (Fioc y Rocca-Volmerange 1997). Para efectuar la corrección K de la fotometría obtenida en un rango espectral dado, es preciso conocer el espectro de la fuente en dicho rango espectral en el momento de la emisión (delimitado por la línea continua) y en el momento de la recepción (delimitado por la línea de trazos), donde la relación entre ambos rangos espectrales viene dada por $(1+z)$. En el ejemplo de la figura, si esta galaxia se encontrase a un desplazamiento al rojo $z = 1$, el rango espectral *observado* en el infrarrojo óptico para una galaxia elíptica a $z = 0$ (delimitado por las líneas de trazos) se correspondería, en la elíptica a $z = 1$, con un rango espectral menor *emitido* en el ultravioleta óptico (delimitado por la línea continua). El flujo recibido no puede, por tanto, compararse con el flujo recibido en el mismo rango espectral procedente de una galaxia local del mismo tipo. Reproducido con permiso de Springer Science and Business Media.

En magnitudes aparentes m, si $m^{\Delta\lambda} = -2.5\log F^{\Delta\lambda}$, tomando logaritmos decimales y multiplicando por -2.5 en ambos miembros de (4.42), la **corrección *K*** se define como

$$m_0^{\Delta\lambda_0} = m^{\Delta\lambda_0} - 2.5\log\left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\Delta\lambda_0} L\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right)\mathrm{d}\lambda_0}{(1+z)\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\Delta\lambda_0} L(\lambda)\mathrm{d}\lambda}\right) \equiv m^{\Delta\lambda_0} + K. \tag{4.43}$$

Por tanto, **la corrección *K* depende del conocimiento del espectro de la fuente.** Es importante señalar que **las luminosidades están todas expresadas por unidad de longitud de onda recibida, en el numerador de (4.43), o emitida, en el denominador de (4.43).**

En magnitudes absolutas M, como se verifica,

$$M = m - MD \equiv m - 5 \log D_L - 25, \tag{4.44}$$

donde MD es el módulo de distancia y la distancia de luz se expresa en Mpc, resulta,

$$M^{\Delta\lambda_0} = m^{\Delta\lambda_0} - MD - K. \tag{4.45}$$

En un caso real, no se mide el flujo $F_0^{\Delta\lambda}$ directamente en unidades físicas, sino en unidades instrumentales $f_0^{\Delta\lambda}$, sean éstas cuentas por segundo (caso de un contador de fotones como es una cámara CCD[2]), energía depositada (caso de un bolómetro) u otra cantidad. Las unidades instrumentales de flujo permiten definir una magnitud instrumental $m_{i0}^{\Delta\lambda} = -2.5 \log f_0^{\Delta\lambda_0}$ que estará relacionadas con las físicas a través de una función $E(\lambda)$, que depende de la longitud de onda, y de una constante F,

$$f_0^{\Delta\lambda_0} = F \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\Delta\lambda_0} E(\lambda_0) \mathrm{d}F_0 = \frac{F \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\Delta\lambda_0} E(\lambda_0) L\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right) \mathrm{d}\lambda_0}{4\pi D_L^2 (1+z)}. \tag{4.46}$$

$E(\lambda)$ expresa la eficiencia total normalizada del sistema formado por el telescopio, la óptica del instrumento, el filtro y el detector. Es decir: representa la fracción normalizada de fotones de longitud de onda λ_0 que se detectan con respecto a los que recibe el telescopio y, en el caso de un CCD, incluye la conversión de fotones a electrones en el detector, que también depende de la longitud de onda. La función $E(\lambda)$ también se denomina respuesta instrumental. En el caso de un CCD, la constante F representa entonces el producto de la constante de normalización de $E(\lambda)$ por un factor de conversión de electrones a unidades instrumentales debido a la electrónica del sistema de lectura. Expresando la conversión de unidades instrumentales a físicas como un factor multiplicativo, puede escribirse $m_{i0}^{\Delta\lambda} = m_0^{\Delta\lambda} + C$. La denominada «calibración en flujo» de las observaciones consistirá en determinar las unidades físicas que corresponden a las unidades instrumentales, para lo cual se requieren observaciones de una fuente calibrada en el mismo rango de longitudes de onda, típicamente una estrella estándar espectrofotométrica, de espectro $L_*(\lambda)$ en unidades físicas, conocido con suficiente precisión, y cuya magnitud aparente se define como cero en dicha banda. Entonces la diferencia entre la magnitud instrumental del objeto y la de la estrella, ambas cantidades resultado de las observaciones, será igual a la magnitud aparente del objeto. Es decir,

[2] Acrónimo del inglés *Charge Coupled Device* o Dispositivo de Carga Acoplada: un detector como el de las cámaras digitales, pero con características cosméticas muy superiores y refrigerado a temperatura cercana a la del nitrógeno líquido para disminuir el ruido de fondo.

$$m_0^{\Delta\lambda_0} = -2.5 \log \left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\Delta\lambda_0} E(\lambda_0) L\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right) \mathrm{d}\lambda_0}{4\pi D_L^2 (1+z) \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\Delta\lambda_0} E(\lambda_0) L_*(\lambda_0) \mathrm{d}\lambda_0} \right), \tag{4.47}$$

y por tanto, expresando $m^{\Delta\lambda_0}$ en los mismos términos que (4.47), la corrección K instrumental queda

$$K = -2.5 \log \left(\frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\Delta\lambda_0} E(\lambda_0) L\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right) \mathrm{d}\lambda_0 \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\Delta\lambda_0} E(\lambda) L_*(\lambda) \mathrm{d}\lambda}{(1+z) \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\Delta\lambda_0} E(\lambda) L(\lambda) \mathrm{d}\lambda \int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\Delta\lambda_0} E(\lambda_0) L_*(\lambda_0) \mathrm{d}\lambda_0} \right), \tag{4.48}$$

Es decir, que en un caso real es preciso conocer no sólo el espectro de la fuente, sino el de la estrella de calibración y la respuesta instrumental. Ninguna de estas funciones se conoce con una precisión relativa mejor que unas centésimas en el mejor de los casos. A menudo, la respuesta instrumental $E(\lambda)$ no se conoce o se conoce con bastante imprecisión. Además, el espectro de la fuente puede incorporar un error considerable en el caso de fuentes débiles (intrínsecamente o debido a la distancia). Por consiguiente, en general la corrección K es muy incierta. Con frecuencia se asume que $E(\lambda)$ y $E(\lambda_0)$ son constantes con lo que se eliminan de la corrección K (4.48). Esta aproximación puede ser bastante realista si el ancho de banda $\Delta\lambda$ es suficientemente pequeño. En otros casos se minimiza la corrección K eligiendo adecuadamente distintos filtros para distintos rangos de z (ejercicio 4.6).

La extinción atmosférica se tendría en cuenta de la manera habitual para el rango espectral recibido entre λ_0 y $\lambda_0+\Delta\lambda_0$ para la fuente y para la estrella, teniendo en cuenta su diferencia de masas de aire. Sin embargo, para el elusivo tema de la extinción interna (debida al propio objeto emisor), habría que tener en cuenta el rango espectral emitido por la fuente entre λ y $\lambda+\Delta\lambda$.

4.1.4 Distancia transversal

Hasta este momento se han determinado distancias entre un objeto y un observador separados por distancias cosmológicas. Para algunas aplicaciones es preciso considerar medidas de distancias «transversales», es decir, distancias entre objetos situados al mismo desplazamiento al rojo y que subtienden una cierta separación angular con respecto al observador (por ejemplo: dos galaxias de campo). Acudiendo una vez más a la métrica (2.26) para un instante de tiempo fijo $t = t_0$, pero con la coordenada radial comóvil constante, y en una dirección cualquiera, en virtud de la isotropía de la métrica, dos ob-

jetos separados un ángulo θ estarán separados por un arco propio s_0. La relación entre el arco y el ángulo se denomina **distancia transversal** D_T, o también **distancia euclídea** D_E debido a que reproduce la expresión euclídea de la igualdad entre el arco y el producto del ángulo por la distancia radial y es igual a la distancia propia euclídea (4.2),

$$s_0 = \int_0^\theta \mathrm{d}s = a_0 r\theta \equiv D_T\theta \equiv D_E\theta. \tag{4.49}$$

Considerando la distancia transversal definida por (4.49) para otro tiempo cosmológico t, obtendríamos una relación idéntica a la (4.6) para la relación entre la distancia transversal para $t = t_0$ y para el tiempo t. Nótese que la distancia transversal comóvil es, por consiguiente, r.

Curvatura nula con una única ecuación de estado dominante

La distancia euclídea o transversal es igual a la distancia propia cuando la curvatura es nula según la ecuación (4.2).

Caso general

Para obtener las distancias transversales basta dividir la distancia de luz determinada en el apartado anterior por $(1+z)$,

$$D_T = \frac{D_L}{1+z}. \tag{4.50}$$

Esta expresión permite obtener la distancia transversal tanto analítica como numéricamente a partir de la distancia de luz.

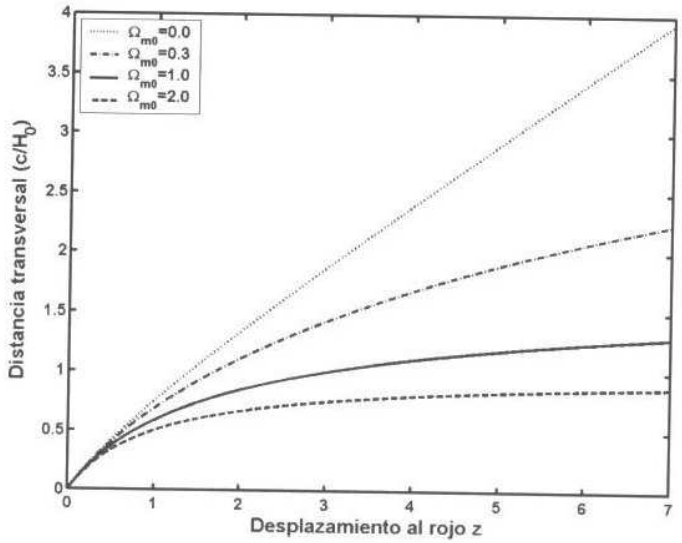


Figura 4.6 Distancias transversales en función del desplazamiento al rojo y de la curvatura para un universo dominado por masa en reposo.

4.1.5 Distancia de movimiento propio

También se denomina así a la distancia transversal o euclídea, puesto que relaciona un movimiento angular propio transversal $\dot{\theta}$ (por ejemplo el de un chorro proyectado por una radiogalaxia) medido en radianes por unidad de tiempo, con la velocidad propia transversal $\dot{s}_0$, como puede comprobarse derivando (4.49) con respecto al tiempo.

$$\dot{s}_0 \equiv D_M\dot{\theta}. \tag{4.51}$$

Por consiguiente, la distancia de movimiento propio se calculará como la distancia transversal o euclídea, dividiendo la distancia de luz por $(1+z)$.

4.1.6 Distancia de ángulo

La distancia transversal proporciona la distancia propia que separa dos fuentes situadas al mismo desplazamiento al rojo y que subtienden un cierto ángulo. Procede preguntarse ahora cuál es el ángulo θ que subtiende un objeto de una longitud l dada en función de la distancia. Ambas preguntas no conducen a la misma respuesta, puesto que en el primer caso estamos hablando de distancias transversales propias mientras que en el segundo estamos hablando de distancias transversales «físicas», es decir, de longitudes no sometidas a la expansión del universo, como sería el caso de diámetros de galaxias, de regiones HII o de la distancia que separa dos galaxias de un mismo cúmulo de galaxias que ya esté en equilibrio de virial. En efecto, (4.6) muestra que las distancias propias disminuyen con el desplazamiento al rojo como $(1+z)^{-1}$. En consecuencia, las longitudes no sometidas a la expansión aumentarán, por comparación con las longitudes propias, por el factor $(1+z)$. Es decir, dado que en este caso las longitudes propias se obtienen a partir de θ mediante distancias transversales (4.49),

$$D_T\,\theta = l\,(1+z). \tag{4.52}$$

Si, por analogía con la geometría euclídea, se define la «**distancia de ángulo**» D_A,

$$D_A \equiv \frac{l}{\theta}. \tag{4.53}$$

Tenemos, de (4.52) y (4.50) por comparación con la anterior ecuación (5.53),

$$D_A = \frac{D_L}{(1+z)^2}, \tag{4.54}$$

o también, utilizando (4.49),

$$D_A = \frac{D_E}{1+z} = \frac{a_0 r}{1+z}. \tag{4.55}$$

La ecuación (4.55) muestra que la distancia de ángulo no necesariamente aumenta con el desplazamiento al rojo o, lo que es lo mismo, **el ángulo subtendido por un mismo objeto de un cierto tamaño físico no necesariamente disminuye cuando el desplazamiento al rojo aumenta**. En efecto, como ya se ha demostrado existe una relación dada por la ecuación (4.7) entre la coordenada radial comóvil r y el desplazamiento al rojo. Esta relación depende de la cosmología, es decir: del modelo cosmológico. Cuando r aumenta con z más rápidamente que $(1+z)$, la distancia de ángulo aumenta. Cuando aumenta con z más despacio que $(1+z)$, disminuye. Salvo en algunos casos, en general la distancia de ángulo aumenta con z hasta alcanzar un máximo a partir del cual disminuye. Equivalentemente, el ángulo subtendido por un objeto de tamaño físico constante disminuye con z hasta alcanzar un mínimo a partir del cual, vuelve a aumentar (figuras 4.7 y 4.8). El desplazamiento al rojo z_M al cual ocurre el máximo de D_A se obtendrá derivando con respecto al tiempo e igualando a cero, lo cual conduce a la condición

$$\frac{dD_A}{dz} = 0. \tag{4.56}$$

Curvatura nula con una única ecuación de estado dominante

En este caso, la distancia de ángulo se obtiene fácilmente a partir de (4.55) y de las expresiones para $\varepsilon = 0$ deducidas en (4.1.1) teniendo en cuenta que las distancias propias son iguales a la euclídea cuando la curvatura es nula. Por ejemplo, de (4.12) se obtiene,

$$D_A = \frac{D_P}{(1+z)} = \frac{1}{H_0}\frac{2}{1+3w}\left[(1+z)^{-1} - (1+z)^{\frac{-3(1+w)}{2}}\right], \tag{4.57}$$

que es válida salvo cuando $w = -1/3, -1$. Aplicando la condición de extremo (4.56), se obtiene (ejercicio 4.7)

$$1+z_M = \left(\frac{3(1+w)}{2}\right)^{\frac{2}{1+3w}}. \tag{4.58}$$

Sustituyendo en (4.57) proporciona máximos en D_A (mínimos en el ángulo subtendido) en

$$D_A(z_M) = \frac{1}{H_0}\frac{2}{1+3w}\left(\frac{2}{3(1+w)}\right)^{\frac{2}{1+3w}}\left[1-\left(\frac{2}{3(1+w)}\right)\right]. \tag{4.59}$$

Es decir, por ejemplo, $z_M = 1.25$, $D_A(z_M) = 0.296/H_0$ cuando el universo está dominado por materia no relativista, y $z_M = 1$, $D_A(z_M) = 0.250/H_0$ cuando domina la radiación.

Cuando $w = -1/3$, (4.13) y (4.55) permiten obtener

$$D_A = \frac{\ln(1+z)}{H_0(1+z)}. \tag{4.60}$$

La condición de extremo (4.56) aplicada a (4.60) proporciona $z_M = e-1$, $D_A(z_M) = 1/(eH_0)$.

Cuando $w = -1$, a partir de (4.14) se obtiene

$$D_A = \frac{z}{H_0(1+z)}. \tag{4.61}$$

La condición de extremo aplicada a (4.61) no proporciona ninguna solución finita, por lo que puede concluirse que, cuando la curvatura es nula y domina la constante cosmológica, no existe un máximo en la distancia de ángulo[3].

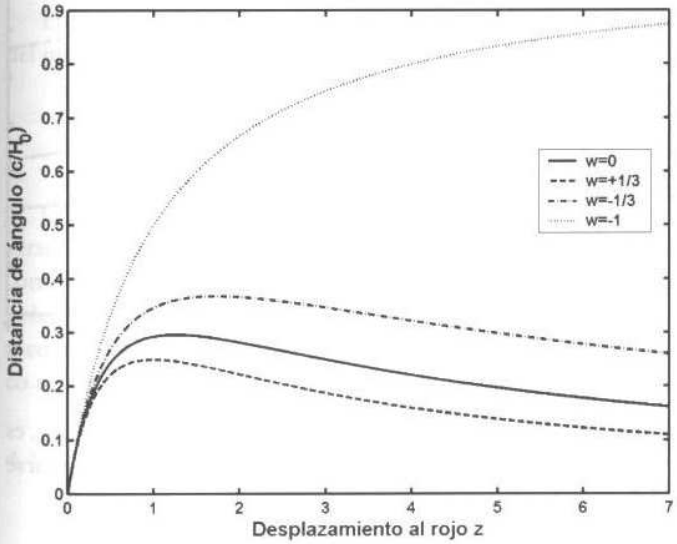


Figura 4.7 Distancia de ángulo para curvatura nula y dominio de una única ecuación de estado en toda la historia del universo. Nótese que no existe un máximo (mínimo en ángulo subtendido por un objeto de tamaño físico fijo) cuando domina la constante cosmológica. El máximo, presente en los restantes casos, depende de la ecuación de estado y toma los valores proporcionados por las ecuaciones (4.58) y (4.59) cuando $w \neq -1/3$ y $z_M = e-1$, $D_A(z_M) = 1/(eH_0)$ en este último caso.

[3] Hasta las distancias en las que la constante cosmológica domina.

Curvatura no nula con dominio de masa en reposo

La distancia de ángulo se obtiene fácilmente a partir de (4.34) y (4.54), para curvatura positiva y negativa,

$$D_A = \frac{1}{H_0}\frac{2}{\Omega_{m0}^2(1+z)^2}\left[\Omega_{m0}z+(\Omega_{m0}-2)\left(\sqrt{1+\Omega_{m0}z}-1\right)\right]. \qquad (4.62)$$

Aplicando la condición de extremo (4.56), se concluye (ejercicio 4.7):

- Cuando $\Omega_{m0} = 2$, $D_A = z/[H_0(1+z)^2]$, por tanto $z_M = 1$, $D_A(z_M) = 0.25$.
- Para $\Omega_{m0} = 0$, el universo de Milne, $D_A = z\,(1+z/2)/H_0$ y no existe máximo.
- En general (figura 4.8), siempre existe un máximo salvo cuando $\Omega_{m0} = 0$, y dicho máximo ocurre a z menores y es más pronunciado a medida que aumenta Ω_{m0}.

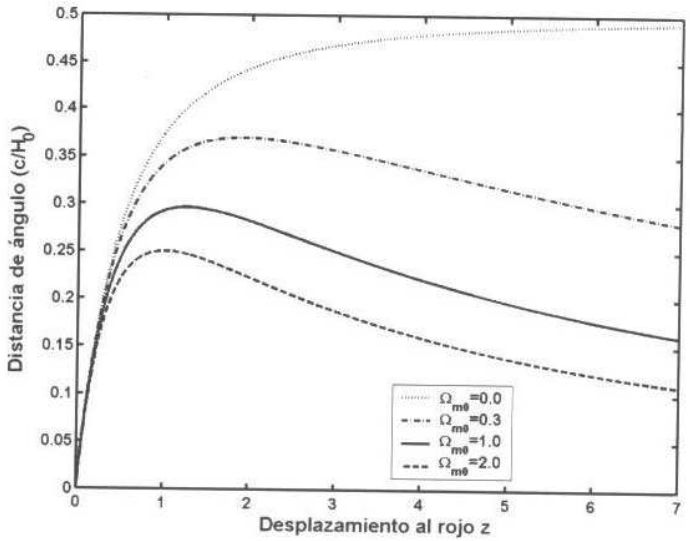


Figura 4.8 Distancias de ángulo en función del desplazamiento al rojo y de la curvatura para un universo dominado por masa en reposo. Puede comprobarse que siempre existe un máximo salvo cuando $\Omega_{m0} = 0$, y que dicho máximo ocurre a z menores y es más pronunciado a medida que aumenta Ω_{m0}.

De la figura 4.8 resulta que la distancia de ángulo aumenta al disminuir Ω_{m0}, es decir, al disminuir la curvatura. Intuitivamente este resultado puede interpretarse mediante la figura 4.9.

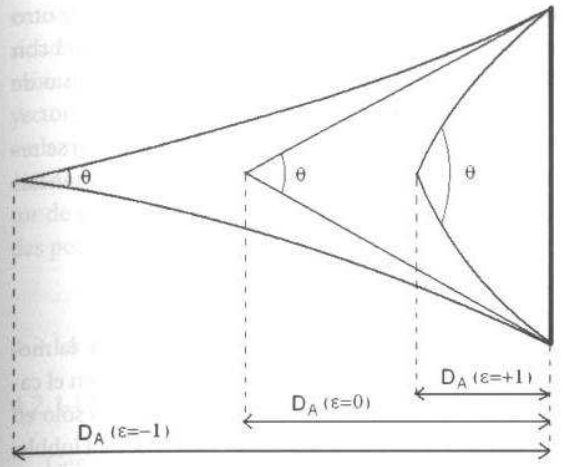


Figura 4.9 Dada una misma longitud física l, las distancias de ángulo aumentan al disminuir la curvatura puesto que disminuye el ángulo subtendido (4.53).

Universos simbióticos

En este caso se obtiene a partir de D_L por el procedimiento descrito en (4.1.2) y utilizando la ecuación (4.54).

4.1.7 Distancias en cosmología

En general, y a modo de resumen, siempre se verifica que, independientemente del modelo asumido,

$$D_T = D_M = D_E = \frac{D_L}{1+z} = D_A(1+z) = a_0 r \qquad (4.63)$$

Conjunto de igualdades que muestra que las distancias propia, comóvil, transversal y de movimiento propio, que surgen directamente de la métrica, pueden considerarse como tales. En cambio, las distancias luz y ángulo son un artefacto práctico para obtener una equivalencia estática y euclídea a distancias obtenidas mediante luminosidades y ángulos subtendidos, en un universo que no sea estático ni, en general, euclídeo.

4.1.8 Evolución de las distancias

Todas las distancias, salvo la comóvil, están afectadas por la expansión del universo y por consiguiente dependen del tiempo cosmológico a través del factor de escala.

En este apartado se ha considerado el instante actual, $t = t_0$. Para cualquier otro instante t, o equivalentemente z, la distancia a un mismo objeto se relacionará con la actual como (4.6) en el caso de distancias propias, euclídeas, transversales o de movimiento propio.

En el caso de las distancias de luz y de ángulo, para que se verifique (4.6) se requiere que el desplazamiento al rojo sea el mismo. Es decir, se trataría de distancias a objetos distintos. Por tanto, en estos casos la relación (4.6) no se verifica.

4.1.9 Los indicadores de distancias

En este apartado se ha establecido el marco esencial de la cosmometría: la medida de distancias en un universo en expansión y con curvatura. Dado que en el capítulo primero se pasó revista a los indicadores de distancia y su papel, no sólo en la determinación de distancias sino en la determinación de la constante de Hubble, procede ahora, a la luz de los conocimientos adquiridos, dar algunas pinceladas para matizar las conclusiones que pueden obtenerse de dichos indicadores.

Esencialmente cabe señalar que, con independencia del modelo cosmológico que se admita, a distancias suficientemente pequeñas o, equivalentemente, a pequeños desplazamientos al rojo, la expansión y la curvatura del universo pueden despreciarse y todas las distancias son iguales entre sí e iguales a la distancia euclídea (ejercicio 4.9). Las discrepancias, dependientes del modelo, surgen a desplazamientos al rojo suficientemente elevados. En este caso **las distancias que proporcionan los indicadores de distancia basados en la luminosidad, que serán por consiguiente distancias de luz, diferirán de las distancias obtenidas con indicadores tales como los diámetros de las mayores galaxias de un cúmulo o las regiones HII de galaxias espirales, que proporcionarán en consecuencia distancias de ángulo.** Es preciso tener en cuenta estas consideraciones al operar con indicadores basados en distintos tipos de distancias.

4.1.10 Distancias en universos heterogéneos

Es preciso señalar que las distancias deducidas en este texto se basan en la homogeneidad e isotropía del universo. Sin embargo, ya en el capítulo primero se comprobó que el universo es homogéneo e isótropo solamente a una cierta escala. La luz que llega procedente de un objeto ha atravesado en su trayectoria regiones con sobredensidades y subdensidades de materia con respecto a la densidad media. Como consecuencia, la luz procedente de objetos con el mismo desplazamiento al rojo pero situados en direcciones distintas, ha atravesado en su camino distribuciones de materia distintas, por lo que la distancia que se mida será diferente. Por ejemplo, si la luz procedente de una fuente ha seguido una trayectoria desde su

emisión hasta su detección a través de una zona con una densidad inferior a la densidad media, la distancia de ángulo medida será mayor (figura 4.9). El factor determinante será, por tanto, la densidad media de materia integrada sobre toda la trayectoria de la luz. Este efecto introduce una incertidumbre difícilmente cuantificable en la medida de distancias, que puede dificultar la determinación de la ecuación de estado de la energía oscura (4.6.3). Sin embargo, las variables globales como el factor de escala o la desaceleración no se ven afectadas, puesto que vienen determinadas por la densidad media.

4.2 La expansión del universo

4.2.1 Ley de Hubble

Generalizando con algo más de rigor la deducción de (1.13) efectuada en el capítulo primero, podemos escribir, a partir de la métrica, la expresión (4.1) para un tiempo cosmológico genérico t,

$$D_P = a\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-\varepsilon r^2}} \equiv aD_C. \tag{4.64}$$

Derivando respecto al tiempo, se obtiene

$$v = \dot{D}_P = H D_P + a\dot{D}_C \equiv v_{\text{recesión}} + v_{\text{peculiar}} \tag{4.65}$$

con $H = \dot{a}/a$. La ecuación (4.65) **es totalmente general y exacta.** No depende de la curvatura ni del modelo de universo. Se verifica en todo universo homogéneo e isótropo. **Para un objeto con una velocidad peculiar despreciable, la única componente radial de la velocidad es la velocidad de recesión** dada por el primer término de (4.65), que depende del desplazamiento al rojo según la dependencia de H y de D_P con respecto a z.

Según la ecuación (4.24), **a pequeños desplazamientos al rojo se verifica la ley de Hubble** $D_P = z / H_0$, puesto que la raíz se reduce a la suma de todos los parámetros de densidad, incluido el de curvatura, suma que es igual a la unidad. Por consiguiente, **la ley de Hubble, que se basa en observaciones, es una aproximación.** Además, Hubble dedujo su ley utilizando cefeidas, es decir, empleando distancias de luz, mientras que la relación (4.65) es válida para distancias propias, no para distancias de luz. Dadas las pequeñas distancias medidas por Hubble, la diferencia es cuantitativamente despreciable puesto que todas las distancias son equivalentes, pero es conceptualmente significativa.

Finalmente, la velocidad de recesión actual es en general igual a z (en nuestras unidades), solamente para pequeños desplazamientos al rojo para los que el producto $H_0 D_P$ se puede aproximar por z (4.65). En efecto, aplicando (4.65) a (4.12), y a modo de ejemplo, se verifica que, para un universo con curvatura nula y $w \neq -1/3$, la velocidad *actual* de recesión es

$$v_{\text{recesión}} = H_0 D_P = \frac{2}{1+3w}\left[1-(1+z)^{\frac{-(1+3w)}{2}}\right], \tag{4.66}$$

expresión que, para pequeños valores del desplazamiento al rojo, es aproximadamente igual a z, pero que en general es distinto de z. En particular, para un universo dominado por materia no relativista ($w = 0$), resulta,

$$v_{\text{recesión}} = 2\left[1-(1+z)^{-1/2}\right]. \tag{4.67}$$

Sin embargo, para un universo dominado por constante cosmológica resulta

$$v_{\text{recesión}} = z. \tag{4.68}$$

En esta cosmología, la velocidad de recesión es exactamente igual al desplazamiento al rojo, para cualquier valor del desplazamiento al rojo.

Por consiguiente, la ecuación (4.65) pone de manifiesto la diferencia entre la dependencia con el desplazamiento al rojo de la velocidad de recesión, debida a la expansión del universo, y la dependencia con el desplazamiento al rojo de la velocidad Doppler, si el desplazamiento al rojo fuera causado por un efecto Doppler. En este último caso, la velocidad es igual al desplazamiento al rojo solamente para pequeños valores de z. En estas circunstancias no se detectaría una diferencia, dado que la velocidad de recesión también es aproximadamente igual al desplazamiento al rojo cuando éste es pequeño. En caso contrario, es preciso utilizar la expresión relativista del efecto Doppler longitudinal,

$$1+z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \tag{4.69}$$

donde $\beta = v_{\text{Doppler}}/c$, de la que se obtiene

$$v_{\text{Doppler}} = c\frac{z^2+2z}{z^2+2z+2}, \tag{4.70}$$

que tiene una dependencia funcional con z claramente distinta de la $v_{\text{recesión}}$ de cualquiera de las ecuaciones anteriores o de las propias de cualquier otra cosmología. Es decir,

$$v_{\text{recesión}} \neq v_{\text{Doppler}}. \tag{4.71}$$

Por consiguiente, queda demostrado que, en caso de admitir la expansión del universo como la causa del desplazamiento al rojo, **la velocidad de recesión no puede interpretarse como debida a un efecto Doppler**. Por otro lado ya se estableció, en el capítulo primero, que la única interpretación plausible del desplazamiento al rojo es precisamente la variación temporal de la métrica, es decir, la expansión del universo.

4.2.2 Evolución de la velocidad peculiar

En el anterior apartado se ha determinado la evolución de la velocidad de recesión actual en función del desplazamiento al rojo para distintas cosmologías. Pero la velocidad peculiar que figura en (4.65) también evoluciona con la expansión del universo. De acuerdo con (2.70), la densidad de materia no relativista evoluciona como,

$$\frac{\mathrm{d}\rho_m}{\mathrm{d}a} = -3\frac{(\rho_m + p_m)}{a}. \tag{4.72}$$

Si no existen velocidades peculiares, es $p_m = 0$, pero si se considera que los movimientos peculiares de las galaxias de campo o de las partículas no relativistas del universo pueden asimilarse a los de un gas monoatómico de masa m con una densidad de partículas propia n, se tiene, en unidades físicas,

$$\begin{aligned} p_m &= nkT_m \\ \rho_m &= \frac{3}{2}nkT_m + nmc^2, \end{aligned} \tag{4.73}$$

donde el primer término de la densidad de energía de (4.73) corresponde a la densidad de energía térmica y el segundo a la densidad de energía de la masa en reposo. Teniendo en cuenta que el volumen propio está relacionado con el comóvil (apartado 2.3.6) mediante $V_P = a^3 V_c$, y suponiendo que la densidad comóvil de partículas no varía, la variación de la densidad propia debido a la expansión es

$$n = n_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^3. \tag{4.74}$$

Sustituyendo (4.73) en (4.72) teniendo en cuenta (4.74), se obtiene,

$$\frac{\mathrm{d}(nkT_m)}{5nkT_m} = -\frac{\mathrm{d}a}{a}, \tag{4.75}$$

cuya integración entre los valores de las variables para un tiempo t y para un tiempo $t = t_0$, teniendo en cuenta (4.74), proporciona,

$$T_m = T_{m0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \tag{4.76}$$

expresión que difiere de (1.24) puesto que esta última se refiere a la temperatura de los fotones, mientras que (4.76) representa la variación con la expansión de la temperatura asociada a la energía térmica de la materia no relativista. Puesto que la densidad de energía térmica también puede expresarse en función de la velocidad cuadrática media:

$$\frac{1}{2}nm\langle v^2\rangle^{1/2} = \frac{3}{2}nkT_m. \tag{4.77}$$

Sustituyendo (4.76) en (4.77) resulta:

$$\langle v^2\rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{3kT_{m0}}{m}}\left(\frac{a_0}{a}\right). \tag{4.78}$$

Por tanto, identificando la velocidad peculiar con la velocidad cuadrática media, resulta que **la velocidad peculiar disminuye con la expansión como** $(1+z)$.

En el caso de partículas, si a_{NR} es el valor del factor de escala para el cual la partícula en cuestión dejó de ser relativista, entonces $\langle v^2\rangle^{1/2}=c$ cuando $a = a_{NR}$. En este caso, (4.78) puede expresarse

$$v_{peculiar} = \langle v^2\rangle^{1/2} = \frac{ca_{NR}}{a}. \tag{4.79}$$

4.2.3 Velocidad de recesión

Puede comprobarse fácilmente que si la expansión ha de cumplir con los principios de homogeneidad e isotropía exigibles al universo, la única posibilidad es que la velocidad de recesión sea proporcional a la distancia (4.65). En este texto se distingue entre la **velocidad de recesión**, definida por (4.65) y la **velocidad de expansión**, dada por la primera derivada del factor de escala con respecto al tiempo,

$$\begin{aligned} v_{recesión} &= HD_p \\ v_{expansión} &\equiv \dot{a}. \end{aligned} \tag{4.80}$$

Mientras que la expansión superlumínica y la expansión acelerada ya han sido analizadas en una cierta extensión en el capítulo segundo, la recesión acelerada y la recesión superlumínica se analizarán a continuación.

4.2.4 Aceleración de la recesión

Al igual que en el caso de la velocidad de recesión, no es lo mismo la **aceleración de la expansión**, ya estudiada en el capítulo segundo, que la **aceleración de la recesión**, que puede obtenerse derivando dos veces (4.64) y despreciando los términos correspondientes a la velocidad y aceleración peculiares (comóviles) del objeto,

$$\dot{v}_{recesión} = \frac{\ddot{a}}{a}D_p \tag{4.81}$$

mientras que

$$\dot{v}_{expansión} = \ddot{a} \tag{4.82}$$

donde el término $\frac{\ddot{a}}{a}$ de (4.81) se relaciona con las densidades de energía mediante la primera ecuación de Fridman (2.87) deducida en el capítulo segundo.

Puesto que la expansión del universo será desacelerada si $\ddot{a} < 0$ y será acelerada si $\ddot{a} > 0$, el término «universo desacelerado o acelerado» designa por igual una recesión que una expansión desacelerada o acelerada, respectivamente.

4.2.5 Recesión superlumínica y el radio de Hubble

La recesión superlumínica

De acuerdo con las anteriores definiciones, no será lo mismo una expansión superlumínica que una recesión superlumínica. Por añadidura, ninguna de las dos contradice la teoría de la relatividad especial. La primera porque el factor de escala no es un objeto material, y la última porque el principio de equivalencia en que se basa la relatividad general (2.2.1), y por consiguiente las ecuaciones de Fridman, establece que la teoría de relatividad especial solamente tiene validez local.

La distancia propia a la cual la recesión ocurre a la velocidad de la luz *en el instante actual* (no en el instante de emisión, ejercicio 4.11) se halla igualando la velocidad de recesión de la ecuación (4.65) en el instante actual a la unidad (en nuestras unidades), lo que por consiguiente corresponde a una distancia propia, llamada **radio de Hubble**, R_H,

$$R_H = H_0^{-1}, \tag{4.83}$$

expresión que es totalmente general y no depende de la cosmología considerada.

En cambio, **el desplazamiento al rojo z_L al cual la recesión es lumínica dependerá de la dependencia funcional de D_P con respecto a z** (4.65). Además, la evolución de R_H vendrá dada por la dependencia de H con respecto a t, o equivalentemente, a z. Es decir, en ambos casos existe dependencia con la cosmología.

Debido a la relación entre velocidad de recesión y distancia (4.65), la recesión será superlumínica en el instante actual para desplazamientos al rojo mayores que z_L. Para un universo de curvatura nula dominado por una única ecuación de estado, de (4.12) se obtiene

$$1+z_L=\left(\frac{2}{1-3w}\right)^{\frac{2}{1+3w}}, \tag{4.84}$$

expresión válida salvo para $w = -1/3, -1$, donde (4.13) y (4.14) proporcionan, respectivamente, $z_L = e-1$ y $z_L = 1$. De (4.84) resulta que para un universo dominado por materia no relativista, $z_L = 3$, mientras que para un universo dominado por radiación, $z_L = \infty$, es decir, en este caso la recesión solamente es lumínica en el instante $t = 0$. La figura 4.10 proporciona los valores del desplazamiento al rojo para los cuales la recesión es lumínica para distintos modelos cosmológicos.

De la figura 4.10 vemos que, a desplazamientos al rojo no excesivamente grandes, la recesión es superlumínica para cualquier curvatura y para ecuaciones de estado dominantes con $w \leq 0$. Sin embargo, en nuestro universo vemos objetos a desplazamientos al rojo superiores[4]. Es más, detectamos la radiación cósmica de fondo que, según las estimaciones efectuadas en el capítulo primero, se produjo a un desplazamiento al rojo superior a 1000, para el cual ya dominaba la materia no relativista sobre radiación y todavía no dominaba la energía oscura. ¿Cómo podemos detectar la luz proveniente de objetos que se alejan de nosotros a velocidades superiores a la de la luz? Podría argumentarse que esos objetos se están alejando en este instante a velocidades superiores a la luz, pero no en el momento en que emitieron la radiación que nos llega ahora. Sin embargo, en un universo desacelerado (como fue el nuestro hasta hace relativamente poco), en el pasado la recesión fue a velocidades todavía mayores (ejercicio 4.11), lo que empeoraría la situación.

La respuesta a esta aparente paradoja reside en la velocidad propia a que se desplaza la luz. En efecto, si en la métrica tomamos $ds = 0$, que es la trayectoria de tiempo mínimo que sigue la luz, una geodésica, y consideramos que la isotropía garantiza la independencia de la dirección, la componente radial de la métrica (2.26) representa según (4.3) un intervalo de longitud comóvil $d\chi$, que permite por tanto obtener la velocidad comóvil de la luz,

$$\dot{\chi}=a^{-1} \tag{4.85}$$

[4] En el momento de escribir este libro, el récord Guiness lo tenía una galaxia con un desplazamiento al rojo $z = 7$ (Iye *et al.*, 2006).

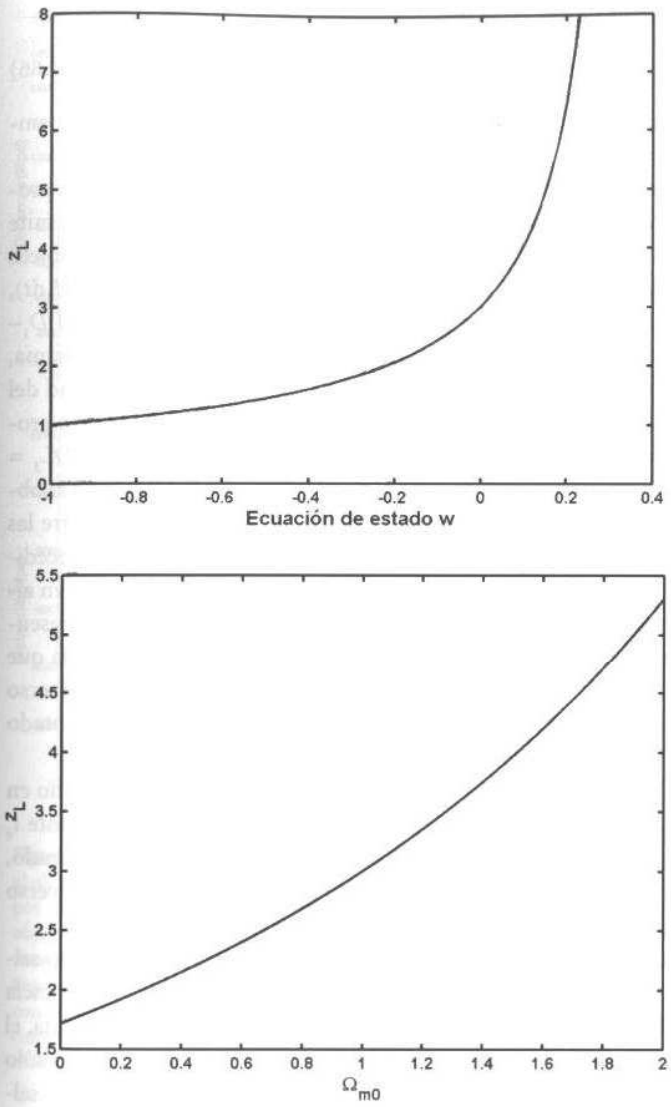


Figura 4.10 Desplazamiento al rojo a partir del cual la recesión es superlumínica. Arriba: curvatura nula y distintas ecuaciones de estado dominantes. Abajo: para distintas curvaturas de un universo dominado por masa en reposo.

y, de (4.65), la velocidad propia de la luz,

$$v_{\text{peculiar}} = 1. \tag{4.86}$$

Es decir, la velocidad propia de la luz es siempre igual a c, no depende del tiempo, es independiente de la expansión.

Por consiguiente, si en un tiempo t_e un objeto que se halla a una distancia propia D_1 de un observador y que se aleja a velocidad superlumínica de éste, emite un rayo de luz en dirección del observador, un tiempo t_e+dt más tarde el objeto se habrá alejado del observador hasta una distancia propia $D_2 = D_1(1+H_1 dt)$, mientras que la luz se habrá desplazado a una distancia propia $DL_2 = D_1+(H_1 D_1 - c)dt$, más próxima al observador que el objeto. Al ser esta distancia más próxima, la luz se alejará, en el siguiente instante de tiempo t_e+2dt, a menos velocidad del observador que el objeto. En ese momento el objeto se hallará a una distancia propia $D_3 = D_2(1+H_2 dt)$, mientras que la luz estará a una distancia propia $DL_3 = DL_2+(H_2 DL_2 - c)dt$, y así sucesivamente. Que el rayo de luz termine llegando al observador o no, dependerá de la evolución con el tiempo de la diferencia entre las sucesivas velocidades de recesión y la velocidad propia de la luz. Este procedimiento iterativo es fácilmente programable (ejercicio 4.12) y los resultados en algunos casos particulares se muestran en la figura 4.11. En esta figura se representa la evolución temporal de la distancia a la que se encuentra un fotón y a la que se encuentra el objeto emisor, para distintas distancias en el caso de un universo desacelerado y de otro acelerado. Ejemplos de ambos casos se han representado conceptualmente en la figura 4.12.

En conclusión, la luz de un objeto terminará llegando a un observador o no en un cierto instante de tiempo, dependiendo de la distancia inicial D_1, el instante t_e en que se emitió el rayo de luz y la evolución de H. **En un universo desacelerado**, H disminuye con el tiempo, y **la luz terminará llegando siempre. En un universo acelerado, la luz llegará o no, dependiendo de D_1 y t_e** (figura 4.11).

Esta circunstancia es paralela a la aventura de un salmón que remonta un río saltando para dirigirse a la región de desove. Si la velocidad del río es tal que la distancia que es arrastrado el salmón entre salto y salto es menor que la distancia que salta, el salmón llegará a desovar. Si por el contrario la distancia es mayor, el salmón no sólo no llegará jamás a la zona de desove, sino que se alejará cada vez más de la misma, salvo que sea capaz de llegar en un único salto, lo cual sólo será posible si la distancia D_1 que le separa de la zona de desove es menor o igual a la distancia que puede saltar.

Otro ejemplo más moderno y menos romántico puede ser el de una persona que intenta bajar por una escalera mecánica que sube[5] (figura 4.13): la persona representa el fotón, el observador está situado al pie de la escalera, la longitud de la escalera es la distancia propia que separa el emisor del observador en el momento de la emisión del fotón, y la velocidad de subida de la escalera representa la expansión del universo. La persona efectúa el movimiento de descender a velocidad constante, como el fotón que se mueve con una velocidad propia constante, mientras que la escalera puede aumentar o disminuir su velocidad de ascenso, como un universo en

[5] Se desaconseja llevar a la práctica esta experiencia.

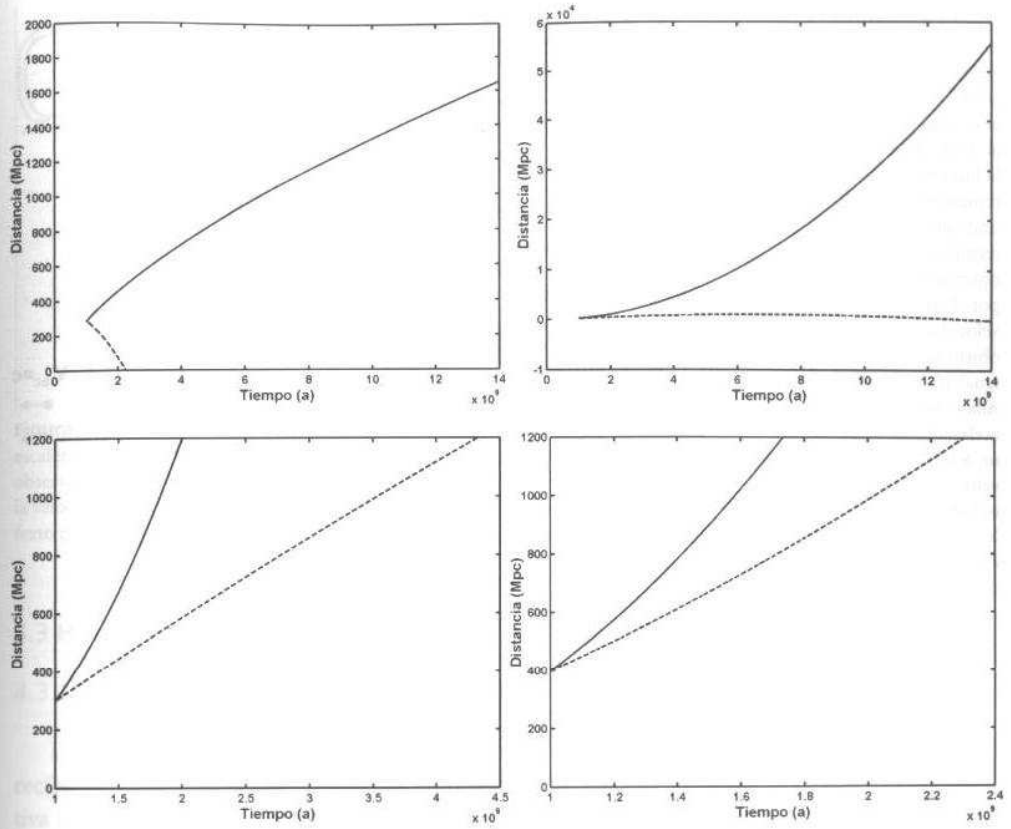


Figura 4.11 Evolución de la distancia de un fotón al observador (línea de trazos) y del objeto emisor al observador (línea continua) en función del tiempo para universos de curvatura nula dominados por una única ecuación de estado. El fotón se emite cuando $t = 10^9$ años. Arriba izquierda: cuando el objeto emite el fotón se encuentra a una distancia de 285 Mpc en un universo con $w = 0$. Arriba derecha: misma distancia de emisión pero ahora $w = -2/3$. En este caso el fotón tarda mucho más en llegar puesto que el universo es acelerado. Abajo izquierda: para una distancia de emisión de 300 Mpc con $w = -2/3$, el fotón tardaría todavía más en llegar, pero terminaría llegando como se deduce de la convexidad de la trayectoria. Abajo derecha: para el mismo caso anterior pero partiendo de 400 Mpc, el fotón no llegaría nunca, como se deduce de la concavidad de la trayectoria.

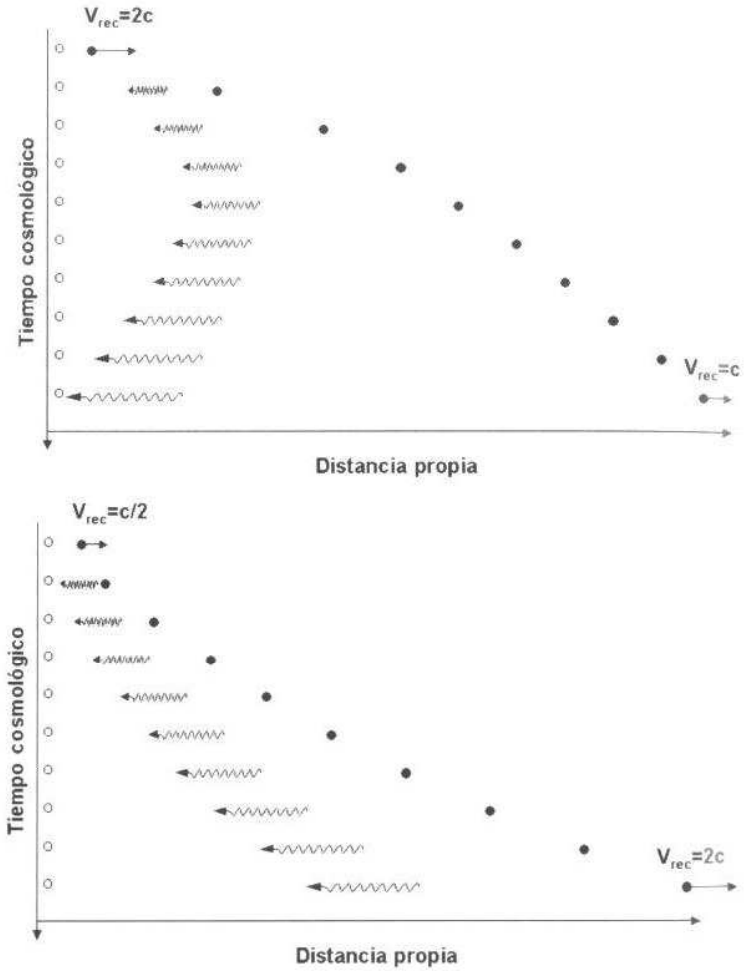


Figura 4.12 Arriba: en un universo desacelerado un objeto, representado por el punto, que tiene una velocidad de recesión igual al doble de la velocidad de la luz, emite un fotón, representado por la línea ondulada. Este fotón termina llegando al observador, representado por el círculo, cuando la velocidad de recesión del objeto que lo ha emitido es igual a la velocidad de la luz. Abajo: en un universo acelerado, un objeto emite un fotón cuando su velocidad de recesión es la mitad de la velocidad de la luz. Sin embargo este fotón no llega nunca al observador.

expansión acelerada o desacelerada, respectivamente. Además, la escalera tendrá mayor o menor velocidad según la distancia que separa la persona (fotón) del suelo (observador). En estas circunstancias, en un universo (escalera) desacelerado, el fotón (persona) siempre terminará llegando aunque inicialmente la distancia que le separa del observador pueda aumentar. En un universo acelerado, en cambio, solamente llegarán los fotones más próximos para los que la velocidad de recesión (de subida de la escalera) no llega a ser demasiado alta (figuras 4.11 y 4.12).

Este razonamiento es clave para comprender el significado de los horizontes cosmológicos.

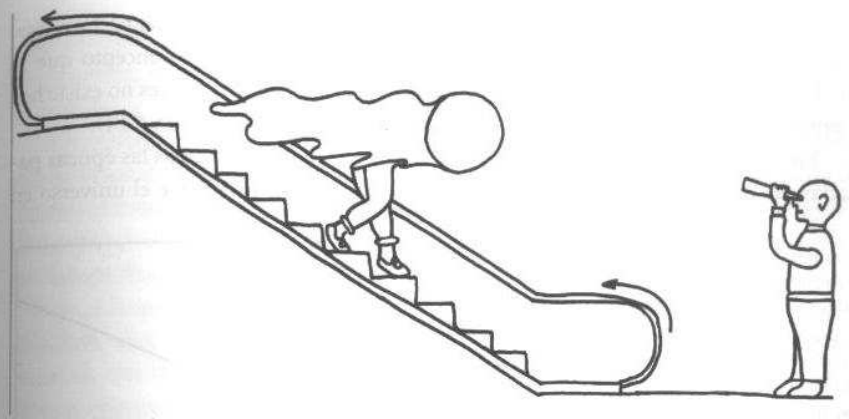


Figura 4.13 Un fotón, representado por una persona que desciende a velocidad constante (c) una escalera mecánica que sube, la cual representa la expansión del universo, alcanzará o no a un observador situado al pie de la escalera dependiendo de la distancia que le separa del observador y de la velocidad con la que sube la escalera en función de la distancia al observador y del tiempo (véase texto para más detalles).

4.3 Horizontes cosmológicos

4.3.1 Concepto de horizonte cosmológico

De acuerdo con las conclusiones del apartado anterior, para saber si se podrá o no recibir ahora ($t = t_0$) la luz emitida por un objeto en un instante $t < t_0$, no es indicativa la velocidad de recesión en el momento de la emisión, sino que es preciso determinar la distancia propia que nos separa de él, dado que ésta se obtiene calculando la integral del diferencial de tiempo conforme (dt/a) entre el instante t de la emisión y el instante actual t_0, *puesto que las distancias se miden con la luz* como se señaló en (4.1.1). Dicho de otro modo, la relación (4.8) que proporciona la distancia propia y que se obtiene de la relación (4.7) entre tiempo y espacio conformes, indica que la luz emitida en un instante t por un objeto situado a una distancia D_p llega ahora, en el instante t_0. Luego la luz emitida por este mismo objeto en instantes de tiempo posteriores a t no ha llegado y la emitida en instantes anteriores a t ya llegó. En consecuencia, si el límite $t = 0$ de la integral (4.8) existe y es finito, la distancia propia correspondiente representa el límite teórico del universo observable en el instante $t = t_0$. Es decir, la distancia a la que se encuentran los hipotéticos objetos que emitieron la primera luz generada en el origen del universo, si es que éste está definido (figura 4.14) y que *llega ahora* ($t = t_0$). No es posible, por tanto, ver más allá. Los fotones emitidos en $t = 0$ que llegan en un instante de tiempo $t < t_0$, definen el límite del universo observable en el instante t, y fueron emitidos en $t = 0$ pero a una coordenada ra-

dial comóvil (según 4.7) o equivalentemente a una distancia propia menor. En suma, a esta distancia propia se la denomina «horizonte de partículas», concepto que se analizará en 4.3.2. Si en cambio dicha integral definida diverge, entonces no existe horizonte de partículas: los fotones emitidos en $t = 0$ no llegarán (figura 4.14).

En consecuencia, cuando existe un horizonte de partículas todas las épocas pasadas del universo son accesibles a la observación. Puede sondearse el universo en

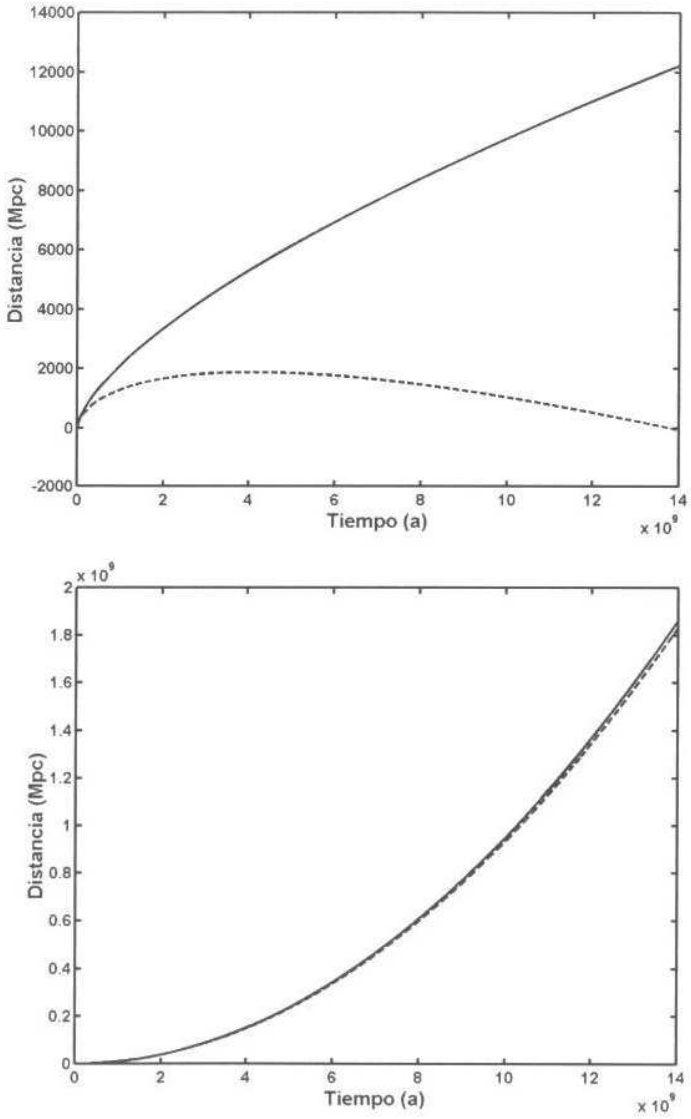


Figura 4.14 Horizontes de partículas para universos euclídeos dominados por una única ecuación de estado. Se representa la evolución en función del tiempo de la distancia al observador de un fotón emitido cuando $t = 0$ (línea de trazos), y del objeto emisor (línea continua). Arriba: en un universo desacelerado, el fotón llega cuando t =14 Ga, que representaría el instante actual. La distancia al objeto emisor en el instante de la recepción del fotón representa el horizonte de partículas. Abajo: en un universo acelerado el fotón emitido en t = 0 no llega nunca. El horizonte de partículas no existe.

toda su «profundidad temporal», aunque solamente sea accesible a la observación una porción de su volumen espacial total (el cual podría ser incluso infinito, según el modelo).

Sin embargo, como se demostró en el apartado anterior, si la recesión se acelera puede llegar un momento en que en el futuro no se reciba la luz que parte ahora de objetos suficientemente lejanos ni aun esperando un tiempo infinitamente largo. La distancia de un objeto a la cual la luz que parte *en este momento* de él no llegará en un tiempo finito en el futuro (figura 4.15), viene dada por la integral (4.8) entre t_0 y $t \to \infty$, si es que tiene solución finita, y se denomina «horizonte de sucesos», que se estudiará en 4.3.3. Si en cambio dicha integral diverge, entonces en el futuro todo el universo será observable y no existe horizonte de sucesos. En rigor, por tanto, el horizonte de sucesos es la hipersuperficie espacio-temporal que define una frontera en el espacio-tiempo entre el conjunto de sucesos observables y el de los sucesos no observables. Por consiguiente, ambos horizontes, el de partículas y el de sucesos, son distintos incluso en lo que se refiere al espacio en el que se definen.

Según el diccionario de la Real Academia Española, horizonte es la «línea que limita la superficie terrestre a que alcanza la vista del observador». Análogamente, podría definirse horizonte cosmológico como la distancia propia a la que se pueden observar objetos[6]. Es decir, definirá el «universo observable». Este horizonte, lo mismo que en la Tierra, depende del observador. Sin embargo, existen diferencias muy importantes con respecto al horizonte terrestre: el horizonte cosmológico dependerá del tiempo pero no de la dirección[7] (debido a la isotropía del universo). Entonces, teniendo en cuenta la flecha que marca la dimensión temporal, será posible distinguir dos horizontes: hasta donde podemos ver hacia el pasado, el **universo observable pasado, u «horizonte de partículas»**, y hasta donde podremos ver en el futuro, **universo observable futuro u «horizonte de sucesos»**. La dependencia del horizonte cosmológico con el observador no implica que el tamaño del horizonte, para un mismo instante de tiempo, sea distinto según la posición. Eso iría en contra de la homogeneidad del universo. Implica que la porción de universo que engloba será distinta para cada observador. Por consiguiente, los horizontes se hallan definidos para un punto del espacio y un instante de tiempo, dado que al ser distancias propias, evolucionan con el tiempo. Nótese que, al igual que en el caso del horizonte geográfico, cuando se habla de horizonte de partículas u horizonte de sucesos, se entiende que se refiere a la **distancia** al horizonte de partículas o de sucesos, respectivamente.

[6] En este contexto, el término «objetos» debe entenderse como cualquier elemento emisor. Pueden ser galaxias, anisotropías del fondo cósmico de microondas, etc.

[7] El horizonte terrestre depende de la orografía local, que a su vez depende de la dirección y del observador. Es decir, existe anisotropía y heterogeneidad, respectivamente.

4.3.2 Horizonte de partículas

El horizonte de partículas, H_P, representa el límite hasta el que se pueden observar objetos hacia el pasado, el universo observable pasado. El límite absoluto será el origen de tiempos cosmológico $t = 0$, en los modelos en que éste esté definido. Tal como ya se ha discutido en 4.3.1, este horizonte puede obtenerse como el límite de D_P cuando $t \to 0$, en las expresiones para la distancia propia deducidas en (4.1.1). Es decir, de manera formal se define como

$$H_P = \lim_{t\to 0} D_P = a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a}. \tag{4.87}$$

La integral de (4.87) implica que **el horizonte de partículas compendia toda la historia previa del universo** debido a que resume la evolución histórica del factor de escala, es decir, tiene en cuenta todas las formas de energía que han intervenido en el universo hasta el momento actual. Dicho de otro modo y como ya se ha indicado, entre el observador y el horizonte de partículas se observan regiones que cubren todos los instantes de la evolución del universo.

Tal como se mencionó en 4.3.1, el horizonte de partículas es una distancia propia que representa el límite del universo hipotéticamente observable: la luz que llega de los objetos situados a esa distancia fue emitida cuando $t = 0$, en el origen del universo. No pueden verse objetos situados a distancias mayores. Sin embargo un instante más tarde, en un tiempo cosmológico t_0+dt_0, llegará la luz procedente de un objeto más distante, por tanto el horizonte de partículas aumentará con el tiempo, como se demostrará en 4.3.5.

Curvatura nula con una única ecuación de estado dominante

Tomando el límite para $z \to \infty$ de las expresiones (4.12) deducidas para D_P en (4.1.1), se obtiene

$$H_P = \frac{2}{H_0(1+3w)}, \tag{4.88}$$

siempre que el exponente del término $(1+z)$ de (4.12) sea negativo, es decir, $w > -1/3$. **Cuando $w < -1/3$, $H_P \to \infty$, por lo que el horizonte de partículas no existe. Para el caso $w = -1/3$, el límite de (4.13) también diverge.** En cambio, **cuando $w = -1$** (4.14), z no puede crecer indefinidamente dado que en este caso $a=a_1 \neq 0$ cuando $t = 0$ (3.3), por lo que **sí habrá un H_P.** Finalmente, **cuando $w = 1/3$ el horizonte de partículas coincide con el radio de Hubble** (4.83).

En un universo estático pero con un origen de tiempos, (4.87) proporciona $H_P = t_0$, dado que $a=a_0$. En este caso, el horizonte de partículas es igual a la distancia recorrida por la luz desde $t = 0$, independientemente de la curvatura. De ahí que no puedan verse objetos a distancias mayores. Por el contrario, en un universo en expansión, la ecuación (4.10) en el instante actual permite escribir (4.88) en la forma,

$$H_P = \frac{3(1+w)}{(1+3w)} t_0. \tag{4.89}$$

Para los límites de validez de la ecuación, es decir, $w > -1/3$, por lo que entonces $H_P > t_0$. **El horizonte de partículas de un universo en expansión es mayor que en el caso estático** debido a que, en el intervalo transcurrido entre la emisión y la recepción de la luz, la expansión del universo ha alejado el emisor del receptor aumentando el horizonte, que es una distancia propia (figura 4.14). En efecto, en un universo dominado por materia no relativista el horizonte de partículas es el triple del caso estático mientras que es solamente el doble en el universo dominado por radiación. Ello es así porque (4.9) muestra que la expansión es más rápida en el primer caso que en el segundo.

Curvatura no nula con dominio de la masa en reposo

De acuerdo con (4.87) procede tomar el límite de las expresiones deducidas para D_P. En este caso se anulan tanto el arccos que aparece en (4.20) como el logaritmo que aparece en (4.21).

a) $\varepsilon = +1$

Teniendo en cuenta (4.18),

$$H_P = \frac{\arccos\left[(2-\Omega_{m0})/\Omega_{m0}\right]}{H_0\sqrt{\Omega_{m0}-1}}. \tag{4.90}$$

b) $\varepsilon = -1$

Teniendo en cuenta que $Q_0 = \ln(\mathrm{senh}Q_0 + \cosh Q_0)$, (3.24) y (3.25),

$$H_P = \frac{\ln\left[\left(2-\Omega_{m0}+2\sqrt{1-\Omega_{m0}}\right)/\Omega_{m0}\right]}{H_0\sqrt{1-\Omega_{m0}}}. \tag{4.91}$$

Curvatura positiva con dominio de $w < -1/3$

En el caso $w < -1/3$, el factor de escala no puede tender a cero, como ya se comprobó en el capítulo segundo. Entonces el valor de $t = 0$ corresponde a un valor de

$a=a_1\neq 0$, es decir, a un valor de $z = a_0/a_1$, finito, y entonces sí existe el horizonte de partículas. Eso no sucede cuando la curvatura es negativa, y en ese caso no existe horizonte de partículas.

Universos simbióticos

Tomando el límite de (4.24) se obtiene

$$H_{\mathrm{P}} = \frac{1}{H_0}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\sum_i \Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w^i)}}}, \tag{4.92}$$

expresión que permite obtener el horizonte de partículas en un caso general.

4.3.3 Horizonte de sucesos

Así como el horizonte de partículas representa la capacidad de observar el pasado, **el horizonte de sucesos representa, entre otras cosas, la capacidad de comunicarse en el futuro.** Es decir, informa acerca de si la luz que es emitida por un objeto situado a una cierta distancia *en este instante* nos llegará en el futuro, aunque tenga que transcurrir un tiempo muy largo. Por un razonamiento análogo al caso de la deducción del horizonte de partículas, y ya efectuado en (4.2.5), el horizonte de sucesos se obtendrá de

$$H_{\mathrm{S}} = \lim_{t\to\infty}(-D_{\mathrm{P}}) = a_0\int_{t_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{a}, \tag{4.93}$$

donde el cambio de signo se introduce para cambiar los límites de la integral (4.8) dado que el tiempo va ahora hacia el futuro. La ecuación (4.93) es válida siempre que t pueda tender a infinito, es decir, cuando la expansión del universo no se revierta en contracción. Este procedimiento es equivalente a tomar $z\to -1$. Si la integral (4.93) diverge, significa que no existe horizonte de sucesos y, en el futuro, se podrán ver todos los objetos del universo (estarán en un momento u otro en conexión causal con la línea de mundo del observador). Si (4.93), por el contrario, da un valor finito, ése será el horizonte de sucesos, es decir, la **distancia propia *actual* de un *suceso que nunca estará en conexión causal con el observador*.** Por ejemplo, si estallara en este instante una supernova en un objeto situado justo más allá del horizonte de sucesos, esa luz no será recibida en el futuro por el observador (figura 4.15). **Un observador situado en la actualidad a una distancia propia igual o mayor que el horizonte de sucesos de otro observador no podrá comunicarse en el futuro con éste. El horizonte de sucesos representa la frontera entre los sucesos observables y no observables. Delimita, por consiguiente, el universo observable futuro.**

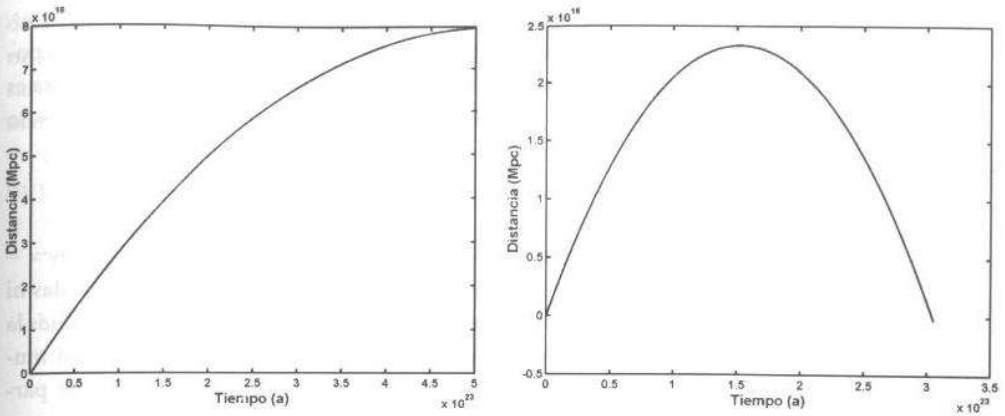


Figura 4.15 Horizontes de sucesos para universos euclídeos en expansión acelerada dominados por una única ecuación de estado. Se representa la evolución de la distancia al observador de un fotón emitido cuando $t = t_0$ en función del tiempo. Izquierda: el fotón se emite en el horizonte de sucesos. Termina manteniéndose a la misma distancia del observador. Derecha: con los mismos parámetros del caso anterior, el fotón que se emite a una distancia ligeramente inferior al horizonte de sucesos termina llegando aunque transcurrido un largo tiempo.

Al igual que en el horizonte de partículas, y debido a la integral de (4.93), **el horizonte de sucesos abarca eventos que se extienden a lo largo de toda la historia futura del universo,** como era de esperar dado que en su determinación se tiene en cuenta, al integrar, la futura evolución del factor de escala, es decir, tiene en cuenta todas las formas de energía que intervienen e intervendrán en el universo. Es preciso aclarar que el horizonte de sucesos se define en el espacio-tiempo y que, aunque en caso de existir abarca sucesos que se distribuyen por todo el futuro, también puede contener sucesos del pasado.

Curvatura nula con una única ecuación de estado dominante

Evaluando (4.93) para los modelos (4.12) se obtiene, cuando domina una única ecuación de estado,

$$H_{\mathrm{S}} = \frac{-2}{H_0(1+3w)} \tag{4.94}$$

siempre que $w < -1/3$, en caso contrario (4.93) diverge, es decir, **no existe un horizonte de sucesos. En un universo dominado por constante cosmológica, $H_{\mathrm{S}} = R_H$,** como se comprueba comparando (4.94) para $w = -1$ con (4.83). Además, en este caso, **al ser H constante** (universo de De Sitter (3.1.2), **H_{S} y R_H también lo son.**

Curvatura no nula con dominio de materia no relativista

En este caso **no existe horizonte de sucesos,** dado que cuando la curvatura es positiva, el universo colapsa en un tiempo finito, mientras que, cuando la curvatura es negativa, la expresión (4.15), válida también en este caso, diverge cuando $Q \to \infty$, lo que es equivalente a $t \to \infty$ (3.23).

El caso $w = -1/3$

En el límite $z \to -1$ la ecuación (4.13) diverge. Por consiguiente, el caso **$w = -1/3$, representa el único universo donde no existen horizontes, ni de partículas ni de sucesos, salvo en el *caso particular* de que la curvatura sea positiva y *además* la densidad de energía de esta ecuación de estado y la de curvatura se anulen mutuamente. En este caso muy particular *a* es constante y existe horizonte de partículas pero no de sucesos.**

Universos simbióticos

Como en el caso de horizonte de partículas, (4.93) puede escribirse,

$$H_S = \frac{1}{H_0}\int_{-1}^{0} \frac{dz}{\sqrt{\sum_i \Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w^i)}}} \qquad (4.95)$$

teniendo en cuenta que $t \to \infty$ implica que $a \to \infty$, lo cual conduce a $z \to -1$.

4.3.4 Horizontes de partículas y de sucesos en distintas cosmologías

En los universos desacelerados la expansión se ralentiza con el tiempo, por ese motivo nunca tendrán horizonte de sucesos. Antes o después se recibirá la luz emitida por cualquier objeto del universo. Por este motivo, se acostumbra a afirmar que los modelos de Fridman (entendiendo como tales los que no tienen ecuaciones de estado $w < -1/3$, lo cual no es el sentido que se les da en el presente texto) no tienen horizonte de sucesos. El caso $w = -1/3$ no es acelerado ni desacelerado, por lo que en general, salvo el caso particular mencionado en el anterior apartado, no tiene ninguno de los dos horizontes.

Los universos en que la expansión se revierte en contracción a partir de un cierto instante de tiempo, tampoco presentan horizonte de sucesos: en la fase de contracción los observadores se dirigen a velocidades crecientes hacia la luz emitida en el pasado. Formalmente, en dichos universos el tiempo no puede tomar valores arbitrariamente grandes, por lo que la integral (4.93) no puede evaluarse con ese límite superior. Ya se demostró en el capítulo segundo que pueden existir universos de este tipo en los cuales intervengan, aunque no únicamente, ecuaciones de estado $w < -1/3$, por lo que la sola existencia de este tipo de ecuaciones de estado en un modelo no implica necesariamente que exista un horizonte de sucesos. Es necesario que además estas ecuaciones lleguen a dominar la expansión del universo y a acelerarla.

En conclusión, dependiendo de las ecuaciones de estado presentes en el universo, pueden darse los siguientes casos:

- Que exista horizonte de partículas pero no horizonte de sucesos (universo desacelerado).
- Que no exista horizonte de partículas pero exista horizonte de sucesos (universo acelerado).
- Que exista horizonte de partículas y de sucesos (universo primero desacelerado y luego acelerado, como sería nuestro universo, según se analizará en más detalle en 4.6.5).
- Que no existan ni horizonte de partículas ni de sucesos (universo de expansión constante, con $w = -1/3$).

Nótese que la inexistencia del horizonte de partículas, es decir, la obtención de un valor no finito de (4.87), implica que los fotones emitidos en el origen de tiempos cosmológico no llegarán (el inicio de la evolución del universo no es observable), mientras que la inexistencia del horizonte de sucesos, es decir, la obtención de un valor no finito de (4.93), implica que el observador tendrá acceso, a lo largo de la evolución del universo, a la observación de todos los sucesos que se hayan producido en él.

Que no exista un límite a lo que podemos ver del pasado de un universo, es decir, que no exista horizonte de partículas, no es contradictorio con la existencia de un horizonte de sucesos, es decir, con la existencia de un límite para lo que en el futuro se pueda llegar a observar. La razón es que todo lo contenido en el horizonte de partículas se observa tal como era en algún momento del pasado, pero lo que hay dentro del horizonte de sucesos corresponde tanto al pasado como al futuro. Además, no existe simetría entre la historia anterior del universo y la futura: la expansión varía con el tiempo, y ***el horizonte de sucesos no es el horizonte de partículas del futuro***, dado que no corresponde a $t = 0$.

4.3.5 Evolución de los horizontes

Las expresiones anteriores permiten calcular las distancias a los horizontes de partículas y de sucesos en el instante actual. Para otro tiempo cosmológico los horizontes serán distintos. Sin embargo, **aunque las distancias a los horizontes son distancias propias, no evolucionan como las distancias propias a objetos.** La evolución

temporal de los horizontes vendrá determinada por la evolución temporal de H y de las Ω_i. En este apartado se analizará la velocidad de recesión de los horizontes comparada con la velocidad de recesión determinada por el flujo de Hubble.

Curvatura nula con una única ecuación de estado dominante

Éste es el caso más sencillo. Para determinar la velocidad de recesión de los horizontes basta con sustituir H_0 por H en (4.88) y derivar con respecto al tiempo, teniendo en cuenta la relación entre H y t dada por (4.10),

$$\dot{H}_P = \frac{3(1+w)}{1+3w}, \tag{4.96}$$

expresión válida en el dominio de validez de (4.88), es decir, cuando $w > -1/3$. Análogamente se procedería para determinar la velocidad de recesión del horizonte de sucesos, derivando (4.94) y teniendo en cuenta (4.10)

$$\dot{H}_S = \frac{-3(1+w)}{1+3w}, \tag{4.97}$$

ecuación válida cuando $w < -1/3$, y que incluye el caso $w = -1$ en que H es constante y, por tanto,

$$\dot{H}_S = 0 \tag{4.98}$$

Las ecuaciones (4.96) y (4.97) pueden escribirse, teniendo en cuenta (4.88) y (4.94),

$$\dot{H}_P = H H_P + 1 \tag{4.99}$$

y

$$\dot{H}_S = H H_S - 1, \tag{4.100}$$

donde los términos HH_{PS} representan la velocidad de recesión de un objeto situado sobre el horizonte correspondiente dado que los horizontes son distancia propias y se verifica (4.65). En el caso de la constante cosmológica, la velocidad de recesión de un objeto situado sobre el horizonte de sucesos es la velocidad de la luz, puesto que el horizonte de sucesos es igual al radio de Hubble (4.3.3), por lo que la ecuación (4.100) también es válida en este caso.

En conclusión, aunque (4.96) y (4.97) indican que las distancias a ambos horizontes crecen con el tiempo a velocidad constante y por tanto divergen para un

tiempo infinito, **el horizonte de partículas se aleja del observador a una velocidad dada por la velocidad de recesión de los objetos sobre el horizonte más la velocidad de la luz** (en nuestras unidades), **mientras que el horizonte de sucesos se aleja como la velocidad de recesión de los objetos sobre su horizonte menos la velocidad de la luz.**

Dicho de otro modo, (4.99) indica que **a medida que transcurre el tiempo cada vez entran más objetos en el horizonte de partículas,** por rápida que sea la recesión de éstos, dado que un objeto en el horizonte de partículas siempre tiene una velocidad de recesión menor en c que la velocidad de recesión del horizonte de partículas. Por ese motivo, **un objeto que haya entrado en el horizonte de partículas ya no saldrá de él.** La figura 4.16 proporciona una interpretación gráfica de la situación.

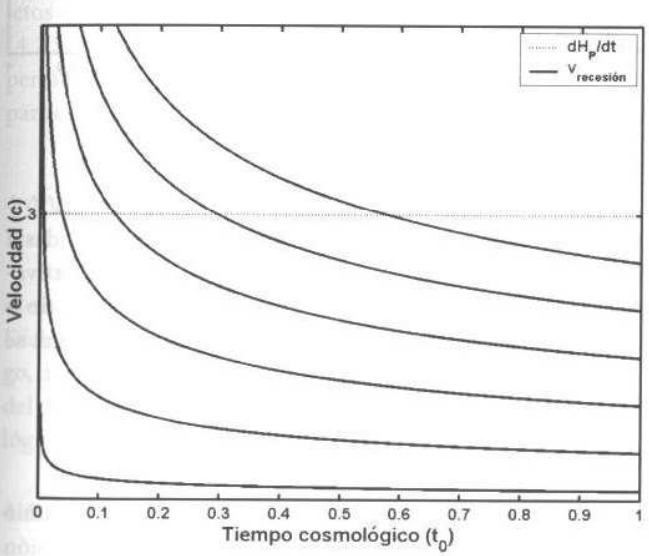


Figura 4.16 Evolución del horizonte de partículas y de la velocidad de recesión de objetos situados a distintas distancias en un universo desacelerado de curvatura nula con una única ecuación de estado dominante w=0. La velocidad de recesión del horizonte de partículas (4.96) es constante mientras que la velocidad de recesión de los objetos disminuye con el tiempo (ejercicio 4.11). Los objetos van entrando en el horizonte para no salir.

En cambio, (4.100) indica que **cada vez van desapareciendo más objetos del horizonte de sucesos,** dado que un objeto en el horizonte de sucesos tiene una velocidad de recesión mayor en c que la velocidad de recesión del horizonte de sucesos (figura 4.17). **Ningún objeto que haya salido del horizonte de sucesos puede volver a entrar en él.** Entonces el universo del futuro consistirá en un observador solitario sin ningún otro objeto dentro de su horizonte de sucesos puesto que éstos en su recesión se habrán situado fuera. Sin embargo, **seguirán llegando los fotones que ahora se encuentran dentro del horizonte de sucesos,** aunque en el horizonte de sucesos del futuro no haya objetos.

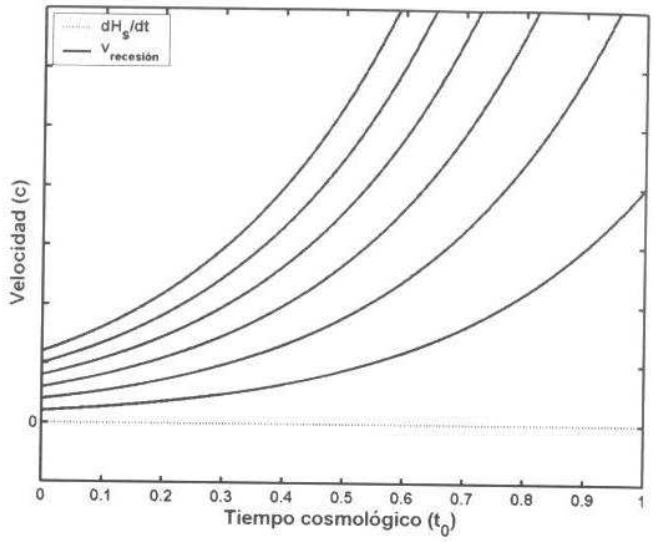


Figura 4.17 Evolución del horizonte de sucesos y de la velocidad de recesión de objetos situados a distintas distancias en un universo acelerado de curvatura nula con una única ecuación de estado dominante $w = -1$. La velocidad de recesión del horizonte de sucesos (4.98) es constante mientras que la velocidad de recesión de los objetos aumenta con el tiempo (ejercicio 4.11). Los objetos van saliendo del horizonte para no volver a entrar.

Curvatura no nula

Cuando la curvatura no es nula también se verifican expresiones parecidas a (4.99) y (4.100) pero entonces la velocidad que se añade o se sustrae, respectivamente, a la velocidad de recesión de un objeto sobre el horizonte es distinta de la de la luz (el ejercicio 4.17 constituye un ejemplo mientras que el caso general se propone en el ejercicio 4.18).

4.3.6 Evolución del radio de Hubble

Por simplicidad se analizará únicamente el caso de curvatura nula con dominio de una única ecuación de estado. Derivando con respecto al tiempo la expresión (4.83) considerada para un instante genérico, y teniendo en cuenta (4.10),

$$\dot{R}_H = \frac{3(1+w)}{2}, \tag{4.101}$$

que es válida para todos los valores de w. Siempre toma valores constantes y positivos salvo el caso límite $w = -1$, en que se anula.

Evoluciona a velocidades superiores a la luz para $w > -1/3$, es decir, que **para universos desacelerados, la superficie definida por el radio de Hubble engloba más y más objetos a medida que transcurre el tiempo**, dado que por definición la velocidad de recesión de los objetos en la superficie de Hubble es lumínica mientras que esta superficie aumenta a una velocidad superior a la de la luz. Dicho de otro modo, como el universo se desacelera, cada vez es más lejana la distancia propia a la que la recesión es lumínica.

Lo contrario sucede **cuando el universo es acelerado** ($w < -1/3$): **la superficie definida por el radio de Hubble pierde objetos a medida que transcurre el tiempo**, debido a que la distancia de Hubble aumenta con menor rapidez que la velocidad de recesión de los objetos de su superficie. Es decir, como el universo se acelera, cada vez es más cercana la distancia propia a la que la recesión es lumínica.

En el caso límite $w = -1/3$, el radio de Hubble evoluciona a la velocidad de la luz, es decir, los objetos situados en el radio de Hubble se mantienen en dicho radio puesto que R_H evoluciona al mismo ritmo que la recesión.

Sin embargo, *el radio de Hubble no es en general un horizonte:* no define los objetos que se pueden observar en un instante determinado. Ya se ha demostrado en (4.2.5) que puede observarse la emisión procedente de objetos cuya recesión es superlumínica. Las excepciones son: el radio de Hubble coincide con el horizonte de partículas cuando $w = 1/3$, y con el horizonte de sucesos cuando $w = -1$.

4.4 Volumen

En el capítulo segundo se analizó el volumen espacial definido por la métrica, al efectuar el análisis de la parte espacial de la métrica de Robertson-Walker (2.3.6). Dicho análisis sigue siendo válido y es independiente de la cosmología. Sin embargo, desde un punto de vista práctico es conveniente expresar el volumen en función del desplazamiento al rojo, y para ello es preciso tener en cuenta el modelo cosmológico.

4.4.1 Elemento de volumen propio

Sabemos que el elemento de volumen espacial propio dV_p vendrá definido por la raíz cuadrada del módulo del determinante del subespacio espacial de la métrica multiplicada por los diferenciales de las coordenadas espaciales (2.8),

$$dV_p = \sqrt{\|g_{ij}\|}\, dr\, d\theta\, d\varphi = a_0^3 \frac{r^2 dr\, d\Omega}{\sqrt{1-\varepsilon r^2}} \tag{4.102}$$

donde se ha considerado el instante actual $t = t_0$ y $d\Omega = \text{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi$. Esta expresión representa el volumen propio comprendido entre r y $r + dr$, θ y $\theta + d\theta$, φ y $\varphi + d\varphi$.

Caso general

El elemento de volumen (4.102) también puede expresarse mediante (4.31) y las relaciones (4.24) y (4.1),

$$dV_P = \frac{D_L^2 dz\, d\Omega}{H_0(1+z)^2\sqrt{\sum_i \Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w^I)}}} \tag{4.103}$$

Conocidas las densidades adimensionales de energía, puede determinarse la distancia de luz en función del desplazamiento al rojo siguiendo 4.1.2, y la integración de (4.103) en ángulo sólido y desplazamiento al rojo proporciona el volumen, tanto analítica como numéricamente.

Es importante señalar que, como ya se ha mencionado en 4.1.1, en otros textos se denomina a (4.103) elemento de volumen comóvil.

Curvatura nula con una única ecuación de estado dominante

En el caso de curvatura nula con una única ecuación de estado dominante, se considera una única w en (4.103) con $\Omega_{w0} = 1$, y se obtiene, utilizando (4.12),

$$dV_P = \frac{4}{H_0^3(1+3w)^2}\left[(1+z)^{\frac{-3(1+w)}{4}} - (1+z)^{\frac{-(5+9w)}{4}}\right]^2 dz\, d\Omega \tag{4.104}$$

Cuya validez está restringida a $w \neq -1/3$. Para $w = -1/3$, es preciso utilizar (4.13) en vez de (4.12),

$$dV_P = \frac{\left[\ln(1+z)\right]^2}{H_0^3(1+z)} dz\, d\Omega \tag{4.105}$$

Curvatura no nula con dominio de la masa en reposo

De (4.103), teniendo en cuenta (2.99) y (4.34), resulta

$$dV_P = \frac{4\left[z\Omega_{m0} + (\Omega_{m0}-2)\left(\sqrt{1+z\Omega_{m0}}-1\right)\right]^2}{H_0^3\Omega_{m0}^4(1+z)^3\sqrt{1+z\Omega_{m0}}} dz\, d\Omega. \tag{4.106}$$

Tomando $\Omega_{m0}=1$ (curvatura nula) en (4.106), puede comprobarse que el resultado coincide con (4.104) cuando $w = 0$, por lo que la expresión (4.106) tiene validez para cualquier curvatura cuando domina la materia no relativista.

Los elementos de volumen propio (figura 4.18) disminuyen con el desplazamiento al rojo a partir de un cierto z cuando $w \geq -1/3$ y aumentan cuando $w < -1/3$.

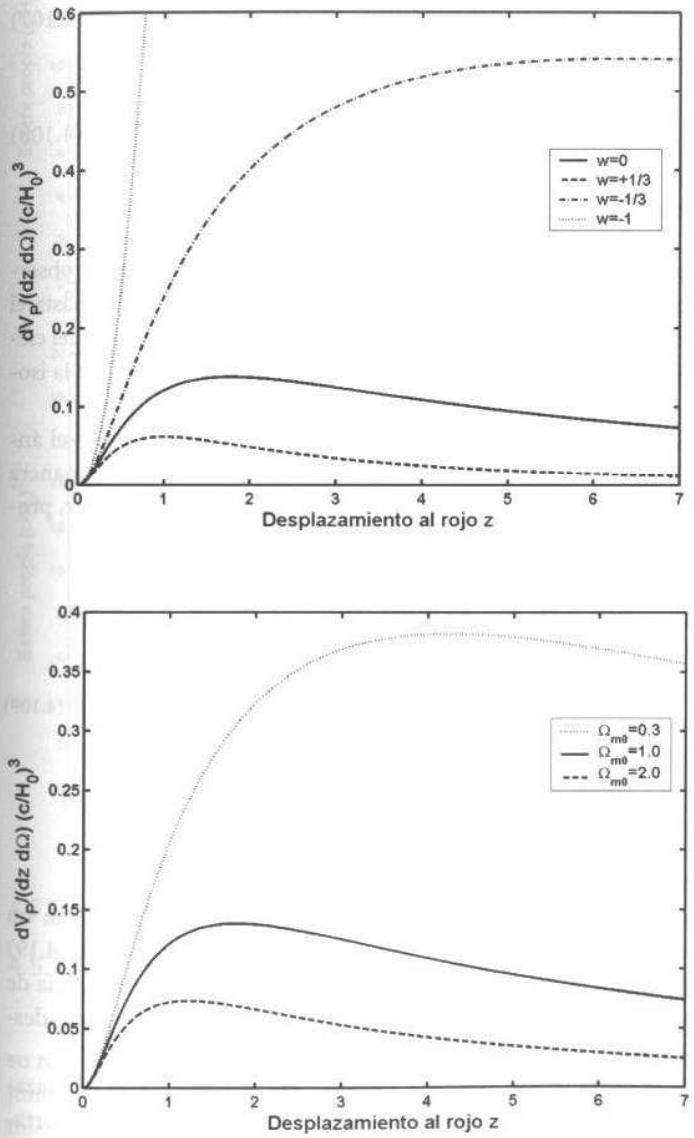


Figura 4.18 Elemento de volumen propio en función del desplazamiento al rojo para distintos modelos cosmológicos. Arriba: cuando la curvatura es nula y domina una única ecuación de estado. Abajo: cuando domina la materia no relativista para distintas curvaturas.

4.4.2 Elemento de volumen comóvil y evolución del volumen propio

El elemento de volumen o el volumen comóviles se obtienen a partir de los correspondientes propios dividiendo éstos por el cubo del factor de escala a_0 (apartado 2.3.6),

$$dV_P = a_0^3 dV_C \tag{4.107}$$

Procediendo como en (4.6) se obtiene la evolución del volumen propio,

$$dV_P(0) = (1+z)^3 dV_P(z) \tag{4.108}$$

4.4.3 Esfera propia

Se denominará «esfera» propia de radio z a la hiperesfera centrada en el observador que alcanza hasta un desplazamiento al rojo z. El volumen propio hasta el mismo desplazamiento al rojo, pero cubriendo solamente un ángulo sólido del cielo $\Delta\Omega$, será el volumen de la esfera propia multiplicada por $\Delta\Omega/4\pi$, debido a la isotropía del espacio.

La esfera propia puede obtenerse integrando (4.102) o (4.103) respecto el ángulo sólido y el desplazamiento al rojo para cada caso. Sin embargo, y de manera general, la integral de (4.102) para todas las direcciones y desde $r = 0$ hasta r, proporciona el **volumen de la esfera propia hasta r** (ejercicio 4.19),

$$V_P = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{H_0^3\Omega_{\varepsilon 0}}\left[H_0 D_M\sqrt{1+H_0^2 D_M^2\Omega_{\varepsilon 0}} - \dfrac{1}{\sqrt{\Omega_{\varepsilon 0}}}\operatorname{arcsenh}\left(H_0 D_M\sqrt{\Omega_{\varepsilon 0}}\right)\right] & \text{si } \varepsilon=-1\,(\Omega_{\varepsilon 0}>0) \\ \dfrac{4\pi}{3}D_M^3 & \text{si } \varepsilon=0\ (\Omega_{\varepsilon 0}=0) \\ \dfrac{2\pi}{H_0^3\Omega_{\varepsilon 0}}\left[H_0 D_M\sqrt{1+H_0^2 D_M^2\Omega_{\varepsilon 0}} - \dfrac{1}{\sqrt{|\Omega_{\varepsilon 0}|}}\operatorname{arcsen}\left(H_0 D_M\sqrt{|\Omega_{\varepsilon 0}|}\right)\right] & \text{si } \varepsilon=+1\,(\Omega_{\varepsilon 0}<0) \end{cases} \tag{4.109}$$

donde se ha utilizado (4.63) y (2.94) teniendo en cuenta (2.99).

Puesto que según (4.63) $D_M = D_L/(1+z)$, (4.109) permite determinar, en un caso general, la esfera propia en función del desplazamiento al rojo (figura 4.19) tanto analítica como numéricamente, a partir de la dependencia de la distancia de luz con z para cada modelo, que puede calcularse siguiendo el procedimiento descrito en el apartado 4.1.2.

El volumen de la esfera propia (figura 4.19) aumenta siempre con el desplazamiento al rojo aunque con mayor rapidez cuando $w \leq -1/3$ debido al comportamiento de los elementos de volumen con z (figura 4.18).

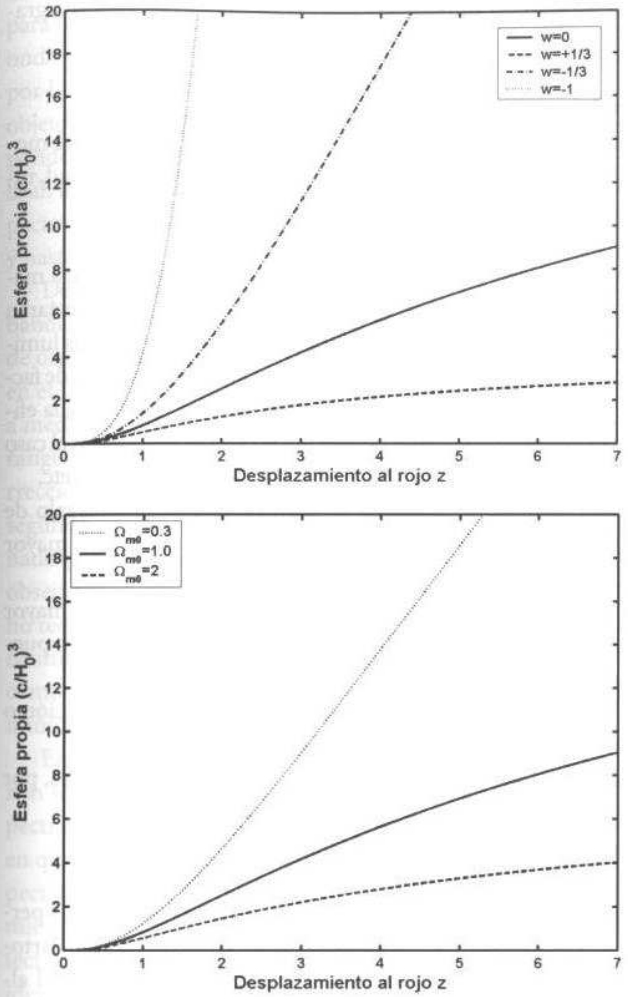


Figura 4.19 Volumen de la esfera propia hasta un desplazamiento al rojo z en función del desplazamiento al rojo para distintos modelos cosmológicos. Arriba: cuando la curvatura es nula y domina una única ecuación de estado. Abajo: cuando domina la materia no relativista para distintas curvaturas.

4.5 Cosmocartografía

4.5.1 Principios de la cosmocartografía

La **cosmocartografía es la ciencia que se ocupa de los mapas del universo y de su realización.** Fijados unos criterios de selección, el estudio estadístico de un conjunto de objetos emisores del universo requiere de la recopilación de sus desplazamientos al rojo y del flujo que emiten en función de la longitud de onda. Este censo se denomina **cartografiado**, y tiene por finalidad el estudio de la distribución y

de la evolución de estos objetos. El número de fuentes detectado en un cartografiado dependerá del:

1. Volumen observado, que a su vez depende de
   1.1. La geometría del espacio-tiempo dada por la métrica a través del modelo cosmológico determinado por H_0 y los parámetros de densidad, incluyendo la curvatura.
   1.2. El ángulo sólido del cielo observado.
   1.3. La profundidad o máximo desplazamiento al rojo al que se observa: a mayor profundidad, que equivale a detectar un flujo menor, se detectarán fuentes próximas más débiles así como fuentes más lejanas pero más luminosas. La profundidad es el resultado de la combinación de una serie de factores tales como el tiempo de integración, el tamaño del telescopio, la eficiencia del instrumento incluyendo el detector, la calidad del cielo en el caso de telescopios terrestres, el rango de longitudes de onda observado, etc.
2. La **función de luminosidad:** la densidad de fuentes para cada intervalo de luminosidad. A mayor densidad o mayor luminosidad de las fuentes, mayor número de fuentes observadas
3. La evolución de la función de luminosidad, puesto que al observar a mayor desplazamiento al rojo, se observan objetos más jóvenes. Esta evolución puede proceder de una variación en:
   3.1. La densidad de objetos, debido a, por ejemplo, procesos de formación o de fusión de galaxias.
   3.2. La luminosidad, debido a la evolución de la formación de estrellas, por poner un ejemplo.
   3.3. Ambos, densidad y luminosidad.

El estudio de volúmenes cosmológicos efectuado en el apartado anterior permite tener en cuenta 1.1. Los ítems 1.2 y 1.3 vienen dados por el diseño del cartografiado. Además, 1.3 depende de la instrumentación utilizada. Está fuera del alcance de este texto el complejo estudio de los efectos de selección y de varianza cósmica debidos al ángulo barrido y el diseño instrumental. Sin embargo, y debido a su importancia en cosmología, se abordará muy someramente el estudio de los cartografiados y la determinación de la función de luminosidad y su evolución, así como algunas de las limitaciones que presentan.

4.5.2 Tipos de cartografiados

En general cabe distinguir entre cartografiados en imagen o en espectroscopia. Los primeros consisten en obtener imágenes de una zona del cielo integrando sobre un rango de longitudes de onda o de frecuencias. Los segundos consisten en obtener, para cada objeto, el «espectro» o distribución de energía en función de la longitud de onda o frecuencia para un rango de longitudes de onda o de frecuencia determinado por la configuración instrumental utilizada. En el primer caso se detectan todos los objetos hasta un cierto flujo mínimo en el rango espectral observado, que corresponde a una determinada luminosidad para cada distancia o z. En el segundo se utilizan los cartografiados en imagen[8] para seleccionar la posición de la rendija de un espectrógrafo a fin de obtener el espectro de cada objeto, también en un rango espectral y hasta un flujo determinado por las características del cartografiado.

Dentro de los cartografiados en imagen cabe distinguir entre banda ancha o banda estrecha. En los primeros, el filtro que selecciona un intervalo de longitudes de onda es relativamente ancho con, típicamente: $\lambda/\Delta\lambda \approx 5$ en el óptico, $\lambda/\Delta\lambda \approx 3$ en el infrarrojo cercano y $\lambda/\Delta\lambda \approx 2$ en el infrarrojo lejano, donde $\Delta\lambda$ es la anchura a media altura de la curva de transmisión del filtro. Debido a que se observa en un rango de longitudes de onda fijo ligado al observador, será preciso efectuar la corrección K (4.1.3) para comparar datos a distintos desplazamientos al rojo. En los segundos $\lambda/\Delta\lambda \geq 100$. Este último tipo de cartografiados está especialmente diseñado para detectar objetos con líneas de emisión, lo que permite, conocida la línea observada, determinar con precisión el desplazamiento al rojo. Debido a su diseño no requieren de corrección K, salvo que se quieran aprovechar las observaciones del continuo, es decir, donde no se ha detectado línea espectral. Tanto en banda ancha como estrecha se observan todos los objetos del campo hasta un cierto flujo límite mínimo.

En general, para un mismo telescopio los cartografiados espectroscópicos tienen un flujo límite más alto (menor profundidad) debido a que la resolución espectral es mayor, típicamente, $2000 \geq \lambda/\Delta\lambda \geq 200$. La utilidad de un cartografiado en que solamente se clasifique a los objetos en función de su flujo en una banda espectral es muy limitado. Es preciso, además, obtener información del desplazamiento al rojo de cada objeto. En los cartografiados espectroscópicos es posible detectar líneas (normalmente de emisión) en el espectro de un objeto que, una vez identificada la especie y la transición atómica a la que corresponden (es decir: conocida la longitud de onda a la que fue emitida), permiten determinar el desplazamiento al rojo. De forma análoga, los cartografiados en banda estrecha permiten, identificada la línea espectral detectada, determinar el desplazamiento al rojo con precisión casi espectroscópica. Los cartografiados en imagen en banda ancha que incorporen varias bandas en número suficiente y que proporcionen una buena cobertura espectral, permiten estimar el desplazamiento al rojo mediante ajuste por

[8] Salvo en el caso de espectroscopía tridimensional en el óptico-infrarrojo (Fabry-Perot, campos integrales, etc.) o en radiointerferometría.

plantillas de espectros de distintos tipos de objetos con aproximación suficiente, a menudo consiguiendo incertidumbres $\Delta z \leq 0.10$.

Debido a que los cartografiados en imagen en banda ancha o los cartografiados espectroscópicos ciegos (donde se toman espectros de todos los objetos del campo detectados en imagen) están limitados en flujo y no discriminan en z, el volumen barrido es el de la esfera propia hasta el máximo desplazamiento al rojo alcanzado. Cuando solamente se cubra un ángulo sólido $\Delta\Omega$, el volumen barrido será la esfera propia multiplicada por $\Delta\Omega/4\pi$, dada la isotropía de la métrica. Sin embargo, para un mismo flujo límite de detección, en los volúmenes situados a distintas distancias se observarán objetos con distintos rangos de luminosidades: a mayor desplazamiento al rojo se detectarán igualmente los objetos más luminosos pero se dejarán de detectar los más débiles. Por tanto, se estarán muestreando distintas poblaciones a distintas distancias, lo cual es preciso tener en cuenta en la interpretación de los resultados del cartografiado. Este efecto se acostumbra a designar como **sesgo de Malmquist**.

En el caso de cartografiados en imagen en banda estrecha de una línea de emisión dada, o de cartografiados espectroscópicos con preselección en z, en que se cubre un rango conocido de desplazamientos al rojo con una profundidad determinada, para determinar el volumen barrido es preciso integrar los elementos de volumen de 4.4.1 para el intervalo de desplazamientos al rojo considerado y para el ángulo sólido explorado o, alternativamente, sustraer al volumen de la esfera propia correspondiente al límite superior en z alcanzado, el volumen de la esfera propia del menor z barrido por el cartografiado.

Uno de los objetivos perseguidos por los cartografiados es la determinación de la función de luminosidad y de su evolución.

4.5.3 Distribución de fuentes

Si $n_C(L, z)$ es la función de luminosidad comóvil de fuentes y $n_p(L, z)$ la función de luminosidad propia, ambas correspondientes a fuentes de luminosidades comprendidas entre L y $L+dL$, se verificará, dado que la función de luminosidad es una densidad,

$$n_C(L, z) = a^3 n_p(L,z), \tag{4.110}$$

donde la dependencia en z representa la posible evolución de la función de luminosidad. Teniendo en cuenta (4.107) y la relación (4.110), el número de fuentes dN en un elemento de volumen dV_p y de luminosidades comprendidas entre L y $L+dL$ será

$$dN = n_C dV_C = n_p(1+z)^{-3} dV_p, \tag{4.111}$$

donde para simplificar la notación, en esta expresión y en lo sucesivo, no se indicará explícitamente la dependencia de la función de luminosidad con L y z salvo cuando sea necesario por motivos de claridad.

La integración de (4.111) en z, mediante (4.102) o (4.103), y en L, conocida la función de luminosidad y su evolución, proporciona, fijado un modelo cosmológico, el número de fuentes en un intervalo de luminosidad y de desplazamientos al rojo dados. Nótese que, en la integración de (4.111) con respecto a z, no es posible sacar la función de luminosidad fuera del signo integral, puesto que en general depende de z. Usualmente se opera con la función de luminosidad propia de fuentes, dado que es la cantidad que se determina a partir de las observaciones.

4.5.4 La función de luminosidad y su evolución

El objetivo de la cosmografía no consiste en la determinación del número de fuentes que se observarán en un cartografiado determinado, sino la determinación de la función de luminosidad a partir del número observado de fuentes en función del desplazamiento al rojo y la luminosidad.

Si ΔN es el numero de fuentes observadas con luminosidad entre L y $L+\Delta L$, en un volumen ΔV_p determinado por el rango de desplazamientos al rojo z y $z+\Delta z$ y el ángulo sólido $\Delta\Omega$ observados, donde Δz es suficientemente pequeño como para que la función de luminosidad n_p pueda considerarse constante en todo el intervalo, las ecuaciones (4.111) y (4.103) escritas en forma incremental permiten estimar directamente el valor de la función de luminosidad para el intervalo entre L y $L+\Delta L$. Con distintos valores observados de ΔN para un abanico de intervalos de luminosidad al mismo Δz, es posible estimar la función de luminosidad para el rango de luminosidades abarcado. Repitiendo el procedimiento para distintos Δz, aplicando la corrección K (4.1.3) y la ecuación (4.108) que permiten normalizar al volumen propio local, es posible comparar los resultados con los obtenidos en el universo local y también entre sí. Con este método puede determinarse la función de luminosidad para distintos rangos de desplazamiento al rojo y estimar su evolución[9]. El procedimiento se puede realizar separadamente para distintos tipos morfológicos o espectrales de galaxias e implica la asunción de un cierto modelo cosmológico que permita relacionar flujos detectados con luminosidades emitidas a través de la distancia de luz (4.1.2).

Es uso habitual ajustar la función de luminosidad por una función de Schechter, que en general proporciona un buen ajuste,

[9] Es preciso tener en cuenta sesgos observacionales tales como la varianza cósmica, que es posible corregir mediante distintas técnicas más o menos elaboradas. La corrección de estos sesgos cae fuera del alcance de este texto.

$$n_p = \phi^* \left(\frac{L}{L^*}\right)^{\alpha} \exp^{-\left(\frac{L}{L^*}\right)}, \qquad (4.112)$$

donde, en el universo local y para galaxias de campo, puede asumirse el modelo de Felten (1985): $\phi^*_0 = 1.2\times10^{-2}\ h^3\mathrm{Mpc}^{-3}$, $\alpha_0 = -1.25$ y $L^*_0 = 1.24\times10^{10}\ h^{-2}L_\odot$.

El ajuste para cada rango de desplazamientos al rojo proporcionará la evolución de los parámetros de la función de Schechter ϕ^*, α y L^*, en función del z. Por ejemplo Heyl *et al.*, 1997 adoptan la siguiente dependencia funcional,

$$\begin{cases} \phi^* = \phi^*_0 (1+z)^{\gamma_\phi} \\ L^* = L^*_0 (1+z)^{\gamma_L} \\ \alpha = \alpha_0 + \gamma_\alpha z. \end{cases} \qquad (4.113)$$

Así, determinar la evolución de la función de luminosidad estriba en determinar los parámetros γ_ϕ, γ_L y γ_α. **La dificultad esencial inherente a este proceso, aparte de la adopción de un modelo cosmológico, es el muestreo en luminosidad que, como ya se ha discutido, depende de la distancia.**

Además, solamente con estos datos, no es posible distinguir una evolución en densidad de una evolución en luminosidad o de un caso en el que ocurran ambas. Por poner un ejemplo, supongamos que a mayor distancia se observe una mayor fracción de objetos luminosos. Ello tanto puede querer indicar que una fracción de dichos objetos evoluciona disminuyendo su luminosidad con el tiempo (evolución en luminosidad), o bien que los objetos han evolucionado fusionándose y reduciendo su densidad (figura 4.20).

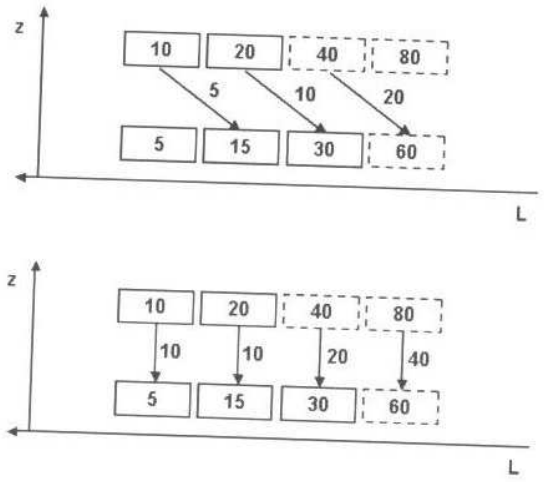


Figura 4.20 Consideremos una colectividad de objetos distribuidos en cuatro rangos de luminosidad, indicados por las cajas, observados a dos desplazamientos al rojo distintos. En el z mayor solamente se ven los dos rangos de mayor luminosidad, mientras que al z menor se ven los tres más luminosos. Las cajas de trazos discontinuos indican los objetos cuya luminosidad no los hace detectables, mientras que los números dentro de las cajas indican el número de objetos de cada tipo por unidad de volumen comóvil. Arriba se representa una evolución pura de la luminosidad consistente en una disminución proporcional a la densidad de objetos de cada clase de luminosidad, en que los objetos descienden una clase, mientras que abajo se representa una evolución pura de la densidad consistente en una disminución debido a fusiones de pares de objetos que mantengan la luminosidad constante. En el primer caso los números sobre las flechas indican el número de objetos que bajan su clase de luminosidad, y en el segundo el número de objetos que se fusionan. En base a las observaciones de la función de luminosidad no puede distinguirse un caso del otro.

4.5.5 La prueba de Schmidt o del volumen máximo

Como el lector ya habrá podido apreciar, los efectos de selección de la muestra dificultan la determinación de la función de luminosidad y su evolución. Esta dificultad se incrementa con el desplazamiento al rojo.

Sin embargo, existe un procedimiento sencillo y que depende débilmente del modelo cosmológico asumido, denominado prueba de Schmidt o del volumen máximo (Schmidt, 1968), que permite determinar si existe o no evolución **en una muestra de fuentes limitada en flujo**.

Consideremos que en un cartografiado se han observado un conjunto de fuentes $i=1,\ldots,N$ para las que se han medido flujos F_i y desplazamientos al rojo z_i a los que corresponden, asumido un modelo cosmológico, luminosidades L_i a través de las distancias luz correspondientes. Además, el modelo asumido también permite calcular, para cada objeto, el volumen V_i de la esfera propia (para $t = t_0$) determinada por su z_i. A partir del límite en flujo del cartografiado, puede determinarse a qué distancia de luz máxima todavía se podrían observar estas fuentes, y calcular el volumen de la esfera propia $V_{\mathrm{Max}i}$ (para $t = t_0$) correspondiente a dicha distancia de luz máxima. Los cocientes $(V_i/V_{\mathrm{Max}i})$ para cada rango de luminosidades ΔL considerado pueden variar entre 0, valor correspondiente a un objeto local, y 1, correspondiente a un objeto que se observa en el límite de detección. Por tanto, si no hay evolución ni en densidad ni en luminosidad, el valor medio de dichos cocientes ha de ser igual a 0.5 para cada rango de luminosidad considerado (figura 4.21):

$$\left\langle \left(\frac{V_i}{V_{\mathrm{Max}\,i}}\right) \right\rangle \Big|_{\Delta L} = \frac{1}{2}. \qquad (4.114)$$

En caso contrario, cabe concluir que existe evolución (figura 4.21).

Lo mismo se verifica si se tienen en cuenta todos los objetos del cartografiado para todo el rango completo de luminosidades del mismo (ejercicio 4.20), aunque **tampoco pueda determinarse si la evolución detectada es en densidad, en luminosidad o en ambas** (figura 4.20).

El valor de la prueba de Schmidt no reside únicamente en su sencillez, sino en que depende poco del modelo cosmológico asumido. En efecto, el volumen depende de la cosmología, pero el cociente de volúmenes suaviza esa dependencia. Hay que señalar que en este caso también es preciso aplicar la corrección K (4.1.3) cuando no se trabaje con luminosidades bolométricas. Nótese, sin embargo, que la prueba de Schmidt es una aproximación que deja de ser válida si $\Omega_0 \geq 4$ o cuando el desplazamiento al rojo considerado es elevado.

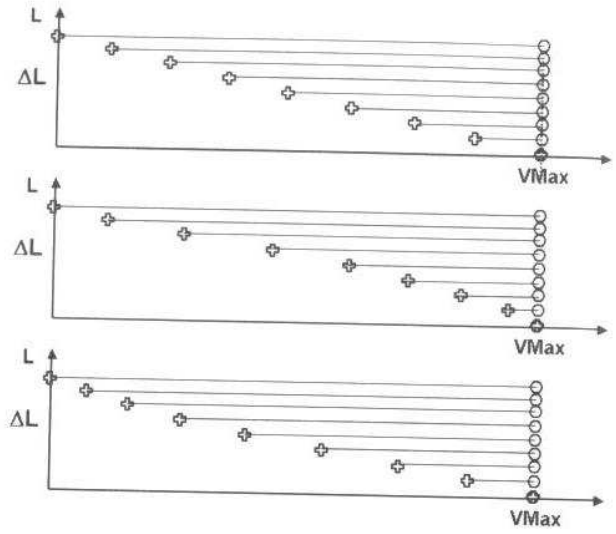


Figura 4.21 Prueba de Schmidt. Consideremos una colectividad de objetos pertenecientes a un mismo intervalo de luminosidad ΔL, observados a distintas distancias, que determinan esferas propias (para $t = t_0$) de distintos volúmenes, indicadas por las cruces. Dado que el rango de luminosidad es el mismo, el volumen máximo, indicado por los círculos, también será el mismo. Arriba: si no hay evolución, se observa el mismo número de fuentes de la misma luminosidad por unidad de volumen, entonces la media (4.114) es igual a 0.5. Medio: si se observa mayor densidad de fuentes a mayor distancia (4.114) es mayor que 0.5. Abajo: si se observa mayor densidad de fuentes de la misma luminosidad a distancias más próximas (4.114) es menor que 0.5.

4.6 Aplicación al modelo estándar

En el capítulo primero abordamos cualitativamente un conjunto de observables tales como la paradoja de Olbers, la edad, la determinación de distancias, etc. La edad del modelo estándar ya se analizó en el capítulo tercero (3.8.4). En el apartado (4.2.1) ya se ha analizado también la ley de Hubble basándose en los conocimientos hasta ahora adquiridos. La nucleosíntesis primordial y la radiación cósmica de fondo se tratarán en los capítulos sexto y séptimo, respectivamente. En este capítulo procede, pues, analizar de forma algo más rigurosa la paradoja de Olbers y la determinación de distancias. Se incluyen también algunos comentarios respecto a los horizontes.

4.6.1 La paradoja de Olbers

Conocida la evolución de la función de luminosidad, puede calcularse el flujo recibido procedente de todas las fuentes del universo hasta un desplazamiento al rojo dado o hasta el origen del universo, en los modelos en que éste exista.

Caso general

De (4.111) y (4.103) obtenemos el número de fuentes dN en un volumen dV_P con luminosidades entre L y L+dL,

$$\mathrm{d}N = \frac{n_P D_L^2 \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\Omega}{H_0(1+z)^5\sqrt{\sum_i \Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w^i)}}} \qquad (4.115)$$

La luminosidad procedente de todas las fuentes contenidas en ese volumen y con ese rango de luminosidades será dNdL. Multiplicando (4.115) por (4.38), dividiendo por $4\pi D_L^2$ e integrando para todo el ángulo sólido se obtiene el flujo dF_0 recibido de dichas fuentes procedente de todas las direcciones,

$$\mathrm{d}F_0 = \frac{n_P L\left(\frac{\lambda_0}{1+z}\right)\mathrm{d}\lambda_0\, \mathrm{d}z}{H_0(1+z)^6\sqrt{\sum_i \Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w^i)}}}, \qquad (4.116)$$

integrando para todas las longitudes de onda se obtiene el flujo total bolométrico y la integración hasta un desplazamiento al rojo z proporcionará el flujo bolométrico total recibido F_0 procedente de todas direcciones y de todas las fuentes hasta z,

$$F_0 = \int_0^z \frac{n_P L\, \mathrm{d}z}{H_0(1+z)^6\sqrt{\sum_i \Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w^i)}}} \qquad (4.117)$$

donde L, la luminosidad bolométrica, y n_P dependen, en general, de z. El flujo recibido dependerá por tanto de la evolución en luminosidad y en la densidad de fuentes.

Caso no evolutivo

Como ya se discutió de forma cualitativa en el capítulo primero, la paradoja de Olbers surge al considerar el flujo recibido por un observador en el caso de un universo:

1. Euclídeo,
2. que se extiende indefinidamente en el espacio,
3. que ha existido siempre,
4. poblado por fuentes distribuidas uniformemente con una densidad n_0 y una luminosidad media constante L_0.

Tal como se trató en el capítulo primero, bajo estas hipótesis el flujo recibido debería ser infinito, sin embargo no es así. Por consiguiente, una o más de las anteriores suposiciones es falsa. Mediante razonamientos cualitativos concluimos entonces que la paradoja se evitaba mayormente debido a la edad finita del universo, mientras que la expansión del universo contribuía en menor medida y la curvatura influía poco.

Para comprobar esas afirmaciones de una manera algo más rigurosa, formularemos la paradoja en el caso general de un universo de edad finita, con curvatura y en expansión, aplicando (4.117) y la hipótesis cuarta. Ésta indica que el plantea-

miento clásico de la paradoja de Olbers constituye el caso no evolutivo ni en densidad ni en luminosidad. En este caso no existe creación ni aniquilación de fuentes y por consiguiente la densidad comóvil n_C es constante. El cociente de (4.110) aplicado a un desplazamiento al rojo z y al instante actual permite escribir

$$n_P = n_0(1+z)^3, \tag{4.118}$$

donde n_0 es constante y representa la densidad propia de fuentes locales. Aplicando (4.117),

$$F_0 = \frac{L_0 n_0}{H_0}\int_0^z \frac{dz}{(1+z)^3\sqrt{\sum_i \Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w^i)}}}, \tag{4.119}$$

integral que claramente converge para $z\to\infty$, independientemente de la curvatura y de las ecuaciones de estado involucradas, debido a la potencia de $(1+z)$ que aparece dividiendo en el integrando.

Si la curvatura es nula y domina una única ecuación de estado en toda la historia del universo, integrando entre $z = 0$ y $z = \infty$ se obtiene

$$F_0 = \frac{2L_0 n_0}{H_0(7+3w)}, \tag{4.120}$$

expresión válida para cualquier valor de $w > -7/3$. En el caso de curvatura no nula y dominio de masa no relativista, teniendo en cuenta (2.99) que $\Omega_{\varepsilon 0} = 1 - \Omega_{m0}$, (4.119) permite obtener

$$F_0 = \frac{L_0 n_0}{H_0}\int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)^4\sqrt{1+\Omega_{m0}z}} \tag{4.121}$$

de integración viable aunque algo laboriosa.

Interpretación

Para el modelo de Milne, (4.119) proporciona teniendo en cuenta (2.99)

$$F_0 = \frac{L_0 n_0}{3H_0} \tag{4.122}$$

que, incluso en un caso tan extremo, solamente difiere de (4.120) para $w = 0$ en un 17% en exceso. Por consiguiente, **la curvatura influye poco en la resolución de la paradoja de Olbers.**

Si la curvatura es nula y la densidad y luminosidad de las fuentes son constantes pero el universo es estático y tiene una edad finita t_0, reproduciendo la deducción del capítulo primero pero integrando hasta el horizonte de partículas, que en un universo estático es igual a t_0 en nuestras unidades ($c = 1$), es inmediato deducir que

$$F_0 = L_0 n_0 t_0, \tag{4.123}$$

mientras que sustituyendo en (4.120) el valor de H_0 que se obtiene a partir de (4.10),

$$F_0 = L_0 n_0 t_0 \frac{3(1+w)}{7+3w}, \tag{4.124}$$

expresión que no es válida cuando $w = -1/3, -1$, pero que muestra que **la expansión del universo no contribuye significativamente a resolver la paradoja.** Efectivamente, en el caso $w = 0$ **la expansión reduce el flujo bolométrico total** a un ~40% del caso estático, que **es una contribución mayor que la de la curvatura, pero insuficiente para resolver la paradoja**[10].

Si la edad finita del universo resuelve la paradoja, ¿qué sucederá transcurrido un tiempo infinito? Los universos que vuelven a colapsarse no cumplen con dos de las condiciones de la paradoja: ni tienen una duración ni una extensión ilimitadas. Recordemos que en el capítulo segundo se demostró que si la curvatura es positiva el factor de escala es una medida del tamaño del universo. En los universos en que la expansión es acelerada, los observadores del futuro solamente recibirán el flujo contenido en su horizonte de sucesos actual, que es finito. Entonces solamente en universos desacelerados de curvatura nula o negativa el flujo recibido podría diverger en el infinito. Sin embargo, éste es un tiempo inalcanzable, y para entonces la evolución de las fuentes impedirá la aplicación de la paradoja, como se tratará en el apartado 8.2.

En conclusión, se puede considerar establecido que **la edad finita del universo es el factor que resuelve la paradoja de Olbers. La expansión y la curvatura, en este orden, representan contribuciones menores.**

4.6.2 Los indicadores de distancias

En este apartado se ha establecido el marco esencial de la cosmometría: la medida de distancias en un universo en expansión y con curvatura. Dado que en el capítulo primero se pasó revista a los indicadores de distancia y su papel, no sólo en la determinación de distancias sino en la determinación de la constante de Hubble,

[10] Si en vez de la luminosidad bolométrica se observa la luminosidad en un cierto intervalo de longitudes de onda, la contribución de la expansión en la reducción del flujo observado será mayor debido a que se alcanzaría el límite de Lyman. Ello es especialmente cierto en el dominio espectral óptico.

procede ahora, a la luz de los conocimientos adquiridos, dar algunas pinceladas para matizar las conclusiones que pueden obtenerse de dichos indicadores.

Esencialmente cabe señalar que, con independencia del modelo cosmológico adoptado, **a distancias suficientemente pequeñas o, equivalentemente, a pequeños desplazamientos al rojo, la expansión y la curvatura del universo pueden despreciarse y todas las distancias son iguales entre sí e iguales a la distancia euclídea.** Las discrepancias, dependientes del modelo, surgen a desplazamientos al rojo suficientemente elevados. En este caso, **las distancias que proporcionan los indicadores basados en la luminosidad, que serán por consiguiente distancias de luz, diferirán de las distancias obtenidas con indicadores tales como los diámetros de las mayores galaxias de un cúmulo o las regiones HII de galaxias espirales, que proporcionarán distancias de ángulo.** Es preciso tener en cuenta estas consideraciones al operar con indicadores basados en distintas distancias.

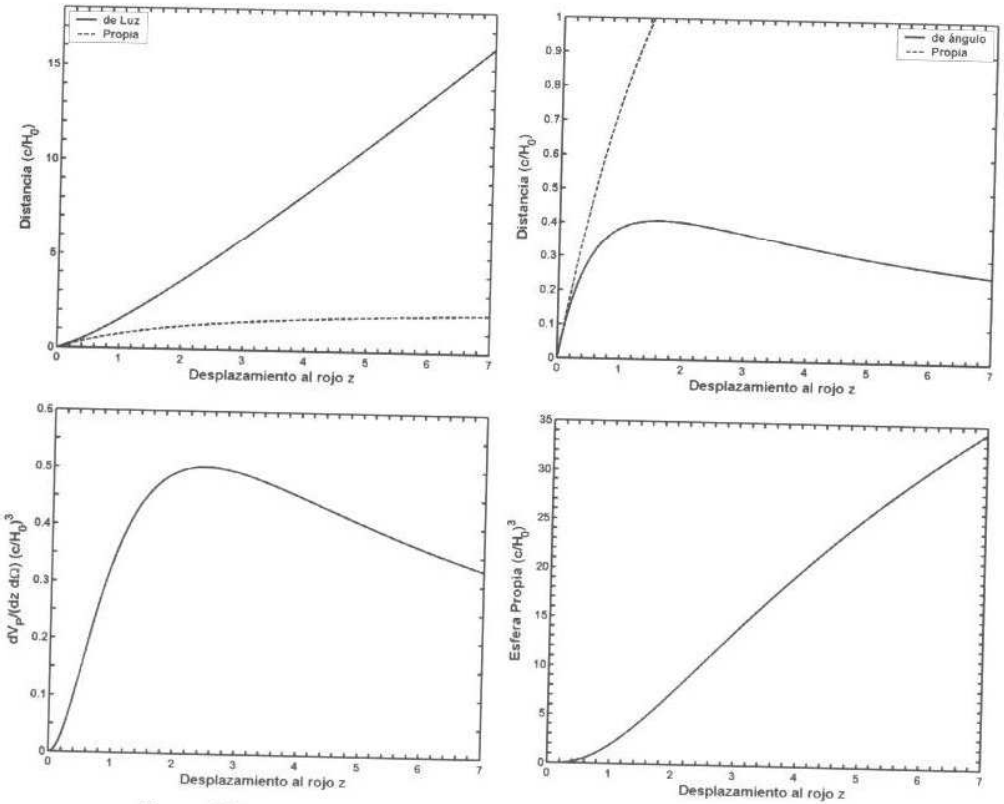


Figura 4.22 Distancias y volúmenes para el modelo concordante (Ω_{m0}=0.3, $\Omega_{\Lambda 0}$=0.7). Arriba izquierda: distancia de luz. Arriba derecha: distancia de ángulo. Nótese la gran diferencia con respecto la distancia de luz. Se ha incluido en ambas gráficas la distancia propia como medida de comparación. Abajo izquierda: elemento de volumen propio. Abajo derecha: volumen de la esfera propia.

4.6.3 Distancias de luz y la expansión acelerada

Llegados a este punto, ya estamos en condiciones de interpretar el hallazgo de la expansión acelerada del universo deducido a partir de la observación de supernovas tipo Ia a distancias cosmológicas. En el capítulo primero se estableció que, a partir de la detección de una SNIa y a través de un seguimiento multifrecuencia de la curva de luz exhaustivo y dificultoso y utilizando modelos evolutivos, podía determinarse la luminosidad del máximo corregida de extinción y de evolución. Con la luminosidad así calculada, y con la medida del flujo observado en el máximo o cerca de él, se obtiene la distancia de luz. Por otro lado, el espectro de la galaxia huésped de la supernova permite determinar el desplazamiento al rojo de la misma. Ambos resultados, para una cantidad significativa de supernovas situadas en un amplio rango de desplazamientos al rojo suficientemente elevados, que permitan descartar efectos locales y minimizar el ruido de las observaciones, permite obtener un conjunto de puntos en el plano D_L–z (figura 4.23), al cual ajustar las curvas de la distancia de luz frente al desplazamiento al rojo que, para distintos modelos cosmológicos, pueden obtenerse siguiendo el procedimiento descrito en (4.1.2). A largo plazo, con una cantidad suficiente de datos de una calidad adecuada[11], será posible **determinar el desplazamiento al rojo al cual el universo empieza a acelerarse**, el llamado **punto de inflexión**[12]. **Este dato permitirá establecer el valor de *w*.** Es decir: será posible determinar si la ecuación de estado de presión negativa que causa la expansión acelerada puede identificarse con la constante cosmológica o con una quintaesencia. En este último caso, **el valor de *w* correspondería a una media en el entorno del**

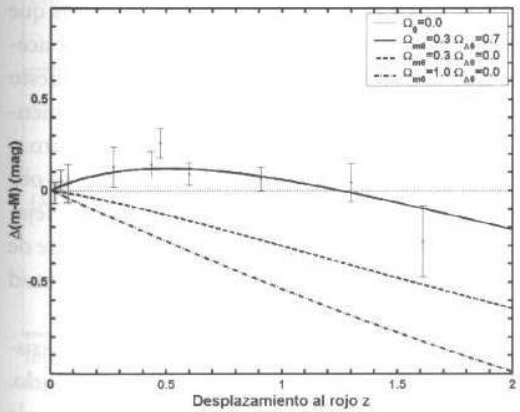


Figura 4.23 Diferencias de módulo de distancias con respecto al modelo de Milne (Ω_0=0) representadas frente al desplazamiento al rojo para distintas SNIa. Los puntos representan promedios pesados en diez intervalos de desplazamiento al rojo. Las líneas representan distintos modelos cosmológicos incluyendo el concordante. Basado en los datos de Riess *et al.*, 2004.

[11] Previsiblemente reservada a los instrumentos de los futuros ELT (Extremely Large Telecopes): telescopios óptico-infrarrojos con un espejo primario segmentado de al menos 30 metros de diámetro.

[12] En inglés, *coasting point*.

punto de inflexión, puesto que en general la ecuación de estado de la quintaesencia varía con el tiempo.

4.6.4 Distancias de ángulo

Análogamente se procede con las distancias de ángulo: supuesto un tamaño invariable para un tipo de objeto dado, se miden tamaños angulares de este tipo de objetos con distintos desplazamientos al rojo y se ajusta un modelo cosmológico a los resultados. Sin embargo, mientras que las SNIa constituyen un patrón de luminosidades, no parece existir un patrón de longitudes óptico, como por ejemplo el diámetro medio de una región HII o de la galaxia más brillante de un cúmulo. Ello es debido a las incertidumbres en las determinaciones de tamaños ópticos debidos al efecto de la atmósfera terrestre y posiblemente a efectos evolutivos. Por este motivo se han utilizado como patrón de tamaños radiofuentes compactas observadas con alta resolución angular[13] a 5 GHz (Gurvits *et al.*, 1999). Los resultados parecen consistentes con los obtenidos utilizando el patron de luminosidad de las SNIa (Podariu *et al.*, 2003; Chen y Ratra, 2003), aunque no son tan concluyentes: los datos permiten ajustar una amplia variedad de modelos cosmológicos (Podariu *et al.*, 2003; Chen y Ratra, 2003 y Banerjee y Narlikar, 1999).

4.6.5 Horizontes

Según el modelo estándar, el universo posee horizonte de partículas y también de sucesos, puesto que en el pasado dominaban ecuaciones de estado de radiación y materia no relativista que motivaban una expansión desacelerada, mientras que en la actualidad domina la energía oscura de ecuación de estado $w < -1/3$ que acelera la expansión. La existencia de ambos horizontes no es contradictoria, puesto que el primero representa la posibilidad de recibir información del pasado mientras que el segundo representa la posibilidad de recibir información en el futuro.

Aunque el horizonte de partículas representa el límite teórico del universo observable, realmente no pueden observarse fotones procedentes de fuentes más lejanas que la superficie de último esparcimiento, debido al pequeño recorrido libre de los fotones en el universo temprano ionizado, como se discutirá en más amplitud en el capítulo séptimo.

Una vez creado el horizonte de partículas, debido a que su origen reside en la existencia de una etapa de expansión desacelerada en el pasado, **no es posible eliminarlo. Ello no es así en el caso del horizonte de sucesos,** puesto que su existencia reside en la aceleración de la expansión. Si en el futuro la expansión volviera a ser desacelerada, el

[13] Mediante radiointerferometría de muy larga base VLBI (Very Large Baseline Interferometry).

horizonte de sucesos dejaría de existir. Éste es el caso de la inflación, como se verá en el capítulo quinto, puesto que ésta representa una etapa transitoria durante la cual el universo se expande aceleradamente pero luego vuelve a expandirse desaceleradamente al cesar la inflación. También ocurriría en el caso de quintaesencias en las que w disminuyese con el tiempo desde, por ejemplo, $w = -1$, hasta el valor $w = -1/3$.

Si la energía oscura que acelera el universo es debida a una quintaesencia de estas características, sería posible que en el futuro desapareciera el horizonte de sucesos. Esta situación podría ser deseable en el marco de la teoría de cuerdas, que se menciona escuetamente en el capítulo quinto, puesto que la existencia de un horizonte de sucesos puede ser problemática en dicha teoría.

Sin embargo, aunque exista un horizonte de sucesos permanente, se seguirán detectando fotones de la radiación cósmica de fondo, puesto que seguirán llegando los fotones de dicha radiación que en la actualidad se hallen dentro del horizonte de sucesos aunque, según el modelo concordante, la superficie de último esparcimiento ya se halle fuera del horizonte de sucesos. Lo mismo sería aplicable a los neutrinos o a los gravitones procedentes de etapas anteriores al desacoplamiento de la radiación de fondo.

4.7 **Resumen**

Distancias

Distancia	Definición	$\varepsilon = 0$ y única w	Caso general
Propia	$a_0\int_t^{t_0}\frac{dt}{a}$	$\frac{2}{H_0(1+3w)}\left[1-(1+z)^{\frac{-(1+3w)}{2}}\right]$ (Excepto $w=-1/3$)	$\frac{1}{H_0}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\sum_i \Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w^i)}}}$
De luz	$a_0 r(1+z)$	$D_P(1+z)$	$D_L = \begin{cases} \frac{1+z}{H_0\sqrt{\Omega_{\varepsilon 0}}}\operatorname{senh}\left(D_P H_0\sqrt{\Omega_{\varepsilon 0}}\right) & \text{cuando } \varepsilon=-1 \\ D_P(1+z) & \text{cuando } \varepsilon=0 \\ \frac{1+z}{H_0\sqrt{\lvert\Omega_{\varepsilon 0}\rvert}}\operatorname{sen}\left(D_P H_0\sqrt{\lvert\Omega_{\varepsilon 0}\rvert}\right) & \text{cuando } \varepsilon=+1 \end{cases}$

Tabla 4.1 Distancias propias y distancias de luz en un universo euclídeo dominado por una única ecuación de estado, y en un caso general de universo simbiótico.

Siempre se verifica que $D_T = D_M = D_E = \frac{D_L}{1+z} = D_A(1+z) = a_0 r$, lo que permite deducir las demás distancias a partir de la distancia de luz.

En el caso euclídeo, siempre se verifica: $D_p = a_0 r$, por lo que utilizando la anterior relación, pueden calcularse las distancias propias a partir de la distancia de luz y viceversa.

4.7.2 Horizontes

Horizonte	Definición	$\varepsilon = 0$ y única w	Caso general
De partículas	$a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a}$	$\frac{2}{H_0(1+3w)}$ (para $w>-1/3$)	$\frac{1}{H_0}\int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{\sum_i \Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w^i)}}}$
De sucesos	$a_0 \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{a}$	$\frac{-2}{H_0(1+3w)}$ (para $w<-1/3$)	$\frac{1}{H_0}\int_{-1}^{0} \frac{dz}{\sqrt{\sum_i \Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w^i)}}}$

Tabla 4.2 Horizontes de partículas y de sucesos para universos euclídeos dominado por una única ecuación de estado, y en un caso general de universo simbiótico.

4.7.3 Volumen

Para el elemento de volumen propio:

Definición	$\varepsilon = 0$ y única w	Caso general
$a_0^3 \frac{r^2 dr\, d\Omega}{\sqrt{1-\varepsilon r^2}}$	$\frac{4}{H_0^3(1+3w)^2}\left[(1+z)^{\frac{-3(1+w)}{4}} - (1+z)^{\frac{-(5+9w)}{4}}\right]^2 dz\, d\Omega$ (Excepto $w=-1/3$)	$\frac{D_L^2 dz\, d\Omega}{H_0(1+z)^2\sqrt{\sum_i \Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w^i)}}}$

Tabla 4.3 Elemento de volumen en un universo euclídeo dominado por una única ecuación de estado, y en un caso general de universo simbiótico.

Para el volumen propio:

$$V_p = \begin{cases} \frac{2\pi}{H_0^3\Omega_{\varepsilon 0}}\left[H_0 D_M\sqrt{1+H_0^2 D_M^2\Omega_{\varepsilon 0}} - \frac{1}{\sqrt{\Omega_{\varepsilon 0}}}\operatorname{arcsenh}\left(H_0 D_M\sqrt{\Omega_{\varepsilon 0}}\right)\right] & \text{si } \varepsilon=-1\ (\Omega_{\varepsilon 0}>0) \\ \frac{4\pi}{3}D_M^3 & \text{si } \varepsilon=0\ (\Omega_{\varepsilon 0}=0) \\ \frac{2\pi}{H_0^3\Omega_{\varepsilon 0}}\left[H_0 D_M\sqrt{1+H_0^2 D_M^2\Omega_{\varepsilon 0}} - \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{\varepsilon 0}|}}\operatorname{arcsen}\left(H_0 D_M\sqrt{|\Omega_{\varepsilon 0}|}\right)\right] & \text{si } \varepsilon=+1\ (\Omega_{\varepsilon 0}<0) \end{cases}$$

Tabla 4.4 Volumen propio en un caso general, en función de la curvatura.

4.8 Ejercicios

4.1 Determinar la distancia propia en un universo euclídeo dominado por una única ecuación de estado w = cte.

4.2 Determinar la distancia propia en un universo de curvatura negativa dominado por materia no relativista (ecuación 4.21).

4.3 Calcular la coordenada radial comóvil en función del desplazamiento al rojo para un universo no euclídeo dominado por materia pulverulenta.

4.4 Demostrar que, para pequeños desplazamientos al rojo, la distancia de luz en función del desplazamiento al rojo, en un universo dominado por materia no relativista, se reduce a la ley de Hubble.

4.5 Determinar la distancia propia, la distancia de luz y la distancia de ángulo cuando la curvatura es distinta de cero en los casos de dominio de:
a. Radiación.
b. Materia no relativista (por integración directa).
c. Constante cosmológica.
Aplicar los anteriores resultados al caso de un objeto que se encuentra a z=1.

4.6 Dada la definición de filtros del sistema fotométrico de Johnson:
a. Supuesta rectangular la respuesta espectral, determinar el desplazamiento al rojo para el que observar en el filtro V nos proporciona la magnitud en B con una corrección K mínima. Ídem observar en R para obtener la magnitud en V. ¿Cuál de los dos casos proporcionará un mejor resultado, es decir, minimizará más la corrección K?
b. Para los mismos casos anteriores, si la respuesta espectral de los filtros no es rectangular, ¿serán los mismos los desplazamientos al rojo que minimizan la corrección K?
c. ¿Dependerá el resultado del espectro de la fuente?

4.7 Determinar el desplazamiento al rojo para el que la distancia de ángulo es máxima en un universo de curvatura:
a. Nula dominado por una única ecuación de estado w = cte.
b. No nula dominado por materia no relativista.

4.8 ¿Cuál es la relación entre la magnitud superficial de un objeto y el desplazamiento al rojo?

4.9 Comprobar que a pequeños desplazamientos al rojo todos los distintos tipos de distancias son iguales entre sí. ¿En qué orden de aproximación se verifica la igualdad?

4.10 Comprobar que la velocidad de recesión se puede aproximar por z a desplazamientos al rojo pequeños cuando la curvatura es nula y domina una única ecuación de estado. ¿En qué orden de aproximación se verifica la igualdad?

4.11 Determinar, en un caso totalmente general, la velocidad de recesión de un objeto en el momento en que la luz que nos llega en este instante fue emitida. Aplicar al caso de un universo de curvatura nula y dominado una única ecuación de estado w = cte. En el caso de materia no relativista, ¿cuál era la velocidad de recesión de un objeto situado a $z = 3$?

4.12 Determinar numéricamente la distancia al emisor y a la luz que éste emite en función del tiempo utilizando el algoritmo descrito en 4.2.5 aplicado a universos euclídeos. Reproducir figuras similares a la 4.11 para distintas distancias y tiempos de emisión en universos acelerados y desacelerados. Determinar, además, la evolución de las velocidades de recesión.

4.13 A partir de los resultados del ejercicio 4.5, determinar el horizonte de partículas y el horizonte de sucesos cuando la curvatura es distinta de cero en los casos de dominio de:
a. Radiación.
b. Materia no relativista.
c. Constante cosmológica.

4.14 En un universo dominado por una ecuación de estado $w = -1/3$, ¿puede existir un horizonte de sucesos? ¿Y de partículas?

4.15 El modelo de Milne, ¿tiene horizonte de partículas?¿Y de sucesos?¿Por qué?

4.16 ¿Cómo evoluciona el radio de Hubble para un universo no euclídeo con una única ecuación de estado? Analizar las diferencias con respecto al caso euclídeo.

4.17 Determinar la velocidad de recesión del horizonte de sucesos para un universo no euclídeo dominado por constante cosmológica. Comparar con el caso euclídeo.

4.18 Demostrar que en un caso general la velocidad de recesión del horizonte es proporcional a la de recesión de un objeto sobre el horizonte más términos adicionales. Aplicar al caso no euclídeo dominado por materia no relativista.

4.19 Determinar el volumen propio en función de la distancia de movimiento propio (ecuación 4.109).

4.20 Demostrar que la prueba de Schmidt también es aplicable para toda una muestra de distintos rangos de luminosidades.

4.21 Determinar el flujo bolométrico recibido de todas las direcciones y de todas las fuentes, considerando que éstas no evolucionan y que tienen todas la misma luminosidad bolométrica, en:
a. El universo de Milne.
b. Un universo dominado por materia no relativista y de curvatura no nula.
Comparar ambos con el caso euclídeo.

4.9 Bibliografía

4.9.1 Referencias

Banerjee, S. K. y Narlikar, J. V. (1999), *MNRAS* 307, 73.
Chen, G. y Ratra, B. (2003), *ApJ* 582, 586.
Felten, J. E. (1985), *Comments Astrophys.* 11, 53.
Fioc, M. y Rocca-Volmerange, B. (1997), *A&A* 326, 950.
Gurvits, L. I.; Kellermann, K. I. y Frey, S. (1999), *A&A* 342, 378.
Heyl, J. *et al.* (1997), *MNRAS* 285, 613.
Iye, M. *et al.* (9 coautores) (2006), *Nature* 443, 186
Podariu, S. *et al.* (2003), *ApJ* 584, 577.
Riess, A. G. *et al.* (18 autores más) (2004), *ApJ* 607, 665.
Schmidt, M. (1968), *ApJ* 151, 393.

4.9.2 Textos para ampliación de conocimientos

Cosmometría

Hogg, D. W. (2000), astro-ph/9905116v4 (Distancias y volúmenes).
— *et al.* (2002), astro-ph/0210394 (corrección K).

Distancias en universos heterogéneos

Kantowski, R. (1998), *ApJ* 507, 483.
—; Kao, J. K. y Thomas, R. C. (2000), *ApJ* 545, 549.

Recesión y desplazamiento al rojo

Harrison, E. (1993), *ApJ* 403, 28.

Horizontes y su evolución

Harrison, E. (1991), *ApJ* 383, 60.

Funciones de luminosidad y prueba de Schmidt

Heyl, J. *et al.* (1997), *MNRAS* 285, 613.

Paradoja de Olbers

Wesson, P. S.; Valle, K. y Stabell, R. (1987), *ApJ* 317, 601.
— (1991), *ApJ* 367, 399.

4.9.3 Textos recomendados

Narlikar, J. V. (^{3}2002), *Introduction to Cosmology*, Cambridge University Press.

4.9.4 Enlaces útiles

Página www de este texto

http://webpages.ull.es/users/jcepano

Generales

Diccionario en línea: http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
Buscador de pretirajes de artículos (astro-ph, y otros): http://www.arxiv.org
Página general de cosmología: http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5

Capítulo 5 | EL UNIVERSO PRIMORDIAL O DE LAS TRANSICIONES DE FASE

En los capítulos anteriores se ha estudiado la evolución del universo entendida como la variación del factor de escala. En lo sucesivo se estudiará la evolución del universo entendida como la de sus constituyentes, causada por la variación del factor de escala. Para mayor comodidad y pedagogía, este estudio se llevará a cabo dividiendo el tiempo transcurrido desde la Gran Explosión en intervalos caracterizados por un rasgo distintivo común.

En cosmología, el tradicional afán ordenador y clasificador del ser humano se ha manifestado en la división de la historia del universo. Por analogía con la geología, la historia del universo se ha dividido en eras. Quizás hayan llegado a los oídos del lector términos como la *era de Planck* o la *era GUT*. Aunque el derecho consuetudinario pueda haber consolidado estos términos, este autor los considera inapropiados. Según el diccionario de la Real Academia Española, se denomina *era* en su tercera acepción a «cada uno de los grandes periodos de la evolución geológica o cósmica», entendiendo grande como extenso o dilatado (segunda acepción: «Extenso periodo histórico...»). De acuerdo con esta definición, difícilmente puede denominarse *era* a intervalos de tiempo que a menudo son muchísimo más breves que un parpadeo. Este autor ha preferido denominar *época* a estos periodos. Según el mismo diccionario de la lengua española, el término *época* designa el «periodo de tiempo que se señala por los hechos en él acontecidos» y, por extensión, a «cualquier espacio de tiempo». Por este motivo, lo he considerado más adecuado, prefiriendo reservar el término *era* para designar periodos más dilatados y, por ende, menos numerosos, por analogía con la división en eras geológicas.

Como ya se ha mencionado en capítulos anteriores, en el universo dominan distintas densidades de energía a lo largo del tiempo. **Este dominio energético es lo que he considerado que se ajusta mejor a la calificación de era**. Así pues, el universo empezaría con la «era de radiación» en que la densidad de energía dominante es la de radiación o materia relativista. Proseguiría con la «era de materia» en que el dominio energético está en manos de materia no relativista, y terminaría en la «era de energía oscura», en la que nos hallamos en la actualidad y que se caracteriza por el dominio energético de la energía de origen desconocido que acelera la expansión del universo.

Cada una de estas eras se subdivide en épocas, como la «época de Planck», la «época GUT», etc. Sin embargo, a esta clasificación se solapa la división por capítulos de la historia del universo seguida en este texto (tabla 5.1). Por motivos pedagógicos esta clasificación no puede ser en modo alguno arbitraria, y obedece a lo que este au-

tor considera hechos cruciales, que marcan encrucijadas en la historia del universo: la transición cuark-hadrón y el desacoplamiento de los fotones. En efecto, estos fenómenos permiten dividir la historia en tres partes, que definen los tres capítulos de este texto dedicado a la evolución del universo. Cada una de estas partes tiene características muy distintas y está regida por teorías distintas. Por este motivo se han denominado como *universos:* **cada uno de ellos podría ser considerado un universo distinto, significado por las leyes que lo caracterizan.** Este primer capítulo se denomina «universo primordial o de las transiciones de fase» porque la física que lo determina es la de las transiciones de fase y teorías de unificación de interacciones. Este periodo termina con la última transición de fase, la transición cuark-hadrón que marca el paso al siguiente universo o capítulo, el «universo temprano o de las partículas» en que en el universo ya está formado por las partículas que conocemos en el universo actual, relacionadas por las mismas interacciones que en el universo actual. Este «universo» o capítulo termina con otro hecho crucial: el ya conocido desacoplamiento de los fotones, que marca el inicio del universo en el que pueden crecer las estructuras que lo forman en la actualidad por inestabilidad gravitatoria. En opinión del autor, **la transición cuark-hadrón y el desacoplamiento de los fotones son hechos suficientemente significativos en la historia del universo, como para merecer elevarlos a la categoría de cesuras del mismo.** Además, el criterio de la división en épocas característica del universo primordial es distinta de la seguida en el universo temprano, lo cual justifica más aún la división efectuada en el presente texto. **En el universo primordial la división en épocas viene determinada por las transiciones de fase o pérdida de unificación de las distintas fuerzas del universo, mientras que en el universo temprano la división en épocas viene dada por el dominio de una interacción o partícula determinados.**

División energética	División fenomenológica	Características
Era de radiación	Universo primordial o de las transiciones de fase.	Inicio en $t = 0$. División en épocas caracterizada por las pérdidas de unificación de interacciones. Termina con la **transición cuark-hadrón.**
	Universo temprano o de partículas.	División en épocas caracterizada por el dominio de una interacción o partícula determinada. En él se produce cambio de era radiación-materia. Termina con el **desacoplamiento de los fotones.**
Era de materia	Universo de estructuras en formación.	Los fotones ya no impiden el crecimiento de estructuras por inestabilidad gravitatoria.
Era de energía oscura		Ya no se forman estructuras (capítulo 8).

Tabla 5.1 División de la historia del universo adoptada en este texto: los periodos de dominio de cada una de las distintas densidades de energía marcan las eras cosmológicas. Cada una de ellas se divide en épocas. Superpuesta a esta división se halla la división en capítulos seguida en este texto para estudiar esta historia, que no es arbitraria sino marcada por las distintas características que tiene el universo y que está definida por dos hechos fundamentales: la transición cuark-hadrón y el desacoplamiento de los fotones.

Este capítulo dedicado al universo primordial es sin duda el más cualitativo y menos auto-justificado de este texto. No solamente porque al tratarse de un texto básico no sea posible dar explicaciones detalladas de procesos basados en teorías complejas, sino porque se desconoce en gran medida la física que se debería aplicar a las altas energías del universo primordial. Sin embargo, esta etapa en la vida del universo no puede en manera alguna obviarse debido a los importantes procesos que en ella tienen lugar, y que determinan el desarrollo posterior, de la misma manera que las primeras etapas en la vida de un niño condicionan o incluso determinan su vida adulta, aunque el individuo no pueda recordarlas en detalle. Como el lector tendrá ocasión de comprobar, nuestra ignorancia sobre los procesos y composición del universo, siempre en términos relativos, decrece con el tiempo. Por consiguiente, el universo primordial representa la etapa más desconocida. Dentro de este grado, sin embargo, las primeras etapas del universo primordial son las más inciertas dentro de las más desconocidas.

5.1 El origen del universo y la singularidad inicial

No sabemos cómo empezó el universo. La ciencia solamente puede afirmar que se autocreó a partir del mar de potencialidades que denominamos vacío cuántico, y cuyas propiedades no comprendemos por completo.

La extrapolación del universo actual al instante inicial indica que, si el factor de escala puede anularse en el origen de tiempos cosmológico, existirá una singularidad material, porque la densidad de energía diverge, y de curvatura espacio-temporal, dado que ésta también diverge a no ser que sea nula. La presencia de esta singularidad se fundamenta en la existencia misma del factor de escala, definida por la métrica de un universo homogéneo e isótropo, y por su evolución, determinada por la relatividad general y las ecuaciones de estado.

Sin embargo, como ya se ha comentado en el capítulo tercero, la relatividad general deja de ser válida para edades muy pequeñas, en las que los efectos cuánticos no serán despreciables. Pero no se dispone en la actualidad de una teoría válida de relatividad cuántica. En puridad, por tanto, no puede asegurarse que existiera una singularidad inicial, dado que la física de la que disponemos no está suficientemente avanzada como para predecir el comportamiento del universo en los instantes iniciales simplemente por extrapolación.

Además, como la temperatura es inversamente proporcional al factor de escala (1.24), los valores infinitesimales del factor de escala de los primeros instantes del universo se corresponderán con temperaturas extraordinariamente elevadas. A estas temperaturas las partículas que componen el universo estaban dotadas de energías altísimas. El universo primordial constituye, por definición, el mayor acelerador de partículas que jamás haya existido.

Por estos motivos, para estudiar el universo primordial, incluso de forma cualitativa, es necesario un conocimiento, aunque sea asimismo cualitativo, de la física de partículas. Estos conceptos elementales, que vamos a abordar seguidamente, serán también necesarios para el estudio del universo temprano, ya en el siguiente capítulo.

5.2 Unificación de interacciones

5.2.1 Interacciones fundamentales

Las cuatro fuerzas conocidas en la naturaleza, gravitatoria, electromagnética, débil y fuerte, pueden representarse mediante lo que se denomina una **interacción de intercambio** (tabla 5.2): las partículas que interaccionan intercambian una partícula denominada **bosón portador**, distinto y propio para cada interacción. Esta representación evita la idea incómoda de la interacción a distancia y los potenciales retardados de la teoría clásica. Sin embargo, para no violar los principios de conservación de la energía y del momento, el bosón portador ha de ser virtual[1]: debe obedecer al principio de indeterminación energía-tiempo según el cual el producto de la energía del bosón portador por su vida media no puede ser mayor que $\hbar/2$. Entonces, **el alcance máximo de la interacción será inversamente proporcional a la masa en reposo del bosón portador** (ejercicio 5.1), puesto que la masa en reposo es la mínima energía que puede tener.

Interacción	Intensidad relativa	Alcance (m)	Bosón portador	Masa (GeV)
Fuerte	1	10^{-15}	Gluón	0
Electromagnética	1/137	∞	Fotón	0
Débil	5×10^{-7}	10^{-18}	$W^{\pm}$ y Z^0	80 y 91
Gravitatoria	6×10^{-39}	∞	Gravitón	0

Tabla 5.2 Comparación entre las características de las distintas interacciones. La intensidad relativa proviene de las constantes adimensionales de acoplamiento de cada fuerza. Los bosones con masa nula proporcionan un alcance ilimitado mediante el principio de incertidumbre energía-tiempo. Esta regla no se aplica a los gluones porque, como veremos (5.2.2) están confinados, junto con los cuarks, dentro de las partículas que forman. Según el modelo de Yukawa, la interacción fuerte entre las partículas que componen el núcleo atómico y que compensa la repulsión electrostática de los protones, puede representarse mediante el intercambio de piones y otras partículas de masas del orden del 0.1 GeV, por lo que este valor puede utilizarse como estimador del alcance de la fuerza fuerte mediante el principio de incertidumbre energía-tiempo. A título de comparación, un átomo tiene del orden de 10^{-10} m y un núcleo atómico del orden de 10^{-15} m.

[1] El concepto de partícula virtual ya fue introducido en el capítulo segundo al tratar de la posible interpretación de la constante cosmológica como una energía del vacío.

5.2.2 Partículas elementales

Como la cosmología, la física de partículas también tiene su modelo estándar. Según él, las **partículas elementales** (es decir, las que no pueden, por el momento, descomponerse en otras) se agrupan en dos categorías: **bosones portadores**, que transmiten fuerzas (tabla 5.3), y **fermiones elementales** (tabla 5.4) que forman las unidades elementales de lo que se conoce habitualmentecomo materia. Los bosones (portadores o no) tienen espín entero 0, 1 ó 2, mientras que los fermiones (elementales o no) tienen espín 1/2.

Bosones portadores

Nombre	Espín	Carga eléctrica	Masa (GeV)	Fuerza	Existencia
Gravitón	2	0	0	Gravitatoria	No observada
Fotón	1	0	0	Electromagnética	Observada
Gluón	1	0	0	Fuerte	Indirecta
W^+	1	+1	80	Débil	Observada
W^-	1	−1	80	Débil	Observada
Z^0	1	0	91	Débil	Observada
Higgs	0	0	<166	Campo de Higgs[2]	No observada

Tabla 5.3 Particulas elementales: bosones portadores de fuerzas y algunas de sus características.

Fermiones elementales

Se dividen en dos familias, **leptones** y **cuarks**, divididas en tres generaciones cada una de ellas. Cada generación está constituida por un leptón con carga, uno sin carga (neutrino), un cuark con carga −2/3 del leptón cargado y otro con carga +1/3 del leptón cargado (tabla 5.4). A cada uno de estos fermiones elementales hay que añadir las correspondientes antipartículas, de cargas eléctricas opuestas, que se indican por el mismo símbolo marcado con carga contraria, o marcado con una barra encima (sobre todo en el caso de partículas no cargadas). Por ejemplo, la antipartícula del electrón e^- es el positrón e^+, mientras que la antipartícula del neutrino electrónico es el antineutrino electrónico $\overline{\nu}_e$.

Los distintos tipos de cuarks de la tabla 5.4 se denominan **sabores**. Además, e independientemente de su sabor, los cuarks tienen una **carga de color** asociada que puede ser roja, verde o azul. Los anticuarks, además de tener carga eléctrica opues-

[2] El campo escalar de Higgs proporciona a las partículas ($W^{\pm}$, Z^0, cuarks y leptones) su masa inercial. La masa que se indica del bosón de Higgs es la que se considera más plausible a fecha de julio de 2006. En esta misma fecha la cota inferior era de 114.4 GeV al 95% de límite de confianza.

ta a los cuarks, tienen uno de los anticolores cian, magenta y amarillo, respectivamente. Por ejemplo, la antipartícula del cuark *u* arriba rojo de carga +2/3 es el anticuark arriba cian de carga –2/3.

Familia	Nombre	Espín	Carga eléctrica	Masa (MeV)	Generación	Existencia
Leptones	Electrón (e^-)	$^1/_2$	–1	0.511	I	Observado
	Neutrino electrónico (ν_e)	$^1/_2$	0	$< 2.3\times10^{-7}$	I	Observado
	Muón (μ^-)	$^1/_2$	–1	106	II	Observado
	Neutrino muónico (ν_μ)	$^1/_2$	0	$< 2.3\times10^{-7}$	II	Observado
	Tauón (τ^-)	$^1/_2$	–1	1777	III	Observado
	Neutrino tauónico (ν_τ)	$^1/_2$	0	$< 2.3\times10^{-7}$	III	Observado
Cuarks[3]	Arriba (*u*)	$^1/_2$	+2/3	1.5 – 4.5	I	Indirecta
	Abajo (*d*)	$^1/_2$	–1/3	5.0 – 8.5	I	Indirecta
	Encanto (*c*)	$^1/_2$	+2/3	1000 – 1400	II	Indirecta
	Extraño (*s*)	$^1/_2$	–1/3	80 – 155	II	Indirecta
	Cima (*t*)	$^1/_2$	+2/3	174 300±5100	III	Indirecta
	Fondo (*b*)	$^1/_2$	–1/3	4000 – 4500	III	Indirecta

Tabla 5.4 Partículas elementales: fermiones elementales y algunas de sus características. La carga eléctrica corresponde a la de la partícula. La antipartícula tiene carga opuesta. Las masas de los neutrinos corresponden a la estimación de Spergel *et al.* (2003), si se admite que las masas de las distintas especies son del mismo orden. Véase el capítulo primero para otras estimaciones, señalando una vez más que la cosmología proporciona restricciones mayores que la física de partículas. Finalmente hay que señalar que las masas de los cuarks son muy controvertidas dado que no se observan cuarks libres. Incluso se ha sugerido que los cuarks *u* y *d* podrían carecer casi de masa, aspecto éste que ha sido descartado por resultados recientes.

Hadrones

Las demás partículas, que no son elementales, se forman por combinaciones de cuarks y anticuarks que se mantienen unidas mediante gluones, los bosones portadores de la fuerza fuerte (tabla 5.3). Existen ocho gluones dotados cada uno de ellos de una combinación color-anticolor. Las combinaciones cromáticas estables de cuarks son, o bien blancas, o bien negras, de carga eléctrica entera, y forman los **hadrones**. Siguiendo las reglas de combinación de colores RGB, el blanco se consigue mediante una combinación de tres cuarks de distintos colores, o bien de tres anticuarks de distintos anticolores, constituyendo antihadrones. Estas ternas de cuarks originan los **bariones** (tabla 5.5). El negro se consigue mediante la combinación de un cuark y un anticuark del correspondiente anticolor[4], lo que da lugar a los **mesones**, como muestra la tabla 5.5[5]:

Clasificación de partículas no elementales			Partícula	Quarks de la partícula	Antipartícula	Quarks de la antipartícula
Hadrones	Bariones	Nucleones	Protón (*p*)	*uud*	Antiprotón ($\overline{p}$)	$\overline{uud}$
			Neutrón (*n*)	*ddu*	Antineutrón ($\overline{n}$)	$\overline{ddu}$
		Hiperones	Sigma (Σ^+)	*uus*	Antisigma (Σ^-)	*dds*
	Mesones		Pión (π^+)	$u\overline{d}$	Antipión (π^-)	$\overline{u}d$
			Pión neutro (π^0)	$\frac{u\overline{u}+d\overline{d}}{\sqrt{2}}$	Pión neutro (π^0)	$\frac{u\overline{u}+d\overline{d}}{\sqrt{2}}$

Tabla 5.5 Hadrones y algunas de sus características. Solamente se proporcionan algunos ejemplos de hiperones y mesones. Para una lista más completa se recomienda consultar la página http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html. La antipartícula del pión π^0 es ella misma.

La carga eléctrica y el espín de la partícula resultante se obtendrán sumando las cargas y combinando los espines de los cuarks que la forman (ejercicio 5.2). Así, puede comprobarse que las combinaciones blancas o negras de cuarks que dan hadrones tienen la propiedad de tener carga eléctrica entera. Asimismo, de la combinación de espines resulta que los bariones son fermiones, de espín $^1/_2$, mientras que los mesones son bosones de espín 0 ó 1. De la tabla 5.5 también podemos deducir que la materia con la que estamos más familiarizados es la de la primera generación de partículas, la menos masiva. La masa de la partícula no coincide con la suma de las masas de los cuarks que la componen, debido a la energía del enlace y a la combinación de espines. Así, partículas compuestas de los mismos o parecidos cuarks pueden tener masas muy distintas.

La fuerza asociada a la carga de color aumenta con la distancia a razón de 1 GeV por femtómetro[6]. Por este motivo no se observan cuarks libres: cuando la separación de los cuarks que constituyen los hadrones aumenta lo suficiente, la energía se invierte en la creación de pares cuark-anticuark (mesones). De hecho, las masas de los *u* y *d* permiten crear pares a separaciones mucho menores que un femtómetro. Se dice que los cuarks están **confinados**. De este modo, las colisiones energéticas

[3] En inglés, de arriba a abajo: *Up*, *Down*, *Charm*, *Strange*, *Top* y *Bottom*, son los llamados sabores de los cuarks. La palabra cuark fue acuñada por Murray Gell-Mann basándose en el texto «Three quarks for Muster Mark...» del libro de James Joyce *Finnegan's Wake*.

[4] Color y anticolor se anulan entre sí originando el «no color» negro.

[5] Además se han detectado el pentacuark $\theta^+(1540)$, constituido por cinco cuarks: $(uudd\bar{s})$, de carga +1, donde el acromatismo se consigue mediante tres cuarks de distintos colores y un par cuark-anticuark de colores opuestos (color-anticolor); y el tetracuark $X(3872)$ compuesto de dos pares cuark-anticuark de colores opuestos. La cifra entre paréntesis indica la masa estimada en MeV. Ambos pertenecen a la categoría de **hadrones exóticos**. El pentacuark es un barión y el tetracuark un mesón.

[6] 1 femtómetro, 1 fm $\equiv 10^{-15}$ m, antiguamente denominado fermi.

con hadrones no liberan cuarks sino que producen mesones. Podría argumentarse que los cuarks podrían liberarse de los hadrones por efecto túnel, como en la desintegración α de un núcleo. Sin embargo, la barrera de potencial que enfrentan los cuarks no decrece con la distancia sino que aumenta.

5.2.3 Teorías de unificación

En el universo se conocen las interacciones siguientes: electromagnética, débil, fuerte y gravitatoria. Las ecuaciones de Maxwell permiten describir la electricidad y el magnetismo. La teoría de la gravitación de Newton describe la atracción gravitatoria, el modelo de Fermi la fuerza débil y la fuerza fuerte es descrita por la cromodinámica cuántica (tabla 5.7).

Uno de los objetivos de la física ha sido, de suyo, la descripción matemática de los fenómenos de la naturaleza de la manera más compacta y general posible, de tal manera que permita tratar de forma única fenomenologías aparentemente dispares. La teoría de gravitación de Newton, por ejemplo, permitió considerar la caída de objetos y las órbitas de los planetas del Sistema Solar como manifestaciones de un mismo fenómeno: la gravedad. Por consiguiente, Newton consiguió la primera **unificación**. En efecto, según el diccionario de la Real Academia, unificar significa «hacer de muchas cosas una o un todo, uniéndolas, mezclándolas o *reduciéndolas a una misma especie*».

El siguiente modelo unificado que se conoce fue debido a Maxwell. Las ecuaciones de Maxwell permiten tratar la electricidad, el magnetismo y la propagación de la luz como un único fenómeno. Einstein, con su ecuación de la relatividad general, demostró la unión entre la gravitación y la geometría del espacio-tiempo. La siguiente unificación establecida y la más reciente por ahora, fue la teoría electrodébil de Salam-Weinberg (tabla 5.7), que unifica la interacción débil y electromagnética y en la que se hará especial énfasis por su carácter ilustrativo de otras unificaciones. Lamentablemente no se dispone de espacio para justificar la unificación electrodébil, por lo que aquí se dará solamente una descripción cualitativa y simplificada. Se recomienda encarecidamente al lector la consulta de otros textos (5.13.2) que le permitirán disfrutar de la belleza formal de la teoría.

5.2.4 Teoría electrodébil

Los cuarks interaccionan entre sí como partículas cargadas mediante la interacción electromagnética, y como portadores de color mediante la fuerza fuerte, mucho más intensa, que los confina. Los leptones cargados interaccionan entre sí mediante la interacción electromagnética. Los leptones no sufren la fuerza fuerte, puesto que no tienen color, y los neutrinos no interaccionan electromagnéticamente puesto que carecen de carga eléctrica. En cambio, la interacción débil permite que los cuarks interaccionen entre sí cambiando su sabor y los leptones interaccionen entre sí transformándose unos en otros. Un ejemplo del primer caso es la desintegración del neutrón,

$$n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e \tag{5.1}$$

Esta reacción es una sinopsis[7] de dos procesos: el neutrón, que se compone de los cuarks *ddu*, se desintegra emitiendo un bosón W^- que cambia un cuark *d* por un cuark *u* dando lugar a un protón (tablas 5.4 y 5.5). El bosón se desintegra a su vez produciendo un electrón y un antineutrino. Otro ejemplo del primer caso sería (ejercicio 5.3)

$$n + \nu_e \rightarrow p + e^- . \tag{5.2}$$

Un ejemplo del segundo caso es la reacción sinóptica,

$$e^- + \mu^+ \rightarrow \nu_e + \overline{\nu}_\mu , \tag{5.3}$$

donde un electrón intercambia un W^- con un antimuón. El W^- se lleva la carga del electrón y lo convierte en neutrino electrónico, y anula la carga del antimuón que se convierte en antineutrino muónico. Otro ejemplo del segundo caso sería (ejercicio 5.3),

$$e^- + e^+ \rightarrow \nu_e + \overline{\nu}_e . \tag{5.4}$$

En la interacción débil el intercambio de un bosón portador Z^0, al ser neutro, no altera la naturaleza de las partículas, sino que constituye lo que se denomina una **corriente neutra** que produce un intercambio de momento entre ellas.

En la actualidad, electromagnetismo y fuerza débil se distinguen por las distintas masas de los bosones portadores, que como se vio en (5.2.1), dan lugar a alcances distintos para estas interacciones. Pero la situación cambia si las partículas se encuentran en equilibrio térmico a temperaturas mayores que la masa en reposo de los bosones portadores de la interacción débil[8], es decir, mayores que unos 100 GeV (tabla 5.3). Entonces los bosones $W^\pm$ y Z^0 y los fotones son esencialmente idénticos, todos tienen masa nula (como se justifica intuitivamente más adelante) y las interacciones

[7] La representación más adecuada se logra mediante diagramas de Feynman, pero no se incluye en el texto debido a restricciones de espacio y por no ser propiamente necesaria para la comprensión de la interacción débil.

[8] Las escalas de temperaturas y de energías se relacionan mediante la constante de Boltzmann *k*. Entonces, si m_0 es la masa en reposo: $m_0c^2=kT$.

electromagnética y débil, que en esas circunstancias tienen el mismo alcance[9], se convierten en manifestaciones de una única interacción: la electrodébil. A esas temperaturas también carecen de masa los leptones y los cuarks. Por este motivo, la masa no permite distinguir los distintos tipos de leptones. La carga tampoco los distingue, puesto que se transforman rápidamente unos en otros y viceversa, manteniendo las reacciones de transformación como las del tipo (5.3) y (5.4) en equilibrio. Por los mismos motivos los cuarks también son indistinguibles: ni la carga, ni la masa, ni el sabor los diferencian, puesto que se transforman unos en otros a través de la interacción débil. Sin embargo, leptones y cuarks siguen diferenciándose por el color: la fuerza fuerte solamente afecta a los segundos. Por consiguiente puede considerarse que a estas temperaturas solamente se distingue entre una «materia leptónica» indiferenciada y una «materia cuark» indiferenciada. Sin embargo, si la temperatura desciende a valores inferiores a 80 GeV, todas las partículas adquieren la masa en reposo que las distingue. Entonces los fotones y los bosones $W^{\pm}$ y Z^0 se diferencian, y varía el alcance de las interacciones que median, lo que separa por tanto la fuerza débil y la interacción electromagnética. Este proceso implica un cambio de simetría debido al descenso de temperatura: se ha pasado de un estado más simétrico (con las interacciones unificadas) a un estado menos simétrico (con interacciones separadas). Esta transición se denomina **rotura espontánea de la simetría**. El mecanismo de rotura de simetría es el llamado **mecanismo de Higgs**, que invoca el **campo de Higgs** que tiene el llamado **bosón de Higgs**[10] como bosón portador (tabla 5.3). Este bosón es el que proporciona a las partículas su masa cuando se rompe la simetría. Intuitivamente, puede decirse que el bosón de Higgs interacciona con las partículas «anclándolas» al llamado «mar de Higgs», que llena todo el espacio, y dándoles masa inercial.

Estos conceptos se tratarán con un poco más de detalle en el apartado 5.3, por lo que el lector sólo debe tener en mente ahora los grandes rasgos del proceso y los términos utilizados.

En una interpretación clásica, más intuitiva pero incorrecta, podría decirse que en el equilibrio termodinámico a temperaturas por encima de la masa en reposo de los bosones $W^{\pm}$ y Z^0, los fotones son suficientemente energéticos como para crear pares $W^{\pm}$ y también Z^0 libres, por lo que la distinción entre fotones y bosones $W^{\pm}$ y Z^0 se diluye. Esas energías equivalen (tabla 5.2), por el principio de incertidumbre energía-tiempo, a distancias del orden del alcance de la interacción débil, por lo que ambas interacciones tienen el mismo alcance y están unificadas. Asimismo, en el equilibrio térmico a esas temperaturas, cuarks y leptones tienen masas en reposo

[9] Pero no igual intensidad. Por este motivo, la interacción electrodébil no puede considerarse una «verdadera» unificación, calificativo que renace propiamente en las teorías GUT.

[10] También llamado «partícula Dios» (*God particle*), constituye una de las partículas más buscadas por los actuales aceleradores. La masa que figura en la tabla 5.3 procede de las últimas estimaciones que indican que puede ser inferior a 200 GeV.

despreciables frente a sus energías cinéticas. La simetría se rompe cuando la temperatura desciende a energías menores que la masa en reposo de los bosones mediadores de la fuerza débil. Entonces los bosones $W^{\pm}$ y Z^0 en estado libre van desapareciendo del universo y las interacciones se separan, cambiando su alcance. Incluyo esta imagen incorrecta del proceso en aras de una mayor claridad explicativa. Pido disculpas por ello a los rigoristas.

5.2.5 Teorías de gran unificación

Como en el caso de la teoría electrodébil, las teorías de gran unificación (GUT[11]) permiten tratar la fuerza electrodébil y la fuerte como un único fenómeno. Existen varias teorías candidatas, donde todas ellas se caracterizan por predecir que el protón es una partícula inestable con una vida media de unos 10^{36} años, lo que no ha sido comprobado todavía[12].

Como ya se ha mencionado, los leptones no tienen color y no sufren la interacción fuerte. Para conseguir la unificación será necesario, por tanto, conseguir que los leptones se puedan convertir en cuarks y viceversa, con la misma facilidad con la que un cuark se transforma en otro o un leptón se transforma en otro en la interacción débil. Esta transformación se consigue postulando nuevos bosones portadores llamados X, con color y muy masivos (10^{15} GeV[13]), como partículas mediadoras de la fuerza unificada fuerte-electrodébil.

Al igual que en la unificación electrodébil, en el equilibrio térmico a temperaturas mayores que masa en reposo del X, las tres interacciones tendrían el mismo alcance y cuarks y leptones serían indistinguibles, formando lo que se puede denominar «materia GUT» indiferenciada. Además, las tres interacciones tendrían también la misma intensidad (figura 5.1) dando lugar a una verdadera unificación. A temperaturas menores se produciría una rotura espontánea de simetría y el bosón X adquiriría su masa distintiva, que separa la interacción fuerte de la electrodébil, mediante el mecanismo de Higgs.

En las reacciones entre partículas, además de la energía y el momento, es preciso que se conserven otras cantidades. Entre ellas: el número bariónico, que es la diferencia entre el número de bariones y el de antibariones, y el número leptónico que es la diferencia entre el número de leptones y el de antileptones *de la misma generación*. Entonces estos números han de ser iguales en los reactivos que en los pro-

[11] Acrónimo inglés de *Great Unification Theory* o teoría de gran unificación. En inglés, como sustantivo, significa intestino o tripa.

[12] El *Super-Kamiokande* (véase capítulo primero) entre otros, ha buscado infructuosamente indicios de la desintegración del protón.

[13] Que es equivalente más bien a la masa de un grano de polvo que a una partícula subatómica: inalcanzable tanto para los aceleradores actuales como para los previstos en el futuro próximo.

ductos, como puede comprobarse (ejercicio 5.4) en las reacciones (5.1), (5.2), (5.3) y (5.4). Lógicamente, número bariónico de los cuarks es 1/3.

Entonces, **la conversión de leptones en cuarks y viceversa implica la violación del número bariónico**, que es un principio experimental firmemente establecido. En este caso la cantidad conservada es la diferencia entre el número bariónico y el leptónico, dado que los cuark se transformarían en antileptones de la misma generación y viceversa.

5.2.6 Teorías de superunificación

Una superunificación o TOE[14] permitiría describir conjuntamente la interacción fuerte-electrodébil y la gravitación. Es decir, se trata de conseguir la **gravitación cuántica**. Para ello, prosiguiendo el paralelismo con anteriores unificaciones, sería preciso convertir bosones en fermiones y viceversa. Sin embargo, como se puede comprobar del examen de las tablas 5.3 y 5.4, no existe una correspondencia entre bosones y fermiones elementales como existe dentro de las mismas generaciones de cuark y leptones, y que permiten su intercambio mediante la unificación fuerte-electrodébil. Entonces se hace necesario postular todo un conjunto de nuevas partículas, tanto bosones como fermiones, que permitan definir una simetría entre ambos. Esta simetría se denomina **supersimetría**[15], y las nuevas partículas se denominan **supersimétricas**[16]. A cada fermión le corresponde un bosón supersimétrico que se denomina con una «S» añadida delante del nombre del fermión, y a cada bosón le corresponde un fermión supersimétrico que se nombra con la misma raíz del bosón pero con la terminación «ino» (tabla 5.6):

Bosón	Espín	Fermión supersimétrico	Espín	Fermión	Espín	Bosón supersimétrico	Espín
Gravitón	2	Gravitino	3/2	Cuark	$^1/_2$	Scuark	0
Fotón	1	Fotino	$^1/_2$	Electrón	$^1/_2$	Selectrón	0
Gluón	1	Gluino	$^1/_2$	Muón	$^1/_2$	Smuon	0
$W^{\pm}$	1	Wino$^{\pm}$	$^1/_2$	Tauón	$^1/_2$	Stauon	0
Z^0	1	Zino	$^1/_2$	Neutrino	$^1/_2$	Sneutrino	0
Higgs	0	Higgsino	$^1/_2$				

Tabla 5.6 Correspondencia de partículas supersimétricas.

[14] Acrónimo inglés de *Theory of Everything* o teoría de todo. Como sustantivo significa dedo del pie.

[15] También abreviada como «SUSY» en inglés.

[16] El papel del neutralino como integrante de la materia oscura no bariónica ya se mencionó en el capítulo primero.

Ninguna de estas nuevas partículas postuladas ha sido observada, y se supone que esta unificación ocurriría a una energía de 10^{19} GeV. La dificultad inherente a este tipo de teorías de superunificación radica en la imposibilidad de renormalizar[17] las ecuaciones que describen las interacciones en cuatro dimensiones. La adición de seis o más dimensiones adicionales sí permitiría la **renormalización**. Estas dimensiones extra, o bien se hallan compactadas de manera que solamente se perciben las cuatro dimensiones que conocemos (**compactación de Kaluza-Klein**), o bien nuestro universo se limita a una membrana o **brana** tridimensional en un universo de 10 o más dimensiones (**mundobrana**[18]). Ello sería debido a que las partículas de las que nos componemos, los bariones, están confinadas a esta brana. En este modelo, las partículas serían cuerdas con distintos modos de vibración, de las que nuestra brana solamente nos permite percibir la sección. Debido a la necesidad de postular partículas supersimétricas y de representarlas como cuerdas en universos de mayor número de dimensiones, a estas teorías se las acostumbra a denominar de **supercuerdas**. Las cinco teorías existentes de supercuerdas se consideran distintos límites de una teoría subyacente común denominada **teoría M**.

<table>
<tr><td>Caída de graves</td><td rowspan="2">Gravitación de Newton</td><td colspan="3" rowspan="2">Relatividad general de Einstein</td><td rowspan="8">SÚPER UNIFICACIÓN</td></tr>
<tr><td>Órbitas de planetas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Geometría del espacio-tiempo</td></tr>
<tr><td>Electrostática</td><td rowspan="3">Electrodinámica de Maxwell</td><td rowspan="3">Electrodinámica cuántica</td><td rowspan="4">Modelo electrodébil de Salam-Weinberg</td><td rowspan="5">GUT</td></tr>
<tr><td>Magnetismo</td></tr>
<tr><td>Propagación de la luz</td></tr>
<tr><td>Interacción débiles</td><td colspan="2">Modelo de Fermi</td></tr>
<tr><td>Interacción fuerte</td><td colspan="3">Cromodinámica cuántica</td></tr>
</table>

Tabla 5.7 Representación esquemática de las unificaciones en física. La gran unificación (GUT) y la súper unificación no están establecidas todavía.

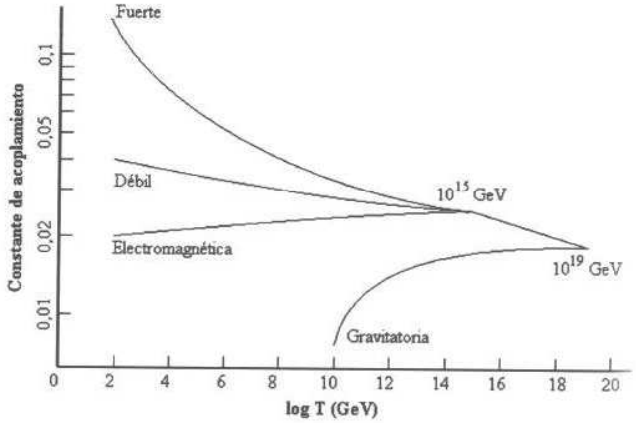
5.2.7 La expansión y la pérdida de unificación

Todas las teorías de unificación de interacciones implican que, cuando la temperatura del equilibrio térmico desciende por debajo de una cierta temperatura crítica, las interacciones se separan: las fuerzas adquieren alcances e intensidades distintos

[17] Herramienta matemática que permite eliminar singularidades al calcular valores medios, amplitudes de probabilidad, niveles de energía, etc. Intuitivamente consiste en sustraer dos infinitos para obtener un valor finito.

[18] Del inglés *brane world* que designa a este tipo de teorías.

(figura 5.1). La consecuencia inmediata de la aplicación a la cosmología es que las distintas fuerzas se unificaban en las primeras etapas del universo, cuando éste se hallaba en equilibrio térmico a alta temperatura[19]. Al descender la temperatura debido a la expansión (1.24), las distintas interacciones se van haciendo sucesivamente distinguibles. Como ya se ha señalado, en cada separación de una interacción el universo pierde simetría al evolucionar, pasa de un estado simétrico (interacciones unificadas) a otro menos simétrico (interacciones separadas): se produce lo que se denomina una **transición de fase con rotura espontánea de simetría**. A continuación se introducirán algunas ideas someras acerca del formalismo que permite abordar las transiciones de fase, y que será útil para estudiar estas transiciones que se producen en el universo primordial. Es preciso señalar que, a fin de no exceder de los límites de extensión y de nivel del texto, se ha seguido un planteamiento poco riguroso, recurriendo a algunas simplificaciones que, aunque introducen inexactitudes, mantienen el sentido general del proceso.



ıra 5.1 Predicción de la variación os factores de acoplamiento ecto a la temperatura. A energías de GeV la interacción fuerte, romagnética y débil tiene la misma nsidad, lo que es indicativo de que energía requerida para una cación GUT. A energías mayores, nos 10^{19} GeV, se espera que además avitación también adquiera la na intensidad y dé lugar a la súper cación.

5.3 Transiciones de fase

5.3.1 Definición y ejemplos

Se dice que un sistema experimenta una transición de fase cuando pasa de un estado con un grado de simetría a otro de distinto grado de simetría.

Cuando la transición de fase se produce hacia un estado menos simétrico se dice que la transición de fase tiene lugar con **rotura de simetría**. Dicha rotura puede ser **espontánea**, no causada por agentes externos, o **inducida**. La temperatura a la cual se produce la transición de fase se denomina **temperatura crítica** T_C. En la

[19] Más adelante y también en el siguiente capítulo se justificará la existencia de equilibrio térmico en un universo en expansión.

física de la materia condensada las transiciones de fase vienen gobernadas macroscópicamente por un **parámetro de orden** ϕ. El valor $\phi = 0$ corresponde al estado de máxima simetría y mínimo orden, $\phi \neq 0$ corresponde al estado menos simétrico, más ordenado. La transición de fase no se produce en todo el sistema simultáneamente, existen regiones donde se produce en primer lugar. Estas regiones, que se denominan **dominios**, tienen un tamaño característico que se denomina **longitud de correlación** ξ, y que evoluciona con el tiempo.

En su aplicación al universo, al bajar la temperatura debido a la expansión, donde antes había una única interacción, ahora se distinguen dos: se ha perdido simetría, aunque se ha ganado orden. El proceso puede asimilarse a la transición de fase del agua al congelarse: en estado líquido el agua es más simétrica y menos ordenada, cada molécula de agua se halla rodeada de otras en todas direcciones y a la misma distancia media. Al congelarse, en cambio, las moléculas ocupan nodos de una red cristalina. Se ha ganado en orden pero se ha perdido simetría: las moléculas situadas en direcciones distintas se hallan a distancias distintas. Otro posible ejemplo es el de las sustancias ferromagnéticas: por encima del punto de Curie, los imanes pierden su imanación. En este caso, la imanación es el parámetro de orden y el tamaño de los dominios magnéticos la longitud de correlación. Por debajo del punto de Curie, los dominios magnéticos de un imán están alineados: se ha ganado en orden, pero se ha perdido en simetría rotacional.

5.3.2 Física de las transiciones de fase

En la física de la materia condensada un sistema puede describirse por su energía libre F,

$$F = U - TS, \tag{5.5}$$

donde U es la energía interna, T la temperatura y S la entropía. Los estados de equilibrio del sistema vendrán descritos por los mínimos de F, si es que éstos existen. La energía libre coincide con la energía interna solamente cuando la temperatura es nula. Si no, cualquiera que sea la energía interna, un aumento de entropía se traduce en una disminución de la energía libre. En un sistema que experimenta una transición de fase, la energía libre será función no sólo de la temperatura sino también del parámetro de orden, $F(\phi, T)$.

En física de partículas, las transiciones de fase asociadas a la pérdida de unificación de interacciones están gobernadas por un campo escalar ϕ, el **campo de Higgs**, que actúa como parámetro de orden, y por su potencial efectivo[20] correspondiente $V(\phi)$ que hace las veces de F.

[20] Es decir, promediado con respecto las variaciones cuánticas del campo ϕ.

La masa M_{Higgs} del **bosón de Higgs**, asociado al campo del mismo nombre, es proporcional al módulo del campo antes y después de la transición de fase, lo mismo que la masa $m_{\text{portadores}}$ de los bosones portadores de las interacciones cuya unificación se pierde,

$$M_{\text{Higgs}} \propto |\phi|$$
$$m_{\text{portadores}} \propto |\phi|. \tag{5.6}$$

Por este motivo, el campo de Higgs actúa de parámetro de orden: antes de la transición de fase $\phi = 0$ y el bosón de Higgs y los portadores tienen masa nula. Después de la transición de fase $\phi \neq 0$, y el bosón de Higgs ha adquirido masa y le ha dado masa a los bosones portadores de la interacción que se separa, con la consiguiente ruptura de la simetría, y separación de las interacciones. De manera sucinta, este proceso constituye el **mecanismo de Higgs** (Higgs 1964). Como se verá más adelante, no todas las transiciones de fase de la física de partículas ocurren mediante este mecanismo.

Consideremos que el campo ϕ tiene N grados de libertad internos reales ϕ_1, ..., ϕ_N, donde el número de grados es el necesario para romper la simetría y dependerá de cuál sea la transición considerada. El campo ϕ vendrá representado por

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Si el campo ϕ ha de definir un escalar que es la energía potencial efectiva V, ésta será una función del módulo de ϕ donde

$$|\phi|^2 = \phi^{\mathrm{T}}\phi, \tag{5.8}$$

siendo ϕ^{T} el vector transpuesto de (5.7).

Un desarrollo en serie de V con respecto el módulo del valor esperado de potencias de ϕ (es decir, $|<\phi^n>|$), para tener en cuenta variaciones cuánticas del campo[21], en un entorno de $\phi = 0$ hasta la cuarta potencia[22] permite obtener el potencial efectivo,

$$V(\phi,T) \approx V_0 + \alpha|\phi|^2 + \beta|\phi|^3 + \gamma|\phi|^4, \tag{5.9}$$

[21] El procedimiento es más complejo y distinto del mencionado aquí, pero las conclusiones que finalmente se obtienen son parecidas.

[22] El término $|\phi|^4$, que puede interpretarse como una auto-interacción, es la máxima potencia del campo compatible con la renormalización. Por este motivo el desarrollo se detiene en la cuarta potencia del campo.

donde la dependencia con la temperatura está expresada mediante los coeficientes del desarrollo. Es decir: $\alpha(T)$, $\beta(T)$ y $\gamma(T)$, donde la dependencia vendrá establecida por la física de partículas. La ecuación (5.9) representa el potencial efectivo más general, con auto-interacción y renormalizable, del campo ϕ. No existe un término lineal en el módulo del campo, debido a que el valor esperado del campo es nulo. Ello implica que el potencial (5.9) tendrá un número máximo de tres extremos, de los cuales al menos uno será en $\phi = 0$.

Cualquier sistema tenderá al mínimo de potencial para encontrarse en equilibrio. Como los parámetros α, β, γ de (5.9) dependen de la temperatura, los extremos de (5.9) dependen de la temperatura. Por tanto, los mínimos del potencial dependerán de la temperatura. En consecuencia, dependiendo de los parámetros α, β, γ, un sistema que antes de la rotura de simetría tuviera su mínimo de potencial en $\phi = 0$, después de la rotura podría tener el mínimo en $\phi \neq 0$, mientras que $\phi = 0$ ya no representaría un mínimo, aunque seguirá siendo un extremo, puesto que el potencial (5.9) siempre tendrá un extremo en $\phi = 0$. Entonces el sistema puede evolucionar desde $\phi = 0$ hasta el nuevo mínimo en $\phi \neq 0$, con ruptura de la simetría. Visto *a posteriori*, esta es la gracia de que (5.9) no tenga término lineal con el módulo del campo.

5.3.3 Rotura de la simetría

Prescindiendo de los valores que la física de partículas pueda dar a los coeficientes de (5.9), en este apartado se jugará un poco con las posibilidades de dicha ecuación, para ilustrar los distintos casos que puede originar.

Caso $\beta = 0$

En este caso, el potencial (5.9) adopta la forma

$$V(\phi,T) \approx V_0 + \alpha|\phi|^2 + \gamma|\phi|^4 \tag{5.10}$$

que presenta extremos en la solución trivial $\phi = 0$, y en,

$$|\phi| = \sqrt{\frac{-\alpha}{2\gamma}} \tag{5.11}$$

Por consiguiente, según los valores de α y γ existirá solamente la solución trivial o además otra solución. Sin embargo, α y γ dependen de la temperatura, por lo que el número de extremos de (5.10) dependerá de la temperatura.

Por ejemplo, bastaría con considerar una dependencia del tipo $\alpha = a(T-T_C)/T_C$ y $\gamma = c[(T-T_C)/T_C]^2$, con a y $c > 0$. Cuando $T > T_C$ solamente existe la solución trivial, que además es un mínimo, y cuando $T < T_C$ la solución trivial es un máximo

relativo y existe otra solución (5.11) que es un mínimo (figura 5.2). Además, este mínimo es nulo si $V_0 = a^2/4c$ (ejercicio 5.5).

En el caso de que una transición de fase de estas características tuviera lugar en el universo, cuando $T > T_C$ existiría un mínimo en $\phi = 0$, que corresponde al estado de máxima simetría, y el sistema se encuentra en equilibrio. Cuando a medida que el universo se expande la temperatura baja por debajo de la temperatura crítica $T < T_C$, el mínimo en $\phi = 0$ se convierte en máximo y el sistema evoluciona suavemente hacia el mínimo en $\phi \neq 0$ dado por (5.11) rompiendo la simetría (figura 5.2) cuando por el mecanismo de Higgs los bosones portadores adquieren masa. Ha tenido lugar una **transición de fase** denominada **de segundo orden.**

Caso $\beta \neq 0$

En este caso, el potencial (5.9) presenta extremos en la solución trivial $\phi = 0$, y en

$$|\phi| = -\left(\frac{3\beta}{8\gamma}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{3\beta}{8\gamma}\right)^2 - \frac{\alpha}{2\gamma}}. \qquad (5.12)$$

Es decir: pueden existir más extremos que en el caso anterior, dependiendo de los valores de los coeficientes α, β, γ. Por ejemplo, el potencial

$$V(\phi,T) \approx V_0 + T^2|\phi|^2 - |\phi|^3 + |\phi|^4 \qquad (5.13)$$

presenta dos temperaturas críticas (ejercicio 5.6). Cuando la temperatura es elevada, el potencial es parabólico y solamente presenta un mínimo en $\phi = 0$. Cuando llega a la primera temperatura crítica, aparece otro mínimo en $\phi \neq 0$ (figura 5.2), que llega a convertirse en el mínimo verdadero, mientras que el extremo en $\phi = 0$ sigue siendo un mínimo pero ha aparecido un máximo entre ambos mínimos (figura 5.2), **una barrera de potencial,** que impide que el sistema evolucione hacia el mínimo absoluto. Es decir: de las dos posibles soluciones de (5.12), una es un mínimo y otra un máximo si el potencial es de la forma (5.13) o similar (ejercicio 5.6).

Si una transición de fase de estas características tuviera lugar en el universo, la barrera de potencial impediría que se produjera la transición de fase de forma inmediata al descender la temperatura, debido a la expansión, por debajo de la temperatura crítica. En este caso el universo no ha cambiado de estado, sigue en $\phi = 0$, pero aunque se encuentra en un mínimo del potencial, no se encuentra en el potencial mínimo, por tanto se dice que está en un **falso vacío** (figura 5.2). Al continuar la expansión la temperatura sigue disminuyendo y el potencial sigue cambiando pero no se produce la transición de fase. Se dice que el universo está sobreenfriado, por analogía con lo que ocurre cuando en determinadas condiciones se enfría el agua por debajo del punto de congelación sin que cambie de estado, permaneciendo líquida.

Existe entonces un **calor latente** (figura 5.2). Dependiendo de los valores de los coeficientes de (5.9), la barrera de potencial o bien desaparece al seguir disminuyendo la temperatura, convirtiendo $\phi = 0$ en un máximo, o bien se produce la transición de fase por efecto túnel. Entonces el sistema evoluciona rápidamente al estado de mínimo de potencial en $\phi \neq 0$ dado por una de las soluciones de (5.12), el llamado **vacío verdadero,** en un cambio repentino de fase, que se denomina **transición de fase de primer orden,** que liberará el calor latente **recalentando** el universo.

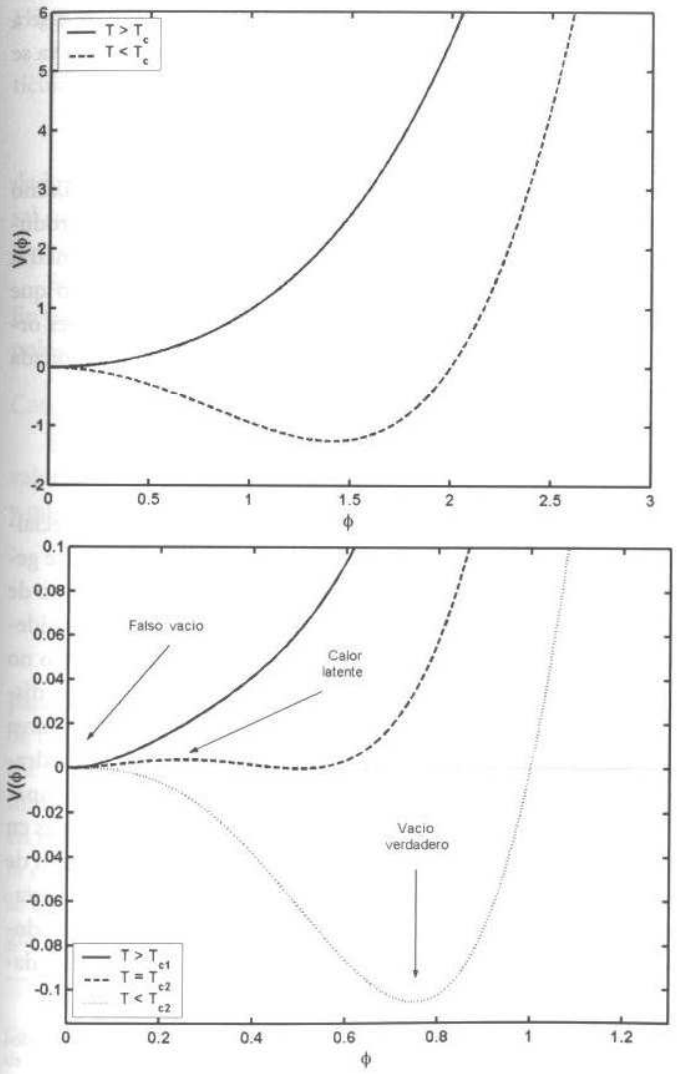


Figura 5.2 Arriba: potencial correspondiente a una transición de segundo orden. Abajo: potencial correspondiente a una transición de primer orden.

5.3.4 Tipos de transiciones de fase

Por tanto, las transiciones de fase pueden clasificarse de acuerdo con la velocidad a la que tienen lugar.

Transiciones de fase de primer orden

En las transiciones de fase de primer orden el potencial presenta un mínimo local en $\phi = 0$. Éstas son transiciones en que el campo varía de forma brusca, como el caso de la ebullición del agua, involucran **calor latente** y la transición de fase a menudo tiene lugar mediante **producción de burbujas**. Dentro de la burbuja ya se ha producido la transición de fase, mientras que fuera no.

Transiciones de fase de segundo orden

En las transiciones de fase de segundo orden el potencial presenta un máximo local en $\phi = 0$. En este caso, el campo varía de forma continua mientras se produce la transición de fase. Los modelos *más simples* de rotura espontánea de simetría por el mecanismo de Higgs producen transiciones de segundo orden dado que consideran $\beta = 0$. Como se tratará en (5.5) se precisa una transición de primer orden para explicar la asimetría materia-antimateria del universo actual mencionada en el capítulo primero, lo que requiere modelos más elaborados.

5.3.5 Defectos topológicos

Las transiciones de fase, tanto de primer como de segundo orden, son especialmente propensas a generar lo que se denominan **defectos topológicos**. Éstos se generan en las zonas de contacto de dominios contiguos en los cuales el parámetro de orden toma valores distintos según una cierta configuración geométrica. Consideremos por ejemplo la superficie de un lago que empieza a congelarse[23]. El hielo no se forma simultáneamente sobre toda la superficie de forma homogénea. En distintas zonas (dominios), el agua empieza a congelarse antes. En un caso ideal el área de estos dominios es inicialmente del mismo orden (aproximadamente el cuadrado de la longitud de correlación inicial), y va creciendo con el tiempo hasta ocupar toda la superficie del lago. Sin embargo, a menudo se observan discontinuidades en el hielo en donde los distintos dominios han entrado en contacto en su proceso de crecimiento. Estas discontinuidades obedecen a que en cada dominio la red cristalina tiene una orientación espacial que no tiene por qué ser la misma que la del dominio contiguo. Se denominan «defectos» porque corresponden a discontinuidades en la estructura cristalina, y son «topológicos» porque implican carencias de simetría espacial.

Para que existan defectos topológicos es necesario, por tanto, que exista una múltiple valuación del parámetro de orden (o sea, que la transición de fase pueda conducir a valores distintos del parámetro de orden en cada dominio), que en física de partículas viene representado por el campo de Higgs. En este apartado se presentará breve y someramente el **mecanismo de Kibble** (1980) de generación de defectos topológicos en el universo mediante la múltiple valuación del campo de Higgs cuando se rompe la simetría.

En el universo la longitud de correlación será del orden del horizonte de partículas en el momento de la transición de fase,

$$\xi \approx H_{\mathrm{P}} \tag{5.14}$$

dado que zonas separadas por distancias mayores no han estado en contacto causal con anterioridad y no tienen por qué adoptar el mismo valor final del campo ϕ después de la transición de fase.

Se consideran distintos casos según el número de parámetros de orden de (5.7). En tres dimensiones espaciales solamente puede haber cuatro clases de defectos topológicos[24].

Caso $N = 1$

En este caso el campo es real. Por debajo de la temperatura crítica existen dos valores (5.12) simétricos del campo que hacen mínimo el potencial cuando $T<T_{\mathrm{C}}$ y que son equiprobables:

$$\phi_{\mathrm{min}} = \pm\left[\left(\frac{3\beta}{8\gamma}\right) + \sqrt{\left(\frac{3\beta}{8\gamma}\right)^2 - \frac{\alpha}{2\gamma}}\right] \tag{5.15}$$

para un potencial del tipo (5.13) o similar (ejercicio 5.6). Después de la transición de fase, distintos dominios adoptarán valores distintos del campo, de forma aleatoria. Unos adoptarán el valor positivo del campo y otros el negativo (5.15). Estos dominios, que inicialmente tendrán un tamaño del orden del horizonte de partículas en el momento de la transición de fase, terminarán entrando en contacto debido a la expansión. Cuando el valor de ϕ de dos dominios en contacto no sea el mismo, se creará un **defecto topológico** bidimensional consistente en una barrera de energía que separará un dominio de otro y que se denomina **pared de dominios** (figu-

[23] Este bonito ejemplo es de Gangui (2003). Desafortunadamente (¿?) en nuestro país no todos pueden observar este fenómeno, pero es bonito e ilustrativo.

[24] Se invita al lector a reflexionar sobre esta afirmación al terminar la lectura de este apartado. Como indicación baste señalar que en dos dimensiones espaciales solamente podrían existir tres tipos de defectos topológicos (ejercicio 5.7).

ra 5.3). Ello es debido a que en esa frontera que separa ambos dominios el campo ϕ variará del valor que hace mínimo el potencial al otro valor en una distancia δ que es el espesor de la pared. Es decir: dentro de esa longitud δ el campo pasará forzosamente por el valor $\phi = 0$, que después de la transición de fase corresponde a un máximo del potencial.

A medida que continúa la expansión, como la energía de esta barrera depende del área de contacto, la energía de las paredes crecerá como a^2, al crecer la zona en contacto de ambos dominios en esa proporción. Como el volumen propio aumenta como a^3, la densidad de energía de las paredes de dominio decrecerá como a^{-1}, es decir, que su ecuación de estado será $w = -2/3$ según (2.78).

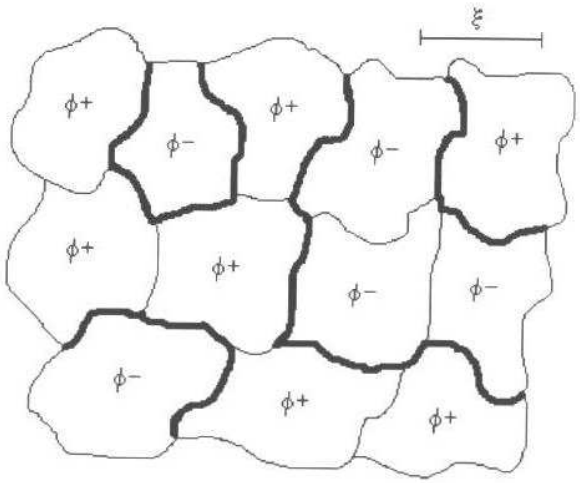


Figura 5.3 Defectos topológicos: paredes de dominios que separan valores positivos y negativos del mínimo del potencial dados por (5.15), en una representación bidimensional.

Caso $N=2$

En este caso el campo escalar es complejo. El valor del campo ϕ_{min} que según (5.12) hace mínimo el potencial cuando $T<T_C$ verificará,

$$|\phi_{min}|^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2, \tag{5.16}$$

que es la ecuación de un círculo de radio $|\phi_{min}|$ en el denominado plano de Argand definido por el plano (ϕ_1, ϕ_2). Entonces existirá un conjunto de pares de valores (ϕ_1, ϕ_2) que definen un círculo y para los cuales el potencial es mínimo porque verifican (5.16). El potencial tiene entonces la forma de un sombrero mexicano (figura 5.4). Cuando $T<T_C$ el universo evolucionará desde $\phi = 0$ hasta el mínimo $\phi \neq 0$ dado por (5.16), produciéndose la transición de fase, y liberando el calor latente si la transición es de primer orden. Sin embargo, aunque el módulo de ϕ_{min} está definido por (5.16), no así la fase: el universo puede alcanzar el valor del campo que hace mínimo el potencial en cualquier fase. Es decir, cualquiera de los pares (ϕ_1, ϕ_2) que verifican (5.16) es equiprobable. Después de la transición de fase distintos dominios habrán adoptado valores distintos de la fase.

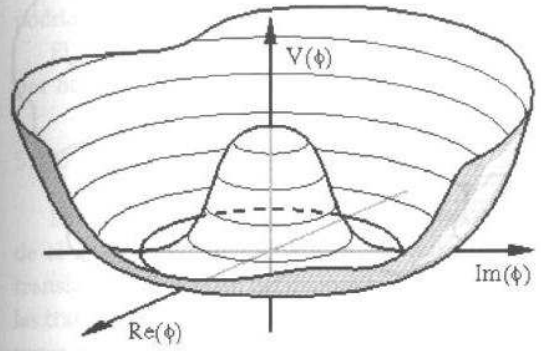


Figura 5.4 Mínimos del potencial en un potencial de la forma (5.9), correspondiente a un campo complejo.

Cuando los dominios en expansión entren en contacto, en la zona de contacto el campo variará de un valor de la fase a otro, de forma continua[25]. Entonces puede producirse una situación en la que, al recorrer distintos dominios describiendo un círculo en el espacio de radio del orden o menor que la longitud de correlación, la fase del campo de los dominios que se atraviesen varíe en un múltiplo de 2π (figura 5.5). En este caso existe un círculo que atraviesa dichos dominios y cuyo radio no puede hacerse cada vez menor hasta llegar a anularse, puesto que rodea un punto situado en su centro en el cual el campo toma el valor $\phi = 0$, que después de la transición de fase corresponde a un máximo del potencial. Por tanto, ese círculo rodea un defecto topológico unidimensional que se denomina **cuerda cósmica** (que no tiene relación con la teoría de cuerdas), que contiene una energía por unidad de longitud que corresponde a la diferencia de potencial de la transición de fase. Se puede pasar de un dominio al contiguo, pero no se puede atravesar la arista que contiene la cuerda sin vencer la barrera de potencial de la figura 5.4. La figura 5.5 representa la sección de dichas cuerdas, que se extienden, perpendicularmente al papel, a lo largo de las aristas de contacto de los dominios, y que siguen trayectorias curvilíneas en el espacio.

Por un razonamiento análogo al caso de las paredes de dominio, como la energía de las cuerdas crecerá como a al aumentar la zona de contacto de los dominios en el mismo factor, mientras que el volumen propio aumenta como a^3, la densidad de energía de las cuerdas decrecerá como a^{-2}, es decir, que su ecuación de estado será $w = -1/3$, según (2.78).

[25] En caso contrario, si el campo fuera discontinuo, el gradiente del potencial divergiría.

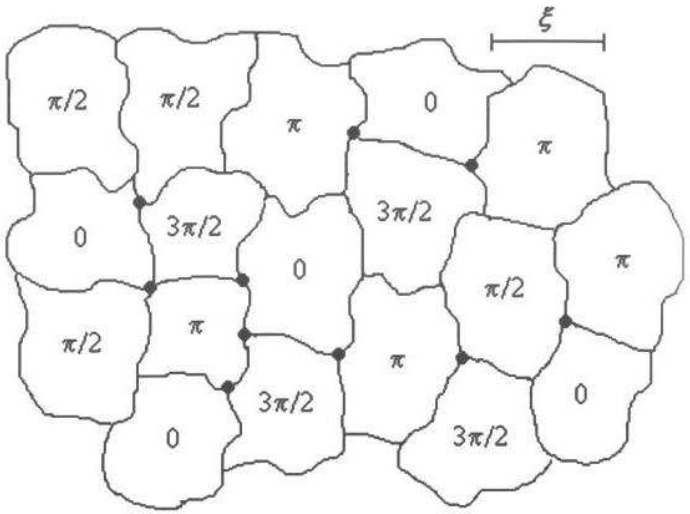


Figura 5.5 Defectos topológicos: Representación bidimensional de cuerdas generadas en zonas de contacto de distintos dominios que presentan fases ordenadas del mínimo del potencial en un múltiplo de 2π al recorrerlos en cualquier sentido. Se han elegido arbitrariamente múltiplos de $\pi/2$ para los valores del campo en cada dominio. Las cuerdas son perpendiculares al plano de la figura. Nótese que no se generan cuerdas en las aristas de todos los dominios: depende de la variación del campo en la trayectoria seguida (ejercicio 5.8).

Caso $N=3$

Siguiendo un razonamiento paralelo, en este caso el valor del campo que hace mínimo el potencial define, en el espacio (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3), el lugar geométrico de una esfera centrada en el origen, como se deduce de añadir un grado de libertad adicional a la ecuación (5.16). Al producirse la transición de fase, todas las direcciones del espacio (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) son equiprobables para evolucionar hacia el mínimo de potencial rompiendo la simetría. Si al recorrer distintos dominios sobre una misma esfera de radio del orden o menor que la longitud de correlación, varía la fase definida por el vector tridimensional (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) en un múltiplo de 2π, existirá una esfera cuyo radio no puede llegar a anularse, puesto que en ese caso la trayectoria recorrida atravesaría el valor $\phi = 0$, que después de la transición de fase corresponde a un máximo del potencial. Por tanto esta esfera encierra en su centro un defecto topológico puntual llamado **monopolo**. Su densidad de energía variará como a^{-3} y por tanto su ecuación de estado será la misma que la de la materia pulverulenta.

Caso $N=4$

En este caso los defectos topológicos que se generan se denominan **texturas**. Los valores de los campos que hacen mínimo el potencial después de la transición de fase definen una esfera en cuatro dimensiones. Todas las direcciones del espacio $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ son equiprobables para evolucionar hacia el mínimo de potencial rompiendo la simetría. Las texturas aparecen cuando la fase del vector 4-dimensional del campo $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ varía en π al desplazarse hasta el infinito.

Caso $N>4$

Esta multivaluación no genera defectos topológicos en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Ello es debido al mayor número de campos que de dimensiones. En efecto, consideremos $N = 3$ en un universo de dos dimensiones espaciales: aunque al describir una trayectoria circular de radio del orden de la longitud de correlación, las fases determinadas por dos de los campos variasen como un múltiplo de 2π, el tercer campo podría cambiar de valor libremente, lo que impediría la formación de un monopolo.

El mecanismo de Kibble genera, por tanto, del orden de un defecto topológico por horizonte en el momento de la transición de fase.

5.3.6 Transiciones de fase cosmológicas

La siguiente tabla resume las transiciones de fase en el universo primordial, desde el instante inicial hasta la última transición denominada cuark-hadrón. Esta transición marca el fin del denominado universo primordial que, al englobar todas las transiciones de fase que han tenido lugar hasta ahora, también se denomina **universo de las transiciones de fase**.

Transición y época que termina	Temperatura de la transición	Tipo de transición	Edad del universo en la transición	Fenómeno que tiene lugar
Planck	10^{19} GeV	–	10^{-44} s	Diferenciación de la gravedad
GUT	10^{15} GeV	Primer orden	10^{-36} s	Diferenciación de la fuerza fuerte
Electrodébil	100 GeV	Primer orden	10^{-10} s	Diferenciación interacción débil
Cuark-hadrón	0.2 GeV	¿Primer orden?	10^{-5} s	Confinamiento de los cuarks

Tabla 5.8 Transiciones de fase en el universo primordial. La edad correspondiente se calcula mediante la aproximación indicada en el texto. Las transiciones GUT y electrodébil se producen mediante el mecanismo de Higgs. Se desconoce el mecanismo de rotura de la supersimetría. No está establecido si la transición cuark-hadrón es de primer o de segundo orden. Incluso se conjetura que podría no tratarse de una transición de fase.

Cada una de estas transiciones marca el fin de una época denominada con el nombre de la transición, salvo en el caso de la transición cuark-hadrón, que marca el fin de la época cuark y el inicio de la época hadrónica.

Las edades de la tabla 5.8 pueden calcularse aproximadamente (ejercicio 5.9) a partir de la segunda ecuación de Fridman (2.88) para un universo de curvatura nula dominado por radiación, sabiendo que se verifica la ley de Stefan-Boltzmann (1.23) y que $T \propto a^{-1}$ (1.24),

$$t = \sqrt{\frac{3c^2}{32\pi G\sigma}}\frac{1}{T^2} = 1.71\times10^{-6}\left(\frac{1\ \text{GeV}}{T}\right)^2 \text{ s.} \qquad (5.17)$$

Las transiciones GUT y electrodébil, que tienen lugar mediante el mecanismo de Higgs, serán, por tanto, candidatas a generar defectos topológicos por el mecanismo de Kibble. La energía que encierran los defectos topológicos se manifestaría por su efecto gravitatorio. Las texturas no constituyen un defecto topológico grave. Tampoco las cuerdas puesto que éstas se autodestruyen con el tiempo mediante la formación de bucles o radiando su energía, e incluso pueden ser «beneficiosas», contribuyendo a la formación de estructuras. Sin embargo, monopolos y paredes de dominios son indestructibles[26], y prácticamente todas las teorías GUT generan monopolos[27]. Como se demostrará más adelante (5.8.7), uno de los problemas del modelo estándar es la excesiva densidad de monopolos que implica.

En los siguientes apartados se pasará una somera revista a las distintas épocas que marcan estas transiciones de fase y a los procesos que en ellas tienen lugar.

5.4 La época de Planck

Inicio: 0 s

Final: 4×10^{-44} s

Composición: Espuma cuántica 10-dimensional de microagujeros negros con masas del orden de la masa de Planck.

Descripción: Dominio de la superunificación. La época termina cuando se separa la gravitación de las demás interacciones.

Dado que la física que permitiría estudiar los primeros instantes del universo, la súper-unificación, además de ser compleja no se encuentra bien establecida en la actualidad, no es posible abordar de manera simple ni rigurosa lo que sucedió entonces. Por estos motivos, textos básicos como el presente suelen cubrir estos instantes con un piadoso velo, desarrollando la historia del universo a partir del punto en el que el conocimiento bien fundamentado de la física se supone que permite abordar con más precisión los procesos que pudieron tener lugar en él. En algunos textos incluso se prescinde del universo primordial y se aborda directamente el temprano. Como ya ha habido ocasión sobrada de comprobar, en este texto se ha preferido, por completitud, pero también para despertar el interés del lector, prescindir de tan prudente medida intentando proporcionar una explicación cualitativa.

La época de Planck se define como la que se desarrolla desde el origen de tiempos cosmológicos hasta el momento en que se separa la interacción gravitatoria y se pierde la súper-unificación.

Durante la época de Planck nos encontraremos, por tanto, en el reinado de las teorías de supercuerdas. Según éstas, a partir de la Gran Explosión el universo se expande desde el instante inicial hasta el tiempo de Planck, pero no se puede considerar que exista espacio ni tiempo, al menos tal y como los conocemos. El tiempo no está definido, y el espacio está compactado (como se justifica más adelante). La teoría de cuerdas postula que el universo tenía 10 dimensiones durante la época de Planck, que se colapsan en cuatro al finalizar dicha época.

Cualitativamente, cuando termina la época de Planck en un instante de tiempo cosmológico t_P podemos considerar válidos los modelos macroscópicos del capítulo tercero basados en la relatividad general. En ese momento, el universo puede considerarse dominado por radiación[28] y de curvatura nula, y tiene un horizonte de partículas (4.3.2) que, en unidades físicas, puede escribirse, según (4.89),

$$H_P = 2\,ct_P \equiv 2\,l_P \qquad (5.18)$$

donde l_P designa la longitud de Planck.

El volumen V_P definido por dicho horizonte será, por tanto,

$$V_P = \frac{4\pi}{3}H_P^3 = \frac{32\pi}{3}c^3t_P^3 \qquad (5.19)$$

al ser la curvatura nula.

La densidad de energía dentro del horizonte en unidades físicas será,

$$\rho_P = \frac{3c^2}{32\pi Gt_P^2} \qquad (5.20)$$

como puede demostrarse fácilmente a partir de la densidad crítica (2.92), puesto que al ser despreciable la curvatura la densidad es la crítica, y de la expresión (3.31) aplicada al instante $t = t_P$.

[26] Salvo que la pared de dominios sea cerrada: su tensión provoca su colapso.

[27] Existe un teorema general de 't Hooft y Polyakov que demuestra que se formarán monopolos en la mayor parte de roturas espontáneas de teorías no-abelianas como las simetrías gauge que utiliza la física de partículas.

[28] Por este motivo, dado que no puede decirse que en la época de Planck el universo esté dominado por radiación, sino que este calificativo solamente puede aplicarse propiamente al final de la época de Planck y por tanto inicio de la época GUT, puede ser aceptable elevar la época de Planck a la categoría de era, mientras que la era de radiación empezaría en la época GUT. Sin embargo, en aras de la simplicidad y teniendo en cuenta la ignorancia que encierra la época de Planck, se mantendrá la clasificación inicial (tabla 5.1).

Los efectos cuánticos empezarán a dejar de ser significativos (es decir, terminará la época de Planck) en el límite de la relación de indeterminación energía-tiempo. Para un sistema físico (el universo), el producto de la indeterminación de la energía (E_P) y el intervalo de tiempo característico de evolución del mismo (t_P) deben ser tales que se satisfaga la relación

$$E_P t_P \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{5.21}$$

Considerando que $E_P = \rho_P V_P$, tomando la igualdad en (5.21), teniendo en cuenta (5.19) y (5.20),

$$t_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{2c^5}} = 3.8\times10^{-44}\,\text{s} \tag{5.22}$$

y, por tanto, de (5.19) y (5.20) resulta,

$$E_P = \rho_P V_P = \frac{c^5}{G} t_P = 8.6\times10^{18}\ \text{GeV}. \tag{5.23}$$

Sin embargo, puede demostrarse fácilmente que el tamaño del horizonte (5.18) es precisamente el radio de Schwarzschild del universo (ejercicio 5.10). En consecuencia, según (5.18), durante esta época el universo contendría una espuma cuántica 10-dimensional de micro agujeros negros de, por lo menos, la masa de Planck m_P en continua creación y destrucción, de tal manera que no se viole el principio de indeterminación energía-tiempo. A partir de las ecuaciones (5.19) y (5.20), se obtiene

$$m_P = \frac{\rho_P V_P}{c^2} = \frac{c^3 t_P}{G} = 1.5\times10^{-8}\,\text{kg}. \tag{5.24}$$

La longitud de Planck, que puede estimarse a partir de (5.18) y (5.22),

$$l_P = ct_P = 1.1\times10^{-35}\text{m}, \tag{5.25}$$

es mucho menor que el tamaño de un núcleo atómico y representa, según se deduce de las anteriores ecuaciones, la **longitud de escala de las fluctuaciones cuánticas de la geometría espacio-tiempo del universo**. La longitud de Planck (5.25) es la longitud de la compactación de las dimensiones adicionales, de ahí la afirmación de que en la época de Planck el espacio está compactado.

5.5 La época GUT

Inicio: 4×10^{-44} s

Final[29]**:** 10^{-36} s

Composición: Materia GUT

Descripción: Dominio de la gran unificación. Termina con la separación de la fuerza fuerte.

Al principio de esta época se genera el espacio-tiempo por descompactación de las tres dimensiones espaciales actuales, y la gravitación se separa de la fuerza combinada fuerte-electrodébil.

En los instantes inmediatamente posteriores a la época de Planck, muchos de los mini agujeros negros sobreviven como reliquias, constituyendo por tanto los primeros entes que existieron en el universo. En efecto, estas numerosas singularidades cuyos horizontes de sucesos se solapan impiden la existencia de materia, fotones o incluso de causalidad.

Sin embargo, estos mini agujeros negros emiten partículas mediante el mecanismo de radiación de Hawking de manera muy eficaz. En un tiempo

$$\tau \approx 3\times10^{-18} m_P^3\,\text{s} = 1\times10^{-41}\,\text{s} \tag{5.26}$$

toda la masa m_P, expresada en kg, es radiada en forma de partículas con una temperatura

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k m_P} \approx 8.2\times10^{30}\,\text{K} \tag{5.27}$$

donde k es la constante de Boltzmann.

La alta densidad existente producirá un número de colisiones entre las partículas que será mucho mayor que el tiempo característico de la expansión, por lo que, a pesar de la misma, **las partículas se hallarán en equilibrio termodinámico,** como se demostrará y estudiará en el siguiente capítulo. En efecto, el número de colisiones de pares de partículas por unidad de volumen será proporcional a la densidad al cuadrado, es decir a a^{-6}, mientras que en un universo dominado por radiación el tiempo es proporcional a a^{-2}, donde a es el olvidado factor de escala, que en esta época tiene un valor muy reducido.

Entonces, puesto que la fuerza fuerte y la electrodébil están unificadas, como ya se ha discutido en (5.2.5), **las partículas que componen el universo constituyen**

[29] Estimado utilizando la aproximación (5.17).

una materia GUT indiferenciada que en el futuro se diferenciará, con la rotura de la simetría GUT, para dar lugar a la llamada materia leptónica y a la materia cuark.

Al final de esta época se supone que tiene lugar un proceso muy importante: la llamada **bariosíntesis** o también **bariogénesis**. Las leyes de conservación que se verifican en el universo actual implican que en cualquier proceso de creación de materia se deben generar tantas partículas como antipartículas. Como ya se ha mencionado en el capítulo primero (1.7.3), a la alta temperatura de las primeras épocas del universo, las reacciones de creación-aniquilación de pares de partículas como la (1.25), se hallan en equilibrio. Al disminuir la temperatura del universo debido a la expansión, los fotones ya no tienen suficiente energía para generar pares partícula-antipartícula y los pares existentes se van aniquilando paulatina y sucesivamente para dar fotones. Si la cantidad de partículas fuera exactamente igual a la de antipartículas, el universo habría terminado reducido solamente a fotones. Sin embargo, es un hecho que en él existe materia, y no hay indicios de que existan procesos de aniquilación materia-antimateria en el universo actual (apartado 1.9). Por consiguiente es preciso que de alguna manera se produjera una asimetría que se estima del orden de 10^{-10}, es decir, **existían $10^{10}+1$ partículas por cada 10^{10} antipartículas**. El mecanismo que causa esta asimetría se desconoce, pero **se supone que se genera durante la época GUT,** porque durante esta época la unificación de las interacciones provoca que los leptones sean indistinguibles de los cuarks y por tanto, como ya se ha enunciado en (5.2.5), tengan lugar procesos que no conservan el número bariónico. A. Sajárov[30] demostró en 1967 que **para obtener una asimetría materia-antimateria *a partir de un estado inicialmente simétrico* eran necesarias tres condiciones:**

- **Violación de la conservación del número bariónico *B*.** Es necesaria para explicar la asimetría observada en el universo actual entre bariones y antibariones: las estructuras que se observan son bariónicas. Como ya se ha indicado, *B* no se conserva en las reacciones de la época GUT.
- **Violación de la simetría CP** (carga-paridad). Si no existiera esta violación, las partículas y las antipartículas se comportarían de la misma manera en las reacciones y no podría generarse una asimetría. En efecto, a un proceso que violase la conservación del número bariónico generando bariones podría hacérsele corresponder otro proceso que generase antibariones a la misma velocidad, provocando un efecto neto nulo[31]. Esta violación se ha observado en algunas interacciones eletrodébiles.

[30] Búsquese en la bibliografía como Sakharov, de acuerdo con la transcripción habitual del ruso al inglés.

[31] Es decir: las reacciones antileptón → cuark, leptón → anticuark ocurrirían con la misma velocidad.

- **Desviaciones del equilibrio termodinámico.** Las violaciones del número bariónico *B* y de la simetría CP deben ocurrir fuera del equilibrio termodinámico. La razón es que se considera que la simetría CPT (T indica reversibilidad de las reacciones con respecto al tiempo) es exacta en el equilibrio termodinámico. Entonces una distribución en equilibrio termodinámico tendría un número bariónico nulo (mismo número de bariones que de antibariones), y continuaría con dicho valor del número bariónico aunque se produjeran violaciones *B* y CP[32]. En el modelo de la Gran Explosión la disminución de temperatura en un universo en expansión produce una rotura espontánea de la simetría GUT que puede explicarse mediante una transición de fase de primer orden, fenómeno que constituye una desviación del equilibrio termodinámico. La sola expansión del universo no es suficiente para generar una desviación del equilibrio termodinámico, como se demostrará en el capítulo siguiente.

Estas tres condiciones se dan en el momento de la rotura de simetría GUT, por lo que entonces es cuando se supone que tiene lugar la bariogénesis[33].

Es conveniente señalar que las reacciones que violan la conservación de *B* en la época GUT producen un **exceso de leptones con respecto los antileptones del mismo orden que la asimetría de los bariones**, aunque inicialmente el universo sea leptón-simétrico[34].

Esta época termina con la rotura de simetría entre la fuerza fuerte y la electrodébil mediante una transición de fase de primer orden basada en el mecanismo de Higgs, que proporciona masa a los bosones *X* distinguiéndolos de las demás partículas portadoras. **Esta transición crea defectos topológicos en forma de monopolos**. La longitud de correlación es menor que el horizonte de partículas, pero no todas las intersecciones de dominios contendrán monopolos. Se prevé que se genere aproximadamente un monopolo por cada 10 dominios conexos. Esta alta densidad de monopolos genera un problema adicional a los ya existentes en el modelo estándar y que se revisarán más adelante en este mismo capítulo (5.8.7).

[32] Es decir: las reacciones antileptón ↔ cuark, leptón ↔anticuark se hallarían siempre en equilibrio. Entonces, aunque su velocidad fuera distinta (se violase la simetría CP), no se generaría un número neto de bariones.

[33] Algunos autores consideran que la bariogénesis tuvo lugar en la rotura electrodébil: existen procesos electrodébiles a alta temperatura que no conservan el número bariónico, lo cual cumple la primera condición de Sajárov (la segunda ya se ha mencionado que se cumple en la época electrodébil) y finalmente una transición electrodébil de primer orden originaría una desviación del equilibrio termodinámico, cumpliendo la tercera condición de Sajárov.

[34] Como se deduce fácilmente de las reacciones del tipo antileptón → cuark, leptón → anticuark ya mencionadas.

5.6 La época electrodébil

Inicio: 10^{-36} s
Final[35]: 10^{-10} s
Composición: Materia leptónica y materia cuark
Descripción: Dominio de la unificación electrodébil. La época termina con la separación de las interacciones electromagnética y débil.

En esta época ya existe una asimetría materia-antimateria. La fuerza fuerte se ha separado pero la interacción electromagnética y la fuerza débil están unificadas, lo que implica que según se ha discutido en (5.2.4), **las partículas que componen el universo constituyen materia leptónica y materia cuark indiferenciada** que en el futuro, al final de esta época, se diferenciará y dará lugar y dotará de masa a los distintos leptones y cuarks que se conocen en la actualidad. Este proceso ocurre debido a una **transición de fase de primer orden producida mediante el mecanismo de Higgs que rompe la simetría entre la fuerza débil y el electromagnetismo.**

5.7 La época cuark

Inicio: 10^{-10} s
Final: 2.5×10^{-5} s
Composición: Plasma cuark-gluon y leptones
Descripción: La época termina con el confinamiento de los cuarks para formar hadrones.

Cuando termina la transición electrodébil y principia la época cuark ya todas las interacciones están separadas y las partículas tienen masa y siguen la clasificación dada en las tablas 5.3, 5.4 y 5.5. Sin embargo, debido a la alta energía del universo, los cuarks no están confinados formando hadrones. **El universo se compone de la mezcla,** de propiedades inciertas, **de un plasma cuark-gluon y leptones.** La razón intuitiva de que pueda existir un plasma cuark-gluon a pesar de que la fuerza fuerte impide que existan cuarks libres es que en esta época la densidad de hadrones es tan alta que los pobres cuarks no saben en que hadrón deberían están confinados. Los últimos experimentos parecen indicar que el plasma cuark-gluón se comporta como un fluido casi ideal de viscosidad sorprendentemente baja, lo que se interpretaría como formado por un gas de casi-partículas fuertemente interactivas (Shuryak, 2004).

[35] Estimado utilizando la aproximación (5.17).

Al final de la época cuark, la energía baja por debajo del umbral que permite la existencia del plasma cuark-gluón, y los cuarks y gluones se confinan formando hadrones. La interacción fuerte pierde entonces su predominio en el universo. Los hadrones más masivos así formados se desintegran rápidamente, en pocos microsegundos, produciendo nucleones o leptones, pero esta historia ya pertenece al universo temprano, que es el objeto del capítulo siguiente.

Como ya se ha mencionado, no está establecido si la transición cuark-hadrón es de primer o segundo orden. Si fuera de primer orden, podría generar una serie de importantes consecuencias:

- Las burbujas hadrónicas que se formarían en una transición de primer orden producirían heterogeneidades en la razón de neutrones a protones a una escala determinada por la distancia típica entre burbujas. Si esta distancia fuera mayor que la longitud de difusión de protones y neutrones, existirían **heterogeneidades en la nucleosíntesis primordial** (que se analizará en el siguiente capítulo) que modificarían las abundancias de los elementos ligeros.
- Formación de «**pepitas**» **de cuarks**[36] formadas por ternas de cuarks u, d y s que, de no evaporarse un segundo después de la transición de fase, también afectarían a la razón de neutrones a protones y modificarían la abundancia de ^{4}He. Incluso se ha especulado que estas pepitas de cuarks podrían formar parte de la materia oscura fría.
- La transición ocurriría a presión constante, lo cual eliminaría la generación de ondas de presión que contrarresten la atracción gravitatoria, y permitiría la formación de **agujeros negros primordiales** del orden de una masa solar, que seguirían existiendo en la actualidad (ejercicio 5.11). Alternativamente, podrían intensificarse las aglomeraciones de materia oscura fría.

Sin embargo, la ecuación de estado del plasma cuark-gluón es demasiado poco conocida como para poder afirmar que una transición de primer orden realmente pudiera generar estas consecuencias.

5.8 Problemas del modelo estándar

En capítulos anteriores se ha podido comprobar que el modelo estándar permite explicar satisfactoriamente, al menos de manera cualitativa, el desplazamiento al rojo como una expansión del universo, la radiación cósmica de fondo por un equilibrio materia-radiación causado por etapas a mayor temperatura, las abun-

[36] Del inglés *cuark nuggets*.

dancias de elementos ligeros mediante la nucleosíntesis primordial, la asimetría materia-antimateria como debida a una transición de fase con rotura de simetría, y las luminosidades de supernovas Ia a distancias cosmológicas mediante la energía oscura.

El modelo estándar no es un modelo exento de problemas, aunque en el proceso seguido a lo largo de este texto hasta el momento, así lo parezca. Ya se ha topado con uno muy importante sobre el que se ha pasado de puntillas: el modelo estándar no permite explicar los primeros instantes del universo debido a la falta de una teoría cuántica de la gravitación. Hay otros problemas a los que se pasará revista en este apartado y que no se han abordado antes, debido a que uno de los temas más espinosos es el de la abundancia de monopolos, problema que solamente ahora podemos plantear, una vez conocido que los monopolos son defectos topológicos que pueden ser generados en una transición de fase. Haber esperado hasta este instante permite estudiar conjuntamente todos los problemas sin que queden dispersos en el texto, a costa de haber inducido a pensar al lector que el modelo cosmológico estándar era, nunca mejor dicho, la panacea universal.

5.8.1 El inicio de la expansión

Acorde con lo visto en el capítulo segundo, las ecuaciones de Fridman no permiten un universo estático (apartado 2.6.1). Sin embargo, no hay ninguna causa por la que el universo deba expandirse (ejercicio 3.29). Es decir: las ecuaciones de Fridman indican que si empieza a expandirse, continuará en expansión, que posteriormente podrá revertirse o no. Después del análisis de los primeros capítulos, el lector habrá comprobado que las ecuaciones de Fridman representan conceptualmente las ecuaciones, algo peculiares eso sí, del movimiento de un objeto. Un análogo mecánico puede consistir en el disparo de una bala de cañón. Si se proporciona su posición y velocidad en un instante dado, por ejemplo el instante inicial, seremos capaces de predecir su trayectoria, pero las ecuaciones no indican cómo se produjo el disparo, o sea, de qué manera se le imprimió la velocidad inicial. Se supone que la solución reside en una teoría de la gravitación cuántica, y que el universo empezó como una fluctuación cuántica espontánea.

5.8.2 El valor de la constante cosmológica

El valor de la densidad de energía de la constante cosmológica puede calcularse conocido su parámetro de densidad y el valor de la constante de Hubble,

$$\rho_\Lambda = \Omega_{\Lambda 0}\rho_{c0} = \frac{3H_0^2c^2\Omega_{\Lambda 0}}{8\pi G} = 3.1\ \text{GeV m}^{-3} \qquad (5.28)$$

donde se ha tenido en cuenta que para recuperar las unidades físicas de la densidad crítica hay que multiplicar por c^2/G y que las observaciones indican que $\Omega_{\Lambda 0} \approx 0.70$. Esta densidad se relaciona con la constante cosmológica a través de la ecuación (2.79): $\Lambda = 8\pi\rho_\Lambda$.

Las teorías gauge predicen que en cada rotura de simetría la densidad de energía del vacío disminuye en

$$\Delta\rho_i \approx \frac{E_i^4}{(\hbar c)^3} \qquad (5.29)$$

en unidades físicas, donde E_i es la energía a la que ocurre la transición de fase i con rotura de simetría. Por ejemplo, en la rotura de la súper-unificación E_i es la energía de Planck (5.23) y sustituyendo en (5.29) se obtiene $\Delta\rho_P \approx 7.1\times10^{122}$ GeV/m^3. Para la transición GUT $\Delta\rho_{GUT} \approx 1.3\times10^{107}$ GeV/m^3. Esta energía se invierte en crear partículas y recalentar el universo.

No hay, sin embargo, ningún principio de la física que exija que tras una transición de fase con rotura de simetría, el verdadero vacío corresponda al cero de energía. El valor residual representa, de ahí la denominación, una **energía del vacío**, es decir, una densidad de energía constante, que contribuye a la densidad total de energía del universo.

La densidad de energía del vacío en la actualidad se obtendría de restar a la densidad de energía del vacío en la época de Planck, que es del orden de $\Delta\rho_P$ más una constante, todas las posteriores disminuciones de energía de cada transición de fase hasta la época actual,

$$\rho_v(t_0) = \rho_v(t_P) - \sum_i \Delta\rho_i . \qquad (5.30)$$

Si la densidad de energía de constante cosmológica ρ_Λ de (5.28) ha de ser igual a la densidad de energía del vacío en la época actual $\rho_v(t_0)$ de (5.30),

$$\rho_v(t_P) = \rho_\Lambda + \sum_i \Delta\rho_i \approx (10^{-123}+1)\sum_i \Delta\rho_i . \qquad (5.31)$$

En consecuencia, para conseguir que tras todas las transiciones la densidad de energía del vacío verdadero fuera igual a la densidad de energía oscura observada (5.28), sería preciso que la densidad de energía del vacío en la época de Planck no difiriera de la suma de las disminuciones de densidades de energía del vacío en las transiciones posteriores en 123 cifras decimales, lo que implica un ajuste extraordinariamente preciso de los parámetros del potencial (5.9). Eso es cierto incluso si se admite que la constante cosmológica es nula. Es lo que en física se denomina un **problema de ajuste fino**. El problema del ajuste fino del valor de la constante cosmológica es, posiblemente, uno de los más graves de la cosmología.

Otra manera de enfocar el problema es suponiendo que la energía del vacío procede de las partículas virtuales que se crean en todo punto del espacio por el principio de incertidumbre energía-tiempo. Si consideramos que las partículas tienen una masa media $<m_v>$ y se hallan separadas por la longitud Compton $\hbar/\langle m_v\rangle c$,

$$\rho_v \approx \frac{\langle m_v\rangle^4 c^5}{\hbar^3} \tag{5.32}$$

en unidades físicas. Si se impone que la densidad de energía de la constante cosmológica (5.28) sea igual a la densidad de energía del vacío dada por (5.32), se obtiene $<m_v>\approx 2.2\times10^{-3}$ eV$\approx 4.3\times10^{-9} m_e$, que es un valor excesivamente pequeño para la masa media de un conjunto de partículas que pueden abarcar todo el rango de masas.

Por tanto, los indicios disponibles (las observaciones de SNIa, como vimos en el primer capítulo) apoyan la existencia de una aceleración compatible con una constante cosmológica. Sin embargo, dicha constante es muchos órdenes de magnitud menor de lo esperado si se interpreta como una energía del vacío. Una posible solución puede ser invocar el principio antrópico débil: se observa un valor tan reducido porque únicamente valores tan reducidos permiten el desarrollo de vida inteligente (ejercicio 8.22). Alternativamente: algo falla en las teorías actuales y el desarrollo completo de una teoría cuántica de la gravedad suministrará una explicación satisfactoria. En estas circunstancias, **la existencia de una constante cosmológica o una quintaesencia como ecuaciones de estado de la energía oscura que acelera el universo se basará solamente en las observaciones.**

5.8.3 La formación de estructuras

Sabemos que las estructuras que se observan debieron empezar a generarse mediante inestabilidad gravitatoria de perturbaciones primordiales de la densidad. Debido al equilibrio radiación-materia, las anisotropías observadas en la superficie de último esparcimiento de la radiación de fondo (capítulo primero), que son del orden de $\Delta T/T \approx 10^{-5}$, serán del mismo orden que las anisotropías de la distribución de materia en ese momento y en esa superficie. Estas anisotropías de la radiación de fondo reflejan, por tanto, las heterogeneidades que por inestabilidad gravitatoria dieron lugar a las estructuras de materia que hoy día observamos en el universo.

Sin embargo, si estas anisotropías fueran fluctuaciones estadísticas de la densidad de materia, deberían ser mucho menores, y no habrían podido generar las estructuras observadas. En efecto, un volumen que abarque del orden de una masa solar contiene unos 10^{57} átomos de hidrógeno. Una fluctuación estadística de la masa contenida en ese volumen sería, por tanto, del orden de 10^{-29}, y masas mayores generarían fluctuaciones menores. **¿Cuál fue entonces la causa de esas perturbaciones iniciales?**

5.8.4 La edad del universo

En el capítulo segundo (apartado 2.6.8) se demostró que en un universo desacelerado el inverso de la constante de Hubble marca una cota superior a la edad del universo, mientras que en un universo acelerado supone una cota inferior. Nuestro universo fue primero desacelerado durante la mayor parte del tiempo y sólo acelerado hace relativamente poco. En estas circunstancias, el inverso de la constante de Hubble sigue siendo una cota superior, como se demostró en el capítulo tercero, en el apartado 3.8.4. En este mismo apartado se puso de manifiesto la incompatibilidad existente entre las edades de los cúmulos globulares y el valor de la constante de Hubble deducido por el proyecto clave del telescopio espacial HST, salvo que se aceptara que la energía oscura tiene una ecuación de estado de energía fantasma (Cepa, 2004). Sin embargo, este tipo de ecuaciones de estado no tiene un potencial estable y genera problemas de causalidad.

Cabe concluir, por tanto, que **el conflicto de edades representado por el valor de la constante de Hubble y las edades de cúmulos globulares no ha sido todavía resuelto de forma enteramente satisfactoria.** Éste es el motivo por el que en el presente texto se ha supuesto un valor de H_0=65 km/s/Mpc y no el de 72 km/s/Mpc deducido por el proyecto clave del HST, que parece adolecer de errores sistemáticos.

5.8.5 El ajuste fino de la densidad o el problema de la planitud

De la segunda ecuación de Fridman (2.88), teniendo en cuenta que (2.92) permite expresar H^2 en función de la densidad crítica y a partir de la definición de densidad adimensional (2.93), puede escribirse (ejercicio 5.12),

$$\rho a^2\left(1-\Omega^{-1}\right)=\frac{3\varepsilon}{8\pi}. \tag{5.33}$$

Como el signo de la curvatura es constante tenemos que, igualando (5.33) para dos instantes de tiempo de los cuales uno de ellos es el actual, teniendo en cuenta la expresión de la densidad de energía en función del factor de escala (2.78) cuando domina una única ecuación de estado w^i, resulta:

$$\frac{1-\Omega^{-1}}{1-\Omega_0^{-1}}=\frac{\rho_0 a_0^2}{\rho a^2}=\left(\frac{a_0}{a}\right)^{2-3(1+w^i)}. \tag{5.34}$$

Si aplicamos (5.34) al límite en el cual la relatividad puede considerarse válida, esto es, el fin de la época de Planck, y consideramos que en el universo ha dominado primero la radiación, luego la materia no relativista, y finalmente la constante

cosmológica, puede estimarse (5.34) factorizándolo como el producto de cocientes para cada ecuación de estado dominante (ejercicio 5.12),

$$\frac{1-\Omega_P^{-1}}{1-\Omega_0^{-1}} \approx \left(\frac{a_0}{a_\Lambda}\right)^2_{w=-1} \left(\frac{a_\Lambda}{a_{eq}}\right)^{-1}_{w=0} \left(\frac{a_{eq}}{a_P}\right)^{-2}_{w=1/3} = \frac{a_0^2 a_P^2}{a_\Lambda^3 a_{eq}}, \qquad (5.35)$$

donde a_{eq} y a_Λ son los valores del factor de escala en el instante en que las densidades de energía de la materia no relativista y la radiación eran iguales y las densidades de energía de la materia no relativista y de constante cosmológica eran iguales, respectivamente.

La ecuación anterior (5.35) puede expresarse en función de la temperatura de los fotones de la radiación de fondo, sabiendo que $T = T_0\,(1+z)$ como se infiere de (1.24),

$$\frac{1-\Omega_P^{-1}}{1-\Omega_0^{-1}} \approx \frac{T_0^2}{T_P^2}(1+z_\Lambda)^3(1+z_{eq}) \approx 3.9\times 10^{-60} \qquad (5.36)$$

teniendo en cuenta que $z_\Lambda \approx 0.33$ y $z_{eq} \approx 3000$ (tabla 3.1), $T_0 = 2.73$ K y $T_P \approx 10^{19}$ GeV (5.23).

Si interpretamos (5.36) partiendo de las condiciones iniciales, es decir, del valor de Ω_P requerido para obtener el Ω_0 medido, encontramos que para cualquier valor de $\Omega_0 \neq 1$, Ω_P ha de ser prácticamente la unidad, difiriendo de la misma solamente en la cifra decimal 60. Una pequeña variación de Ω_P en dicha cifra decimal causa una variación significativa en Ω_0. Constituye otro **problema de ajuste fino** de las condiciones iniciales. Debido al valor tan cercano a la unidad que se le demanda a Ω_P, también se ha llamado **problema de la planitud**, o de **por qué la curvatura del universo es tan cercana a cero**. Nótese que suponer la curvatura nula no soluciona estos problemas dado que sigue siendo preciso explicar porque la densidad es exactamente igual a la crítica con tanta precisión.

5.8.6 La conectividad causal o el problema del horizonte

En el capítulo primero se estableció que la radiación cósmica de fondo de microondas muestra una isotropía de una parte en 10^5. Es decir, que distintas zonas en el cielo no muestran variaciones de la temperatura del cuerpo negro en más de una cienmilésima de grado. Semejante nivel de isotropía indica que toda la superficie de último esparcimiento que vemos en la actualidad estaba en equilibrio térmico a la misma temperatura cuando se produjo el desacoplamiento. Pero eso implica que en aquel momento toda esa fracción de universo estaba en contacto causal, es decir, dentro del mismo horizonte de partículas. En caso contrario, los fotones de una región no habrían podido interaccionar con la materia de otra, alcanzando el equilibrio térmico a una misma temperatura común. Solamente la materia y la radiación que se encuentren dentro del horizonte de partículas puede hallarse en equilibrio térmico. Dicho de manera más precisa: la escala angular de variación de la temperatura sobre el cielo que se observa en la actualidad, debería ser del orden del tamaño subtendido por el horizonte de partículas en el instante del desacoplamiento de los fotones, puesto que éstos prácticamente no vuelven a interaccionar con la materia.

Procede preguntarse, entonces, cuál era el tamaño del horizonte de partículas en el momento del desacoplamiento. En aquel momento el universo se encontraba dominado por materia no relativista y podía despreciarse la curvatura (apartado 3.8.3). Si se considera que el universo siempre estuvo dominado por materia no relativista hasta ese instante, lo cual no es cierto, pero es una buena aproximación hasta un factor 2 (ejercicio 5.13), tenemos de (4.89) que el horizonte de partículas en el instante del desacoplamiento es

$$H_P(z_{ue}) \approx 3t_{ue} = \frac{3t_0}{(1+z_{ue})^{3/2}} = \frac{2}{H_0(1+z_{ue})^{3/2}} \approx 292 \text{ kpc}, \qquad (5.37)$$

donde z_{ue} designa el desplazamiento al rojo al que se produce el último esparcimiento, que es aproximadamente 1000, t_{ue} indica el tiempo cósmico correspondiente, y la segunda y tercera igualdades vienen de las ecuaciones (3.11) y (3.12), respectivamente, para el caso $w = 0$ y de curvatura nula. Esta distancia subtiende un ángulo θ, que según la ecuación (4.53) viene determinado por (5.37) dividido por la distancia de ángulo a la superficie de último esparcimiento, dada por (4.57) aplicada al caso $w = 0$,

$$\theta = \frac{H_P(z_{ue})}{D_A(z_{ue})} \approx \frac{1}{\sqrt{1+z_{ue}}-1} \approx 1.9^o \qquad (5.38)$$

Nótese que se ha omitido el factor 2 que pasaría del radio definido por el horizonte al diámetro, puesto que la estimación efectuada contiene dicho factor 2. La figura 5.6 resume gráficamente (aunque obviamente no a escala) la situación.

Por tanto, los fotones de una zona que en la actualidad, desde nuestro punto de vista, subtiende dos grados, no habían podido interaccionar con la materia de otra zona disjunta, de dos grados de diámetro. Dado que en primer orden, una vez la radiación de fondo se ha desacoplado de la materia ya no vuelve a interaccionar con ella, ¿a qué es debido que numerosas zonas desconectadas causalmente tengan la misma temperatura? ¿Por condiciones iniciales?

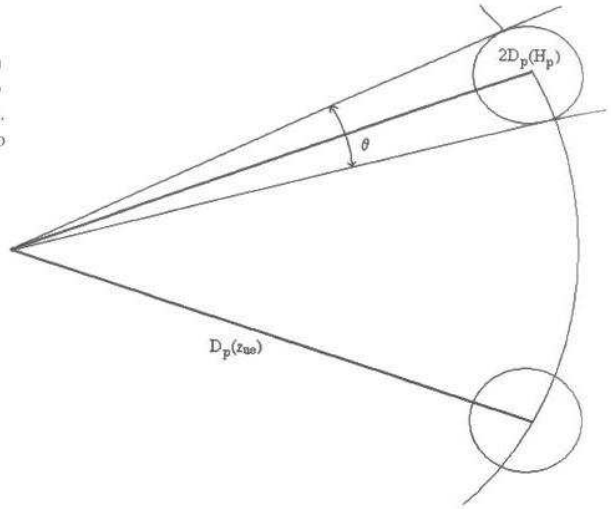


Figura 5.6 Representación esquemática del horizonte de partículas en el momento del desacoplamiento visto desde un observador en la Tierra. El ángulo θ subtendido sobre el cielo por el horizonte de partículas es menor que 2°. La distancia de ángulo a la superficie de último esparcimiento es D_A.

5.8.7 La densidad de monopolos

Tal y como se señaló en 5.5, en la rotura de simetría de la transición GUT, que ocurre en el instante de tiempo cosmológico t_{GUT}, se forma aproximadamente un monopolo por cada $P = 1/10$ horizontes de partículas en el momento de la transición de fase, donde cada monopolo tiene una masa m_M que es equivalente a la energía representada por el calor latente de la transición de fase (figura 5.2) y que es del orden de 10^{15} GeV.

Como en ese momento el universo está dominado por radiación y puede despreciarse la curvatura,

$$\xi < H_p\,(\mathrm{GUT}) = 2\,c\,t_{GUT} \tag{5.39}$$

en unidades físicas.

La densidad de monopolos n_M será, teniendo en cuenta (5.39),

$$n_M \approx P\left(\frac{4\pi}{3}\xi^3\right)^{-1} > P\left(\frac{32\pi}{3}c^3 t_{GUT}^3\right)^{-1} \tag{5.40}$$

Por tanto, la densidad de energía debida a los monopolos en el momento de su formación será

$$\rho_M > \frac{3Pm_M}{32\pi c^3 t_{GUT}^3} \tag{5.41}$$

mientras que la densidad actual será, aplicando (1.24),

$$\rho_{M0} = \frac{\rho_M}{(1+z_{GUT})^3} > \frac{3Pm_M}{32\pi}\left(\frac{T_0}{ct_{GUT}T_{GUT}}\right)^3 \approx 1.4\times10^{12}\ \mathrm{GeV\ m^{-3}} \tag{5.42}$$

puesto que los monopolos siguen una ecuación de estado $w = 0$ y la edad de la transición puede calcularse con (5.17).

Como para H_0=65 km/s/Mpc,

$$\rho_{c0} = 4.5\ \mathrm{GeVm^{-3}} \tag{5.43}$$

entonces,

$$\Omega_{M0} > \frac{\rho_{M0}}{\rho_{c0}} = 3.1\times10^{11} \tag{5.44}$$

valor que es absurdamente alto y habría causado el colapso del universo tiempo atrás (ejercicio 5.14).

5.9 La inflación

El problema de la excesiva densidad de monopolos es el que originalmente dio lugar al modelo inflacionario en 1981 (Guth, 1981a). Los demás problemas se consideraba que serían satisfactoriamente explicados cuando se dispusiera de una teoría de gravitación cuántica. Dicha teoría quizá podría resolver el inicio de la expansión y explicar por qué las condiciones iniciales eran tan isótropas y la curvatura tan cercana a cero. Sin embargo, la gravitación cuántica no permitiría resolver el problema de los monopolos, generados con posterioridad a la época de Planck. En cambio, una expansión suficientemente rápida, o **inflación**, del universo diluiría la densidad de monopolos adecuadamente. Rápidamente se concluyó (Guth, 1981a) que dicha expansión también permitiría explicar los problemas de conectividad causal y ajuste fino.

5.9.1 Definición

Operativamente, la inflación se define como un intervalo de tiempo, de corta duración, ubicado entre el final de la época de Planck y el final de la época electrodébil, durante la cual el universo se expandió exponencialmente aumentando el factor de escala en muchos órdenes de magnitud. Dado que la expansión es exponencial, se dice que el universo sufre o se halla en una **fase de De Sitter**, por analo-

gía a la expansión exponencial que tiene lugar en el universo de De Sitter (3.1.2). Por tanto, la expansión será debida a una energía, que existe solamente durante un corto intervalo de tiempo, y que tiene una ecuación de estado $w = -1$.

En resumen, según el modelo inflacionario el universo evoluciona de la siguiente manera:

- Antes de la inflación, cuando $t<t_i$, donde t_i es el instante en que se inicia la inflación, el universo está dominado por radiación y evoluciona como $a \propto t^{1/2}$
- Durante la inflación el universo está dominado por una energía con una ecuación de estado $w = -1$ y evoluciona como $a = a_i \exp K(t - t_i)$, donde K es suficientemente grande.
- Después de la inflación, cuando $t>t_f$, donde t_f es el instante en que termina la inflación, el universo vuelve a estar dominado por radiación y evoluciona otra vez como $a \propto t^{1/2}$

Trataremos más adelante (5.9.3) acerca del posible origen de esta energía y de los distintos modelos inflacionarios (5.9.4). Por el momento pasaremos revista a la manera como el escenario inflacionario permite solucionar algunos de los problemas del modelo estándar.

5.9.2 Soluciones inflacionarias a algunos de los problemas del modelo estándar

Inicio de la expansión

Si se sitúa la inflación al final de la época de Planck, la inflación permitiría explicar el inicio de la expansión. Con posterioridad a la inflación, el universo se limita a continuar la expansión así iniciada, pero ya dominado por radiación. Esto es, el problema del inicio de la expansión puede resolverse siempre que la causa de la inflación esté suficientemente justificada.

Ajuste fino de la densidad

Si repetimos el proceso de (5.35) añadiendo ahora una etapa inflacionaria,

$$\frac{1-\Omega_P^{-1}}{1-\Omega_0^{-1}} \approx \left(\frac{a_0}{a_\Lambda}\right)^2_{w=-1} \left(\frac{a_\Lambda}{a_{eq}}\right)^{-1}_{w=0} \left(\frac{a_{eq}}{a_f}\right)^{-2}_{w=1/3} \left(\frac{a_f}{a_i}\right)^2_{w=-1} \left(\frac{a_i}{a_P}\right)^{-2}_{w=1/3} =$$
$$= \frac{a_0^2 a_P^2}{a_\Lambda^1 a_{eq}} \left(\frac{a_f}{a_i}\right)^4 = 3.9 \times 10^{-60}\, e^{4K\delta t}, \tag{5.45}$$

donde $\delta t = t_f - t_i$.

Por tanto, si la exponencial de (5.45) es al menos del orden de 10^{60}, el problema del ajuste fino queda resuelto. Si la exponencial de (5.45) es mucho mayor que 10^{60}, como se supone que es el caso, entonces $\Omega_0 = 1$ independientemente del valor inicial de Ω_P. Por este motivo se dice que **el escenario inflacionario predice curvatura nula.**

Conectividad causal o problema del horizonte

El horizonte de partículas (4.87) después de la inflación es,

$$H_p(t_f) = a_f \int_0^{t_f} \frac{dt}{a} = a_f \left(\int_0^{t_i} \frac{dt}{a} + \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a} \right) =$$
$$= \frac{a_f}{a_i} \left(H_p(t_i) + \frac{1 - e^{-K\delta t}}{K} \right) \approx H_p(t_i) \frac{a_f}{a_i} = H_p(t_i) e^{K\delta t}, \tag{5.46}$$

donde la primera integral puede expresarse en función del horizonte de partículas al principio de la inflación dividido por a_i. El término resultante de la segunda integral de (5.46) puede despreciarse frente a $H_p(t_i)$ puesto que la exponencial es prácticamente nula, al menos del orden de 10^{-15} si consideramos el valor requerido para solucionar el problema del ajuste fino, y porque K tendrá un valor muy elevado al ser $K\delta t > \ln 10^{15}$ y δt un intervalo de tiempo muy reducido.

Por consiguiente, puesto que la solución del problema de ajuste fino requiere que la exponencial de (5.46) sea al menos del orden de 10^{15}, el problema del horizonte está resuelto también, puesto que el horizonte habrá crecido, por ese mismo factor, debido a la inflación.

Nótese que para resolver el problema del ajuste fino de la densidad se requiere un valor del producto $K\delta t$ suficientemente grande, mientras que para resolver el problema del horizonte se requiere además un valor de K suficientemente grande. Ello permite que δt sea reducido.

En consecuencia, **para determinar el horizonte de partículas** en un caso general, **será preciso saber si ha existido o no inflación**, el instante de tiempo en que ha tenido lugar, su duración temporal y la dependencia funcional con que ha variado el factor de escala durante la misma.

Formación de estructuras

La existencia de una expansión acelerada en forma de una fase de De Sitter crea un horizonte de sucesos transitorio $H_S = K^{-1}$ según (4.93), que dado el alto valor de K, será muy reducido (ejercicio 5.15). Al igual que en el caso de los horizontes de los agujeros negros, las fluctuaciones cuánticas cerca del horizonte generan radiación de Hawking, sembrando las semillas a partir de las cuales las estructuras pue-

den crecer posteriormente por inestabilidad gravitatoria. En este escenario existirá una relación entre la forma de la inflación y su duración, y el espectro y amplitud de las fluctuaciones observadas en la radiación de fondo.

Hay que señalar que las cuerdas cósmicas constituyen un candidato alternativo a la formación de estructuras.

Densidad de monopolos

Cuando termina la inflación, puesto que según la ecuación (5.46) el horizonte de partículas ha aumentado en al menos $e^{K\delta t}$, la densidad de monopolos se ha reducido en al menos $e^{-3K\delta t}$. Es decir, por al menos un factor 10^{-45}, con lo que de (5.44) resulta $\Omega_{M0} \approx 10^{-33}$.

Es importante señalar que, puesto que la inflación aumenta extraordinariamente el tamaño del horizonte de partículas, y que la longitud de correlación de la transición de fase es del orden del tamaño de dicho horizonte, **la inflación no solamente reducirá la densidad de energía de cualquier defecto topológico creado antes de la inflación, sino también de los que se puedan crear después,** en otras posibles transiciones de fase.

Problemas que la inflación no soluciona

La edad del universo, la problemática existencia de una singularidad inicial o, de otro modo, el origen del universo, y el valor de la constante cosmológica y su origen, son problemas inalterados por el escenario inflacionario.

5.9.3 Dinámica del campo inflacionario

La inflación vendrá provocada, por tanto, por una densidad de energía con una ecuación de estado con $w = -1$. Esta densidad de energía intervendrá en las ecuaciones de Fridman a través de su incorporación en el tensor energía-momento. Una manera de conseguir este tipo de densidades de energía que se comportan como una constante cosmológica es a través de los campos cuánticos. Los campos cuánticos que se barajan en la inflación son los campos escalares. Las razones de esta selección no residen únicamente en que dichos campos sean más simples, sino porque están relativamente inexplorados y porque surgen en el marco de las teorías de unificación, como es el caso del campo escalar de Higgs, responsable de las transiciones GUT y electrodébil. Estos campos se pueden incorporar al tensor energía-momento mediante el cálculo de su densidad lagrangiana y la aplicación del teorema de Noether. En efecto, dado un campo escalar ϕ, en general complejo, su densidad lagrangiana L será

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^* \, \partial^\mu \phi - V(\phi), \tag{5.47}$$

donde el primer término representa la densidad de energía cinética y el segundo la densidad de energía potencial, y donde $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ y $\partial^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$ son las derivadas funcionales. Por ejemplo, en relatividad especial, $\partial_\mu = (\partial/\partial ct, \vec{\nabla})$ y $\partial^\mu = (\partial/\partial ct, -\vec{\nabla})$.

El teorema de Noether establece

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi^* \, \partial^\nu \phi + g^{\mu\nu} L. \tag{5.48}$$

Si el campo ϕ no depende de la posición, como sucedería en un universo homogéneo,

$$\begin{aligned} &\partial^\mu \phi^* \, \partial^\nu \phi = |\dot{\phi}|^2 \text{ cuando } \mu = \nu = 0, \text{ y nulo en todos los demás casos, y} \\ &\partial^\mu \phi^* \, \partial_\mu \phi = |\dot{\phi}|^2 \end{aligned} \tag{5.49}$$

Entonces, es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} T^{00} &= |\dot{\phi}|^2 - \frac{1}{2}|\dot{\phi}|^2 + V \equiv \rho_\phi \\ T^{ii} &= g^{ii} L = \frac{1}{2} g^{ii} |\dot{\phi}|^2 - g^{ii} V \equiv p_\phi g^{ii}, \end{aligned} \tag{5.50}$$

donde se ha realizado la identificación con los términos de densidad y presión del tensor energía-momento de un fluido perfecto, cuyas componentes ya fueron establecidas en el capítulo segundo, por lo que sigue verificándose

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \tag{5.51}$$

donde ahora p y ρ tienen una contribución adicional,

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= \frac{1}{2}|\dot{\phi}|^2 + V \\ p_\phi &= \frac{1}{2}|\dot{\phi}|^2 - V. \end{aligned} \tag{5.52}$$

De (5.52) se deduce que si $\dot{\phi} = 0$, es $p = -\rho$, ecuación de estado que corresponde a una constante cosmológica. Si por el contrario $V = 0$, $p = \rho$, ecuación de estado que corresponde a la de un **campo escalar sin masa,** puesto que en los campos cuánticos simples

$$V = {}^1/_2 \, m|\phi|, \tag{5.53}$$

donde m es la masa del campo en unidades naturales. En general, si $p = w\rho$, aplicando (5.52) puede demostrarse fácilmente que

$$\frac{|\dot{\phi}|^2}{2V}=\frac{1+w}{1-w}\geq 0 \tag{5.54}$$

que ha de ser mayor que cero dado que la densidad de energía potencial ha de ser positiva para que el campo sea estable (sirva de ejemplo el potencial simple (5.53): en este caso, la masa debería ser negativa para que el potencial fuera negativo). La ecuación (5.54) indica que cuando $w>0$, ha de ser $w\leq 1$, mientras que cuando $w<0$, ha de ser $w\geq -1$. Es decir,

$$-1\leq w\leq +1, \tag{5.55}$$

condición que ya se había deducido cualitativamente en el capítulo segundo y que recordemos que no verifica la energía fantasma, para la que no se ha encontrado un campo estable.

Si incorporamos las expresiones para la densidad y presión debidas al campo escalar dadas en (5.52), a las ecuaciones de Fridman (2.87) y (2.88), teniendo en cuenta que en esta etapa del universo domina la radiación sobre las demás formas de energía salvo la inflación, y que la curvatura es despreciable,

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{a}}{a}&=-\frac{8\pi}{3}\left(|\dot{\phi}|^2-V+\rho_r\right)\\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2&=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{|\dot{\phi}|^2}{2}+V+\rho_r\right)\end{aligned} \tag{5.56}$$

Para poder resolver estas ecuaciones es preciso conocer la evolución del campo, es decir, $\dot{\phi}$. Para ello se utilizará la ecuación de Euler-Lagrange de la mecánica aplicada a un universo en expansión,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial(La^3)}{\partial\left(\partial_\mu\phi^{\cdot}\right)}\right)-\frac{\partial(La^3)}{\partial\phi^{\cdot}}=0 \tag{5.57}$$

que se deduce del principio de acción aplicado a la densidad lagrangiana,

$$\delta\int La^3\mathrm{d}^4x^\mu=0 \tag{5.58}$$

donde el factor a^3 surge de la raíz cuadrada del módulo del determinante de la métrica que afecta al elemento de volumen comóvil d^4x^μ, como ya se vio en el capítulo segundo, apartado 2.3.6. Como el campo solamente depende del tiempo y no de la posición, $\partial_\mu\,\phi^{\cdot}=\dot{\phi}^{\cdot}$. Como además (5.47) y la independencia del campo con la posición muestran que L solamente depende de ϕ y de $\dot{\phi}$, que a su vez solamente dependen del tiempo, entonces $\partial/\partial x^\mu\equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}t$, y se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(La^3)}{\partial\dot{\phi}^{\cdot}}-\frac{\partial(La^3)}{\partial\phi^{\cdot}}=0. \tag{5.59}$$

Sustituyendo (5.47) en (5.59) y operando, teniendo en cuenta las dependencias funcionales mencionadas, se obtiene la ecuación de movimiento del campo (ejercicio 5.16),

$$\ddot{\phi}+3H\dot{\phi}+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi^{\cdot}}=0. \tag{5.60}$$

Salvo el segundo término, que representa una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad, el equivalente mecano-clásico de esta ecuación es una ecuación de movimiento con una fuerza $-\left|\mathrm{d}V/\mathrm{d}\phi^{\cdot}\right|$ que representa que el campo ϕ evoluciona hacia el mínimo de potencial de V con respecto ϕ. En ese momento $\left|\mathrm{d}V/\mathrm{d}\phi^{\cdot}\right|=0$ y se anula la fuerza. La ecuación (5.60) se acostumbra a simplificar asumiendo la denominada **aproximación de deslizamiento lento**[37] $\ddot{\phi}\approx 0$. Esta condición es necesaria para que se produzca la inflación: el campo debe evolucionar lentamente, de lo contrario la inflación termina demasiado rápido, sin haber alcanzado una expansión suficientemente elevada. Si se asume una dependencia del potencial con el campo como la dada por (5.53), la ecuación (5.60) representa un movimiento armónico alrededor del mínimo del potencial con respecto el campo ϕ, amortiguado por un término de rozamiento $-3H\dot{\phi}$. La energía disipada por el rozamiento se invierte en crear partículas, lo que eleva la temperatura del universo hasta prácticamente la misma que tenía antes de la inflación[38]. Este proceso se denomina **recalentamiento**.

Si el campo dependiera de la posición, en las ecuaciones (5.52) y (5.60) aparecerían el cuadrado del gradiente y la laplaciana del campo, respectivamente.

La inflación borra las condiciones iniciales de la Gran Explosión: la historia anterior del universo no importa, porque la curvatura que pudiera tener, las partículas que existieran y los defectos topológicos que hubiera prácticamente han desaparecido, diluidos en la gran expansión que ha tenido lugar. **Después de la inflación el universo queda espacialmente euclídeo y el recalentamiento ha producido nuevas partículas**[39]**. Estas nuevas partículas se distribuyen homogénea e isó-**

[37] Del inglés *slow rolling approximation*.

[38] Como se verá en el siguiente capítulo, la densidad de partículas relativistas está relacionada con la temperatura del universo. Las oscilaciones amortiguadas alrededor del falso vacío pueden crear partículas relativistas o bien partículas muy masivas y no relativistas cuya aniquilación generará fotones.

[39] Puede decirse que el recalentamiento constituye el *fiat lux*.

tropamente en todo el horizonte de partículas, porque éste es del mismo orden que la longitud de correlación. Existirán, sin embargo, las fluctuaciones cuánticas en los horizontes de sucesos formados transitoriamente durante la inflación, que se plasman en la anisotropía de la radiación de fondo y que son las semillas de las futuras estructuras que formarán del universo.

5.9.4 Algunos tipos de inflación: de los modelos al escenario

Todos los modelos inflacionarios deberán verificar, por tanto, las siguientes características,

- Expansión exponencial del universo o fase de De Sitter, debido a una densidad de energía constante, o al menos una expansión acelerada superlumínica suficientemente intensa con una ecuación de estado equivalente a $w < -1/3$. De este modo, como ya se ha demostrado, se pueden resolver varios de los problemas del modelo estándar.
- Esta densidad de energía debe ser transitoria, es decir, debe aparecer y desaparecer en un corto intervalo de tiempo[40] situado entre la época de Planck y la transición electrodébil[41].
- Al terminar la inflación se produce un recalentamiento del universo. En caso contrario el universo post-inflación tendría una temperatura y una densidad de energía prácticamente nulas. Como una fase de De Sitter corresponde a una densidad de energía constante, al liberar dicha energía recalentando el universo se vuelve a obtener prácticamente el mismo valor de la temperatura que antes de la inflación.

A continuación se pasará revista brevemente a los principales modelos inflacionarios.

Inflación clásica

Es el primer modelo, propuesto por Guth en 1981 (Guth, 1981b). El campo que provoca la inflación es el de Higgs correspondiente a la transición de fase GUT, que en este modelo se propone que sea de primer orden. En este caso existirá un calor latente, que será el responsable de la inflación. La disipación de este calor latente generará partículas con una asimetría partícula-antipartícula debido a la bariosíntesis. Escuetamente, la secuencia de acontecimientos es la siguiente:

1 **Fase ante-inflacionaria** (figura 5.7a): la temperatura es superior a la temperatura crítica de la transición. Como en el mecanismo de Higgs, el campo actúa como parámetro de orden de la transición, y ésta no se ha producido todavía, el campo es nulo y por tanto también el potencial puesto que se asume (Guth 1981b) $V_0 \approx 0$ en (5.9). No se ha roto la simetría y las fuerzas siguen unificadas. El universo se halla en el mínimo de potencial que corresponde al vacío verdadero. En este caso, las ecuaciones de Fridman (5.56) se reducen a las ecuaciones de un universo dominado por radiación y por tanto[42] $a \propto t^{1/2}$.
2 **Fase inflacionaria** (figura 5.7b): la temperatura es inferior a la temperatura crítica, pero el campo sigue siendo nulo. El universo se halla sobreenfriado en un falso vacío y todavía no se ha producido la transición de fase puesto que el parámetro de orden sigue siendo nulo. Sin embargo, ahora el potencial no es nulo, y es mucho mayor que la densidad de energía de radiación, que puede despreciarse. Si $V(|\phi| = 0) \approx$ cte, entonces las ecuaciones de Fridman (5.56) son las que corresponden al universo de De Sitter y $a \propto \exp(t-t_i)$. El universo experimenta una fase de De Sitter.
3 **Transición de fase** (figura 5.7c): es una fase transitoria durante la cual ni el campo ni el potencial son nulos ni constantes. El universo evoluciona desde el falso vacío hasta el vacío verdadero de una manera descrita por la ecuación (5.60). Se producen oscilaciones amortiguadas del potencial alrededor del vacío verdadero, creando partículas que recalentarán el universo y con una asimetría a favor de las partículas. Nótese que se verifican las tres condiciones de Sajárov, puesto que en una transición de primer orden el universo no se encuentra en equilibrio térmico. La transición de fase GUT, que no se produce hasta que el universo se encuentra estacionario en el vacío verdadero, termina este periodo. El vacío verdadero no tiene por qué corresponder a un cero de energía, generando así una constante cosmológica y dando lugar, por tanto, al problema esbozado en el apartado 5.8.2.
4 **Fase post-inflacionaria** (figura 5.7d): la transición de fase ya se ha producido y se ha roto la simetría. El campo es constante y el potencial yace en un mínimo, las ecuaciones de Fridman (5.56) vuelven a ser las del universo dominado por radiación y se reemprende la expansión $a \propto t^{1/2}$. El universo tiene prácticamente la misma temperatura que tendría si no hubiera sucedido la fase inflacionaria.

[40] En términos absolutos, puesto que si la inflación tiene lugar alrededor de la época GUT, la edad del universo es ese momento es de 10^{-36} s. Una duración de la inflación de 10^{-32} es corta en términos absolutos (por ejemplo, comparada con el periodo de la luz en el dominio espectral óptico que es de unos 10^{-15} s) pero larga en términos de la edad del universo en aquel entonces.

[41] Sería difícil de justificar con posterioridad a la época electrodébil: la física está mejor establecida y probada.

[42] Siempre que las ecuaciones de Fridman sean válidas antes de la inflación. Es decir, siempre que el universo ante-inflacionario se pueda considerar homogéneo e isótropo al menos a una cierta escala, de lo que no existe prueba directa.

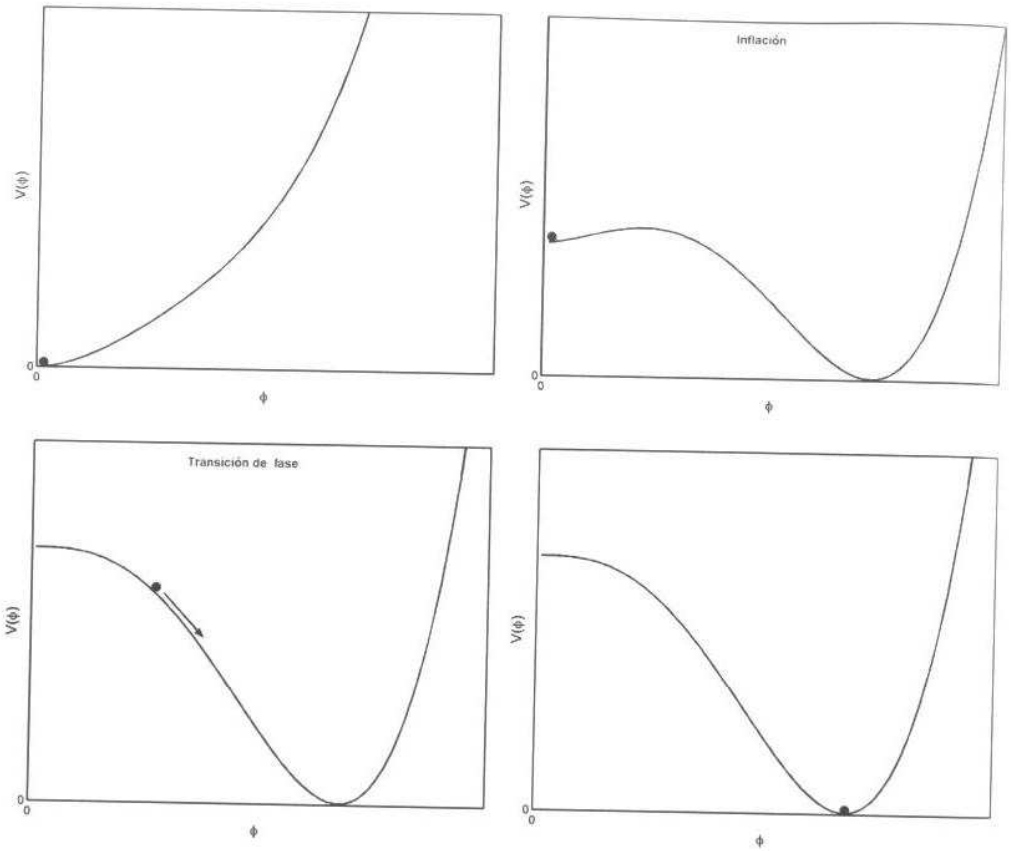


Figura 5.7 Representación de la forma del potencial frente al campo en las distintas fases de la inflación clásica. La posición del universo se halla representada por el punto. Arriba a la izquierda, **fase ante-inflacionaria**: las fuerzas están unificadas, el universo se halla en el mínimo de potencial que corresponde al vacío verdadero y la expansión es la propia de un universo dominado por radiación ($a \propto t^{1/2}$). Arriba a la derecha, **fase inflacionaria**: el universo se halla sobre-enfriado en un falso vacío, todavía no se ha producido la transición de fase y la densidad de energía del campo inflacionario es mucho mayor que la densidad de energía de radiación. El universo se expande exponencialmente. Abajo a la izquierda, **transición de fase**: el universo evoluciona desde el falso vacío hasta el vacío verdadero, produciéndose oscilaciones amortiguadas del potencial alrededor del vacío verdadero que crean partículas que recalientan el universo. Este periodo termina con la transición de fase GUT, que separa las interacciones y que se produce cuando el universo se encuentra estacionario en el vacío verdadero. Abajo a la derecha, **fase post-inflacionaria**: la transición de fase ya se ha producido y se ha roto la simetría. El campo es constante, el potencial adopta un valor mínimo y se reemprende la expansión $a \propto t^{1/2}$. El universo tiene prácticamente la misma temperatura que si no hubiera sucedido la fase inflacionaria. Aunque en la figura al vacío verdadero le corresponde una densidad de energía nula, ello no tiene por qué ser así, pudiendo dar lugar a una constante cosmológica y generando por tanto el problema esbozado en el apartado 5.8.2.

En resumen, Guth (1981b) postuló la inflación y la consiguiente dilución de la densidad de monopolos, convirtiendo la transición de fase GUT en una transición de primer orden mediante el adecuado ajuste de los parámetros de (5.9). La energía del falso vacío del universo sobreenfriado actúa de constante cosmológica transitoria. Sin embargo, este modelo tiene varios problemas graves:

- Al ser una transición de fase de primer orden, se efectúa mediante fluctuaciones cuánticas y se producen «burbujas» en las que el universo ha terminado la inflación y se expande dominado por radiación, mientras que el resto del universo sigue inflándose, con lo que las burbujas no se pondrán en contacto nunca y la inflación proseguirá indefinidamente fuera de las burbujas, que tendrán un bajo factor de llenado. El problema surge porque estas burbujas no son lo suficientemente grandes como para resolver los problemas del modelo estándar.
- Las fluctuaciones térmicas del campo impedirían mantener su valor en $\phi = 0$, por lo que sería difícil conseguir un universo sobreenfriado a no ser que se ajusten adecuadamente los coeficientes de la dependencia del potencial con el campo. Es decir, se crea otro problema de ajuste fino.
- Es difícil conseguir heterogeneidades suficientemente pequeñas, compatibles con las anisotropías observadas en la radiación de fondo, para la generación de las futuras estructuras.

Nueva inflación

Si la inflación durara lo suficiente como para que no fuera necesario que las burbujas inflacionarias se juntaran, sino que cada una de ellas fuera lo suficientemente grande como para resolver los problemas del modelo estándar, se solucionaría la primera limitación del modelo de Guth. Si además la variación del potencial con el campo en el entorno de $\phi = 0$ no fuera tan brusca, se solucionaría la segunda limitación. Un modelo de estas características fue propuesto por Linde y Albrecht y Steinhardt en 1982. Esencialmente, el valor del campo ϕ varía durante la inflación desde ϕ_1 a ϕ_2 conduciendo al universo al verdadero vacío ϕ_0 mientras el potencial permanece casi constante (figura 5.8). La inflación termina cuando el campo evoluciona más allá de ϕ_2 y efectúa oscilaciones amortiguadas alrededor de ϕ_0, creando partículas y recalentando el universo. Es decir: la transición al verdadero vacío no es tan brusca como en el caso del modelo de Guth. Constituiría una transición de fase de primer orden pero débil, o incluso de segundo orden.

Este modelo expande el universo mucho más que el modelo de Guth, pero requiere de un ajuste fino de los parámetros del potencial $V(\phi,T)$, lo cual representa, en cierto sentido, caer en uno de los problemas que se pretende solucionar: el del ajuste fino de la densidad. Al igual que el modelo anterior, tampoco permite crear heterogeneidades suficientemente pequeñas.

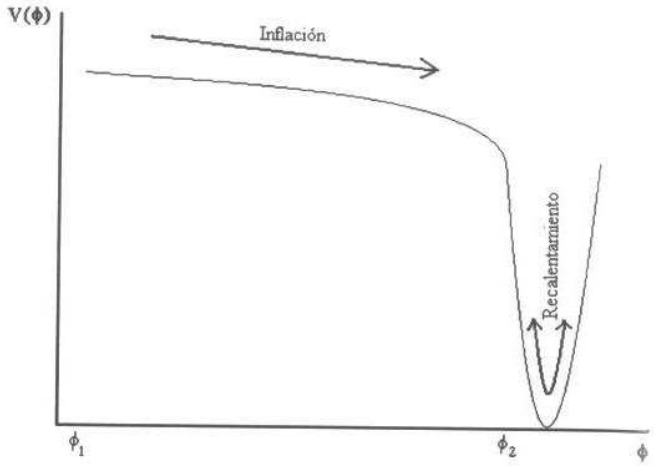


Figura 5.8 Modelo inflacionario «nuevo»: el potencial es prácticamente constante entre ϕ_1 y ϕ_2, actuando como una constante cosmológica y produciendo la inflación. El campo evoluciona gradualmente hacia el valor que hace mínimo el potencial.

El escenario inflacionario y la inflación caótica

Los problemas de los modelos inflacionarios basados en una transición de fase como el de Guth (o sea, las transiciones de primer orden generan burbujas y una expansión insuficiente, las de segundo orden generan problemas de ajuste fino de los parámetros, en cualquier caso es difícil generar heterogeneidades suficientemente pequeñas...) condujeron a su pronto abandono. Sin embargo, el concepto de inflación y la solución que proporciona a multitud de problemas del modelo estándar era demasiado atractivo como para ignorarlo. Por este motivo, el teórico inflacionario adoptó una postura radical: **la inflación** ha de existir puesto que permite resolver multitud de problemas, pero **no está vinculada a una transición de fase.** Es debida a la existencia de un campo escalar denominado **inflatón,** de origen desconocido, cuyas propiedades no se derivan *a priori* de la física de partículas sino de las observaciones cosmológicas. Por este motivo, la inflación constituye en la actualidad un **escenario** más que un modelo. En este escenario la inflación se produjo en algún momento entre el fin de la época de Planck y la transición electrodébil, y el inflatón evolucionaría hacia el mínimo de potencial como en una transición de fase de segundo orden. La gran expansión del horizonte de partículas disminuye la densidad de defectos topológicos creados incluso después de la inflación, al aumentar la longitud de correlación de los campos de unificación.

El escenario inflacionario posiblemente más popular es el de la inflación caótica. Propuesta por Linde en 1983, en este modelo el campo toma valores aleatorios en el espacio. Únicamente sufren la inflación las regiones que tienen valores suficientemente alejados del mínimo. Ni siquiera precisa un potencial constante que

cause una fase de De Sitter: basta con que origine una ecuación de estado con $w < -1/3$. Existen, por tanto, multitud de modelos de inflación caótica, dependiendo del potencial considerado (ejercicio 5.17). El más utilizado quizá sea uno de los más simples[43] (ejercicio 5.18),

$$V(\phi) = \gamma |\phi|^4 , \tag{5.61}$$

que sigue teniendo problemas de ajuste fino: el valor de γ ha de ser del orden de 10^{-15} para poder generar las anisotropías observadas en la radiación de fondo.

En este modelo, por tanto, y debido a fluctuaciones cuánticas del campo, dentro de cada horizonte de partículas el inflatón adquiere un valor $|\phi| \neq 0$ distinto. El universo se expande superlumínicamente en aquellas zonas en que el valor del inflatón es suficiente como para obtener un valor del potencial (5.61) lo bastante elevado. El potencial evoluciona entonces lentamente hacia el mínimo en $|\phi| = 0$, proporcionando en su evolución una densidad de energía que provoca una expansión acelerada. Obsérvese que el potencial (5.61) no depende de la temperatura y por tanto no variará con la expansión.

5.10 Modelos sin inflación: el universo ecpirótico

Para hacer frente a los problemas que arrastra la inflación (ajuste fino y origen del inflatón), surgen modelos que intentan prescindir de ella pero solucionando al menos los mismos problemas que ella. La inflación resuelve algunas dificultades del modelo estándar mediante una expansión acelerada suficientemente prolongada debida a un potencial generado por un campo escalar, pero también podrían resolverse suponiendo que el universo surgió cuando el factor de escala tenía un valor distinto de cero y adecuadamente grande y por tanto a una temperatura suficientemente baja como para que al menos la fuerza fuerte estuviera ya separada y no se generasen monopolos.

Uno de estos modelos constituye el modelo ecpirótico[44] de universo propuesto por Khoury *et al.* (2001) y basado en la teoría de supercuerdas. Como ya se ha enunciado al principio de este capítulo, según esta teoría el universo tiene unas 10 dimensiones y el universo visible es una brana tridimensional de este universo. En el modelo ecpirótico, el choque de dos branas tridimensionales en un universo de más dimensiones espaciales originó nuestro universo tridimensional. Las branas

[43] No se consideran potencias superiores a 4 debido a que no son renormalizables.

[44] Del griego literalmente «nacido del fuego». Sus detractores denominan peyorativamente a este modelo «universo pirotécnico».

eran inicialmente estáticas y vacías, por lo que su geometría era euclídea. La energía cinética del choque se convirtió en las partículas que conocemos, aumentando la temperatura hasta unos 10^{11} GeV, correspondiente a la época electrodébil, e iniciando la expansión. El universo así generado:

- Sería muy homogéneo puesto que la colisión ocurrió de forma casi simultánea en todos los puntos.
- Sería euclídeo puesto que la colisión de dos universos euclídeos produce también un universo plano.
- No contiene monopolos porque la temperatura es suficientemente baja como para que las interacciones fuerte y electrodébil estén ya separadas.
- Los efectos cuánticos producen una colisión no exactamente simultánea en todos los puntos. Esto genera pequeñas variaciones de temperatura que se reflejan en la anisotropía de la radiación cósmica de fondo.

En este modelo la singularidad inicial no existiría. De hecho, no existiría gran parte del aquí denominado universo primordial. El inicio de la expansión sería producido por el choque de branas, así como la asimetría materia-antimateria existente. Por tanto, este modelo permitiría resolver parte de los problemas que no resuelve la inflación, además de los que resuelve ésta[45].

Por consiguiente, desde el punto de vista de los problemas que resuelve, este modelo es más satisfactorio que el inflacionario. Sin embargo, el modelo inflacionario se basa en la bien establecida y largamente estudiada y probada teoría cuántica de campos, mientras que la teoría de supercuerdas no está demostrada y el modelo ecpirótico no carece de problemas (véase Kallosh *et al.* 2001 para una crítica de este modelo de universo), como por ejemplo el de ajuste fino. Lo que sí es cierto es que el paradigma inflacionario no parece enteramente satisfactorio (no sólo para este autor) y que no puede descartarse que existan maneras alternativas de resolver los problemas del modelo estándar sin tener que recurrir a un potencial *ad hoc*.

5.11 Resumen

La siguiente tabla resume los principales eventos que tienen lugar en el universo primordial, admitiendo un instante inicial $t = 0$ en el que el factor de escala se anula o toma valores suficientemente pequeños.

[45] Aunque habría que explicar de dónde provienen las branas iniciales con esas características.

Era	Época	Edad (s)	Sucesos más importantes	Comentarios
de Radiación	Planck	0	Inicio de la era. Singularidad inicial?	Todas las interacciones unificadas. Espuma 10-D de μagujeros negros
		4×10^{-44}	Desacoplamiento del gravitón. Fin de época	
	GUT	4×10^{-44}	Inicio de la época GUT y propiamente de la era de radiación	Unificación de todas las interacciones menos la gravitación.
		10^{-36}	Transición de fase de primer orden con rotura de simetría. Fin de época	Universo compuesto de materia GUT. Posible bariogénesis final
	Electrodébil	10^{-36}	Inicio de la época	Unificación electrodébil.
		10^{-10}	Transición de fase de primer orden con rotura de simetría. Fin de época	Universo compuesto de materia cuark y materia leptónica
	Cuark	10^{-10}	Inicio de la época	Todas las interacciones separadas.
		2.5×10^{-5}	Transición (¿de primer orden?) cuark-hadrón. Fin de la época	Universo compuesto por un Plasma cuark-gluon y leptones

Tabla 5.9 Resumen de los principales eventos del universo primordial y las épocas que definen.

La inflación, de existir, tuvo lugar en algún momento entre el fin de la época de Planck y la transición electrodébil, y no asociada a una transición de fase.

5.12 Ejercicios

Se sugiere al lector que, a modo de ejercicio, compruebe las ecuaciones que se deducen en este capítulo, así como los cálculos efectuados. Esto le permitirá familiarizarse con los conceptos, unidades y órdenes de magnitud. Además se proponen los siguientes ejercicios:

5.1 Derivar los alcances de la interacción fuerte y débil a partir de la masa del pion y de los bosones $W^{\pm}$ y Z^0.

5.2 Determinar las cargas y espines de los hadrones de la tabla 5.5, así como del pentacuark θ^+.

5.3 Desglosar los procesos que conducen a las reacciones (5.2) y (5.4).

5.4 Comprobar la conservación del número bariónico y leptónico de las reacciones (5.1), (5.2), (5.3) y (5.4).

5.5 Consideremos un potencial de la forma: $V = V_0 + \alpha\phi^2 + \beta\phi^4$, donde ϕ es un campo escalar y $\alpha = a\,(T-T_C)/T$, $\beta = b\,(T-T_C)^2/T^2$ con T_C una temperatura crítica. Deducir las condiciones que deben cumplir V_0, a y b para que se verifique simultáneamente que cuando:
   a. $T > T_C$ exista un mínimo en $\phi = 0$ y ningún otro máximo ni mínimo.
   b. $T < T_C$ exista un máximo en $\phi = 0$ y mínimos nulos y simétricos en un valor de $\phi \neq 0$.

5.6 Para el potencial $V = aT^2|\phi|^2 - b|\phi|^3 + \lambda|\phi|^4$, obtener:
   a. La temperatura crítica por debajo de la cual hay dos mínimos.
   b. La temperatura crítica a la que ambos mínimos tienen la misma energía potencial.
   c. La altura de la barrera de potencial alrededor del origen en función de la temperatura.

5.7 ¿Cuántos y cuáles defectos topológicos podrían existir en Planilandia? ¿Y en sólo una dimensión?

5.8 Examinar la figura 5.5. ¿Por qué aunque el campo de dominios con una arista común adopte los mismos valores al recorrer un círculo, en unas aristas se forma una cuerda y en otras no? Intentar reproducir el patrón de cuerdas de la figura 5.5.

5.9 Deducir la expresión (5.17).

5.10 Demostrar que el tamaño del horizonte en la época de Planck es igual al radio de Schwarzschild.

5.11 ¿Cuál es la masa contenida en el radio de Hubble en el momento de la transición cuark-hadrón? Si esa masa da lugar a un agujero negro primordial, ¿cuál sería su duración? ¿Cuál la densidad actual de agujeros negros primordiales?

5.12 Deducir las ecuaciones (5.33) a (5.36).

5.13 Demostrar que se puede estimar con mucha aproximación el horizonte de partículas en el momento del desacoplamiento de los fotones suponiendo que el universo, de curvatura nula, ha estado siempre dominado por materia no relativista. ¿Cuál sería la diferencia si no se efectuase esta aproximación?

5.14 Determinar la duración de un universo con un parámetro de densidad como el de (5.44).

5.15 Determinar el horizonte de sucesos durante la inflación cuando ésta corresponde a una fase de De Sitter. Comparar con las ecuaciones (3.3) y (4.94).

5.16 Deducir la ecuación (5.60).

5.17 Sabiendo que un potencial inflacionario tiene la forma: $V \propto \exp(\sqrt{16\pi / p}\,\phi)$, donde p es una constante que verifica $p>1$, demostrar que *durante la inflación* el factor de escala varía como $a \propto t^p$.

5.18 Dado un potencial inflacionario de la forma $V = \gamma\phi^4$, ¿cómo varía el factor de escala durante la inflación?

5.19 ¿Por qué la relación entre la edad y la temperatura (5.17) se puede seguir considerando válida para fechar las distintas épocas del universo primordial a pesar de la inflación? ¿Tendría sentido utilizar el desplazamiento al rojo para designar el inicio y final de las distintas épocas? ¿Qué representaría el desplazamiento al rojo en este caso?

5.13 Bibliografía

5.13.1 Referencias

ALBRECHT, A. y STEINHARDT, P. J. (1982), *Phys.Rev.Lett.* 48, 1220.

BERGSTRÖM, L. y GOOBAR, A. (1999), *Cosmology and Particle Astrophysics*, Wiley.

CEPA, J. (2004), *A&A* 422, 831.

COLES, P. y LUCCHIN, F. (1995), *Cosmology. The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, Wiley.

GANGUI, A. (2003), *Cosmology from Topological Defects*, astro-ph/0303504v.1.

GUTH, A. H. (1981a), *Phys.Rev.*D 23, 347.

GUTH, A. H. y WEINBERG, E. J. (1981b), *Phys.Rev.*D 23, 876.

HIGGS, P. W. (1964), *Phys.Lett.* 12, 132.

KALLOSH, R.; KOFMAN, L. y LINDE, A. (2001), *Phys.Rev.*D 64, 123523 (hep-th/0104073).

KHOURY, J.; OVRUT, B. A.; STEINHARD, P. J. y TUROK, N. (2001), *Phys.Rev.*D 64, 123522 (hep-th/0103239).

KIBBLE, T. W. B. (1980), *Phys.Rep.* 67, 183.

LINDE, A. D. (1982), *Phys.Lett.* 108B, 389.

LINDE, A. D. (1983), *Phys.Lett.* 129B, 177.

NARLIKAR, J. V. (^{3}2002), *Introduction to Cosmology*, Cambridge University Press.

PEACOCK, J. A. (1999), *Cosmological Physics*, Cambridge University Press.

SAKHAROV, A. (1967), *Soviet Physics Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol.5, 24.

SHURYAK, E. (2004), *Prog.Part.Nucl.Phys.* 53, 273 (hep-ph/0312227).

SPERGEL, D. N. *et al.* (16 autores más) (2003), *ApJS* 148, 175.

5.13.2 Textos recomendados

Para ampliación general de conocimientos

KOLB, E. W. y TURNER, M. S. (1990), *The Early Universe*, Addison-Wesley.

NARLIKAR, J. V. (^{3}2002), *Introduction to Cosmology*, Cambridge University Press.

PEACOCK, J. A. (1999), *Cosmological Physics*, Cambridge University Press.

Transiciones de fase y defectos topológicos en cosmología

DURRER, R. (1999), *New Astronomy Reviews* 43, 111.

Modelos de recalentamiento

KOFMAN, L.; LINDE, A. y STAROBINSKY, A. A. (1997), hep-ph/9704452.

Universo ecpirótico
KHOURY, J. (2004) (astro-ph/0401579).

5.13.3 Enlaces útiles

Página WWW de este texto
http://webpages.ull.es/users/jcepano

Generales
Diccionario en línea: http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
Buscador de pretirajes de artículos (astro-ph, y otros): http://www.arxiv.org
Página general de cosmología: http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5

Partículas y fuerzas
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html

Supercuerdas
http://superstringtheory.com/basics/index.html

Evolución del universo
http://zebu.uoregon.edu/~js/cosmo/lectures

Universo ecpirótico
http://wwwphy.princeton.edu/~steinh/npr/

Capítulo 6 | EL UNIVERSO TEMPRANO

El confinamiento de los cuarks da fin al aquí llamado universo primordial e inicia lo que se denominará universo temprano. Después de la transición cuark-hadrón el universo está poblado por partículas como las que lo constituyen en la actualidad, y relacionadas por las mismas interacciones que en el universo actual, al haberse perdido la unificación de fuerzas del universo primordial. No es de extrañar, por tanto, que el universo temprano no sea tan incierto como el primordial, al estar las teorías que lo gobiernan más establecidas. Entre dichas teorías, y a modo de introducción al estudio del universo temprano, en este capítulo se recordarán algunos conceptos básicos de termodinámica, de la misma manera que para estudiar la métrica y las ecuaciones de Fridman era recomendable sentar unas ciertas bases de cálculo tensorial y el concepto de métrica. Hay que destacar que este cambio de universo hará conveniente proceder a una nueva redefinición de unidades.

Tanto en este capítulo como en el anterior, se trata de estudiar los procesos físicos que se supone que han tenido lugar en nuestro propio universo, más que en universos hipotéticos no constreñidos por las observaciones. Esta situación es distinta de la expuesta en los primeros cuatro capítulos, donde que por motivos pedagógicos se estudiaban multitud de modelos alternativos de universo que no correspondían necesariamente al nuestro.

6.1 Termodinámica en el universo temprano

A primera vista, el estudio de la materia bajo las condiciones de presión y temperatura del universo temprano, que además se halla en expansión, parecería una tarea difícil. Sin embargo, como ya se señaló en el capítulo anterior, la velocidad de una interacción entre dos colectivos de partículas es proporcional al producto de sus densidades, es decir proporcional a a^{-6}, mientras que un universo dominado por radiación evoluciona como $t \propto a^{-2}$. En consecuencia en el universo temprano, en que el factor de escala es pequeño, **las velocidades de reacción son mucho mayores que la escala de tiempo de expansión**, y en estas circunstancias **el equilibrio térmico constituye una excelente aproximación**. Por tanto, para estudiar el universo temprano será preciso recordar brevemente las leyes que obedecen las partículas que se encuentran en equilibrio.

6.1.1 Termodinámica del equilibrio

La función de distribución normalizada de un conjunto de partículas de tipo i en el espacio de fases es

$$f_i(\overline{r},\overline{p},t)=\frac{(2\pi\hbar)^3}{g_i}\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3p}, \tag{6.1}$$

donde g_i es el número de grados de libertad de las partículas i. Por ejemplo, los fotones tienen dos grados de libertad que corresponden a los dos estados de polarización. Los protones, neutrones, electrones y muones tienen también dos grados de libertad cada uno, que corresponden al número de estados de espín. En cambio, los neutrinos tienen únicamente un grado de libertad. Los grados de libertad de las antipartículas son los mismos que los de las correspondientes partículas.

En el caso homogéneo, condición que se supone cumple el universo, la función de distribución no dependerá de la posición. Además, podemos considerar que las partículas que componen el universo se comportan como un gas ideal: sin interacciones de largo alcance. Para partículas que interaccionan débilmente como los neutrinos es obvio. Sin embargo, esta aproximación también puede considerarse válida en el caso de partículas cargadas. En efecto, como se espera que haya partículas de cargas positivas y negativas distribuidas homogéneamente, se producirá un apantallamiento de la carga. En estas condiciones, la mecánica estadística cuántica establece que un conjunto de partículas de tipo i *uniformemente distribuidas, que interaccionen débilmente* y *que se encuentren en equilibrio,* siguen una función de distribución

$$f_i(\overline{p}_i)=\frac{1}{\mathrm{e}^{(E_i-\mu_i)/T_i}\pm 1} \tag{6.2}$$

donde T_i es la temperatura y μ_i el potencial químico (6.1.3) de la partícula de tipo i, la constante de Boltzmann se ha redefinido como igual a la unidad, el signo «+» se aplica a los fermiones, que obedecen el principio de exclusión de Pauli y por tanto siguen la estadítica de Fermi-Dirac, y el «–» a los bosones que obedecen la estadística de Bose-Einstein. La energía E_i puede expresarse a partir del módulo del momento y la masa de la partícula m_i,

$$E_i=\sqrt{\overline{p}_i^2+m_i^2} \tag{6.3}$$

puesto que en las unidades utilizadas sigue siendo $c = 1$.

Entonces, la integral de (6.2) sobre todo el espacio de momentos permite determinar la densidad de partículas de tipo i. Considerando (6.1),

$$n_i=\frac{g_i}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty f_i(\overline{p})\mathrm{d}^3p \tag{6.4}$$

análogamente la densidad de energía será

$$\rho_i=\frac{g_i}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty E_i f_i(\overline{p})\mathrm{d}^3p. \tag{6.5}$$

De la teoría cinética resulta que la presión que ejerce la especie i es

$$p_i=\frac{1}{3}n_i\langle|\overline{p}_i|v_i\rangle=\frac{1}{3}n_i\left\langle\frac{|\overline{p}_i|^2}{E_i}\right\rangle \tag{6.6}$$

donde v es el módulo de la velocidad de la partícula i. La última igualdad de (6.6) se obtiene de

$$|\overline{p}_i|=v_iE_i \tag{6.7}$$

teniendo en cuenta que $c = 1$.

Entonces, la presión parcial que ejercen las partículas de tipo i será

$$p_i=\frac{g_i}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty\frac{|\overline{p}|^2}{3E_i}f_i(\overline{p})\mathrm{d}^3p. \tag{6.8}$$

Como por isotropía la función de distribución solamente dependerá del módulo del momento, será $\mathrm{d}^3p = p^2\,\mathrm{d}p\mathrm{d}\Omega$, por lo que las integrales anteriores se efectuarán sobre el módulo de la presión y todas las direcciones. Entonces, de la ecuación (6.3) y de su diferencial, que proporciona $p_i\mathrm{d}p_i = E_i\mathrm{d}E_i$, se termina obteniendo

$$\begin{aligned}
n_i&=\frac{g_i}{2\pi^2}\int_0^\infty f_i(E)\sqrt{E^2-m_i^2}E\mathrm{d}E\\
\rho_i&=\frac{g_i}{2\pi^2}\int_0^\infty f_i(E)\sqrt{E^2-m_i^2}E^2\mathrm{d}E\\
p_i&=\frac{g_i}{6\pi^2}\int_0^\infty f_i(E)\left(E^2-m_i^2\right)^{3/2}\mathrm{d}E
\end{aligned} \tag{6.9}$$

donde E es la variable muda de integración y se ha considerado $\hbar = 1$. Estas definiciones de densidad de energía y presión se corresponden con las que figuran en el tensor energía-momento (2.25) y por consiguiente representan densidades de energía y presiones propias.

6.1.2 Redefinición de unidades

Nótese que considerar $\hbar = 1$ en las expresiones (6.9) implica una nueva definición de unidades que simplifica la escritura y surge de manera natural en el marco de la mecánica cuántica, en el cual nos movemos en el universo temprano. Sin embargo, esta redefinición es incompatible con tomar $G = 1$ (ejercicio 6.1). Por este motivo, en lo sucesivo la constante G aparecerá en las ecuaciones de Fridman, a cambio de prescindir de $\hbar$ en las expresiones (6.9) y las que de ellas se derivan.

Si en la definición de unidades establecida en el capítulo segundo, los tiempos, masas y temperaturas se medían en unidades de longitud, en esta redefinición los tiempos y longitudes se miden en el inverso de las unidades de energía, mientras que las masas y temperaturas se miden en unidades de energía (ejercicio 6.1).

La razón subyacente a este cambio es que en los capítulos del 2 al 4 la física predominante era la relatividad general, mientras que en este capítulo lo será la física de partículas.

6.1.3 Concepto de potencial químico

Si U es la energía interna de un sistema compuesto de N_i partículas de especies i=1,..., K, como la energía interna se puede expresar en función del volumen y la entropía S, se tendrá

$$\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N_i} \mathrm{d}S + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N_i} \mathrm{d}V + \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{\partial U}{\partial N_i}\right)_{S,V,N_j} \mathrm{d}N_i \qquad (6.10)$$

con $i \neq j$.

Como $\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N_i} = T$ y $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N_i} \mathrm{d}V = -p$, donde los subíndices indican que las derivadas parciales se obtienen manteniendo constantes las otras variables, si se denomina potencial químico de la partícula i a

$$\mu_i = \left(\frac{\partial U}{\partial N_i}\right)_{S,V,N_j} \quad \text{cuando } i \neq j \qquad (6.11)$$

resulta,

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V + \sum_{i=1}^{K} \mu_i \mathrm{d}N_i \qquad (6.12)$$

En una reacción en equilibrio,

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \leftrightarrow \mathrm{C} + \mathrm{D}, \qquad (6.13)$$

como la energía interna, la entropía y el volumen permanecen constantes, de aplicar la ecuación (6.12) se deduce que

$$\mu_\mathrm{A}\mathrm{d}N_\mathrm{A} + \mu_\mathrm{B}\mathrm{d}N_\mathrm{B} + \mu_\mathrm{C}\mathrm{d}N_\mathrm{C} + \mu_\mathrm{D}\mathrm{d}N_\mathrm{D} = 0 \qquad (6.14)$$

pero el equilibrio de la reacción (6.13) implica que $\mathrm{d}N_\mathrm{A} = \mathrm{d}N_\mathrm{B} = -\mathrm{d}N_\mathrm{C} = -\mathrm{d}N_\mathrm{D}$, por tanto,

$$\mu_\mathrm{A} + \mu_\mathrm{B} = \mu_\mathrm{C} + \mu_\mathrm{D}. \qquad (6.15)$$

Si el sistema de partículas es un fondo de radiación en equilibrio térmico, la ecuación (6.15) se reduce a

$$\mu_\gamma = 0 \qquad (6.16)$$

como se deduce de aplicar la relación (6.15) a un átomo que se desexcita emitiendo un fotón o que se excita absorbiendo un fotón: $\mathrm{A}^* \leftrightarrow \mathrm{A} + \gamma$, puesto que el potencial químico de la especie A no depende del estado de excitación.

Por este motivo, **el potencial químico de las antipartículas es igual al de las partículas cambiado de signo,** como puede comprobarse aplicando (6.15) a la reacción de aniquilación-creación de pares de la partícula i en equilibrio[1],

$$\text{partícula}_i + \text{antipartícula}_i \leftrightarrow 2\,\gamma, \qquad (6.17)$$

y teniendo en cuenta que **el potencial químico de los fotones es nulo.**

6.1.4 Aplicación a la radiación de fondo

En el universo temprano habrá, por tanto, colectivos de partículas de distintos tipos que pueden estar en equilibrio estadístico obedeciendo cada uno de ellos las

[1] Nótese que el proceso $\text{partícula}_i + \text{antipartícula}_i \leftrightarrow \gamma$ no se verifica en el universo temprano puesto que esta reacción requiere de un núcleo atómico masivo que permita la conservación de la energía y el momento.

expresiones (6.2) a una temperatura característica T_i, y además estar o no en equilibrio térmico a una misma temperatura característica común para todas las partículas.

Las colisiones inelásticas, las que alteran el número de partículas, generan un estado de **equilibrio estadístico**[2], con distribuciones de la forma (6.2) en reactivos y productos cuando exista equilibrio químico, es decir, la reacción y su inversa sucedan a la misma velocidad. Además, las distribuciones generadas por este tipo de reacciones se hallarán a la misma temperatura característica, es decir, en **equilibrio térmico**[3]. Por tanto, las colisiones inelásticas en equilibrio generan un **equilibrio termodinámico**[4] entre las partículas que intervienen. En cambio, las reacciones consistentes en choques elásticos solamente generan o mantienen un equilibrio térmico entre las partículas que colisionan. Es decir, igualan o mantienen igualadas las temperaturas características de las distribuciones de las distintas partículas involucradas.

Por ejemplo, tal y como ya se discutió en el capítulo primero, el mar de fotones con espectro de cuerpo negro que terminó generando la radiación de fondo cósmico apareció mediante procesos como el Compton doble,

$$e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + 2\gamma \tag{6.18}$$

y más tarde mediante procesos de radiación de frenado *(Bremstrahlung)* del tipo

$$e^- + p \leftrightarrow e^- + p + \gamma. \tag{6.19}$$

Estos procesos pueden crear y destruir fotones y por tanto son los responsables de haber originado un espectro de cuerpo negro correspondiente a la distribución (6.2) para bosones teniendo en cuenta (6.16). Además, también son responsables de igualar las temperaturas características de las distribuciones de fotones T_γ y de electrones T_{e^-}.

En cambio, el esparcimiento Compton simple,

$$e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma, \tag{6.20}$$

conserva el número de fotones y en consecuencia no puede generar un espectro de cuerpo negro. Sin embargo, constituye el principal proceso de intercambio de energía entre materia y radiación, y como tal mantiene la temperatura de las distribuciones de fotones y electrones al mismo valor. Es decir: mantiene el equilibrio térmico entre las distribuciones de fotones y de electrones.

Dicho de otro modo, los fotones obedecerán la distribución (6.2) para los bosones con $\mu_\gamma = 0$ creada mediante reacciones como (6.18) y (6.19), por otro lado los electrones relativistas que se encuentren en equilibrio estadístico mediante estas mismas reacciones y, por ejemplo,

$$e^- + p \leftrightarrow \nu_e + n \tag{6.21}$$

seguirán la distribución (6.2) para fermiones, y ambas distribuciones de fotones y de electrones estarán a la misma temperatura característica, $T_{e^-} = T_\gamma$, puesto que según el **principio cero de la termodinámica** los sistemas de partículas en equilibrio estadístico que interaccionan entre sí se hallan en equilibrio térmico. Por las mismas razones esgrimidas hasta ahora, la reacción (6.21) también indica que protones, neutrones y neutrinos electrónicos siguen, cada uno de ellos, distribuciones (6.2) a la misma temperatura característica que los fotones. Finalmente, la reacción (6.20) y otras reacciones que involucran a las demás partículas del universo se encargarán de mantener el equilibrio termodinámico: las partículas obedecerán las distribuciones (6.2) con la misma temperatura característica, aunque hayan cesado las interacciones inelásticas. En consecuencia, y dado el elevado número y tipo de interacciones que tienen lugar entre todas las partículas que constituyen el universo, resulta justificado considerar, como se indicó en la introducción, que **el universo temprano se halla en equilibrio termodinámico y por tanto está caracterizado por una única temperatura,** lo que permite aplicar otras relaciones propias de la termodinámica del equilibrio.

6.1.5 Potenciales químicos en el equilibrio termodinámico

Considérese una situación en la que *todas* las partículas que puedan constituir el universo se hallen en equilibrio termodinámico: verificando cada una de ellas (6.2) a la misma temperatura característica para todas. Para determinar los potenciales químicos que figuran en (6.2) se tendrá en cuenta que en el universo temprano, donde todas las interacciones están ya separadas y los cuarks combinados, deberán verificarse una serie de principios de conservación básicos:

- Conservación de la carga eléctrica total Q del universo y neutralidad del mismo: $Q = 0$.
- Conservación del número bariónico B, que es igual a la suma de todos los bariones menos todos los antibariones. Despreciando la asimetría materia antimateria, que es del orden de 1 partícula en exceso por cada 10^{10} pares partícula-antipartícula, el número bariónico ha de ser nulo: $B \approx 0$.

[2] Entendido como aquel en el que las partículas siguen la partición (o distribución) más probable en los distintos estados de energía disponibles.

[3] Entendido como aquel en el que se puede asignar la misma temperatura a distintas colectividades de partículas en equilibrio estadístico cada una de ellas.

[4] Es decir, estadístico y térmico.

- Conservación por separado de cada uno de los números leptónicos L para cada especie de leptón y su neutrino asociado: electrón, muón y tauón[5], donde cada uno de ellos es igual a la suma de todos los leptones menos la suma de todos los antileptones. También despreciando la asimetría materia-antimateria resulta $L_e = L_\mu = L_\tau \approx 0$.

En efecto, después de la transición GUT, se verifica la conservación de B y de los L. De la conservación de la carga eléctrica se obtiene:

$$Q = \sum_{i=\text{cargas}+} n_i - \sum_{j=\text{cargas}-} n_j = \\ = \sum_i \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty f_i(E)\sqrt{E^2 - m_i^2}\, E\mathrm{d}E - \sum_j \frac{g_j}{2\pi^2} \int_0^\infty f_j(E)\sqrt{E^2 - m_j^2}\, E\mathrm{d}E \approx 0. \tag{6.22}$$

Teniendo en cuenta que las partículas y antipartículas con carga eléctrica se hallan por hipótesis en equilibrio de creación-aniquilación mediante la reacción (6.17), que tienen cargas opuestas, que los grados de libertad y las masas de partículas y antipartículas son iguales, pero que sus potenciales químicos son iguales y de signos opuestos: $g_i = g_j$, $m_i = m_j$, $\mu_i = -\mu_j$, la expresión anterior puede escribirse, agrupando las diferencias de pares partícula-antipartícula,

$$Q = \sum_i \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{(E-\mu_i)/T} \pm 1} - \frac{1}{e^{(E+\mu_i)/T} \pm 1} \right) \sqrt{E^2 - m_i^2}\, E\mathrm{d}E \equiv \sum_{i=\text{cargas}+} \frac{g_i}{2\pi^2} F(x_i) = 0, \tag{6.23}$$

donde $x_i = \mu_i/T$ es el llamado **parámetro de degeneración** de la partícula i. La función F así definida es asimétrica: $F(x_i) = -F(-x_i)$.

Procediendo análogamente para el número bariónico,

$$B = \sum_{i=\text{bariones}} n_i - \sum_{j=\text{antibariones}} n_j = \\ = \sum_i \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{(E-\mu_i)/T} \pm 1} - \frac{1}{e^{(E+\mu_i)/T} \pm 1} \right) \sqrt{E^2 - m_i^2}\, E\mathrm{d}E = \sum_{i=\text{bariones}} \frac{g_i}{2\pi^2} F(x_i) \approx 0. \tag{6.24}$$

Aplicando la conservación del número leptónico electrónico se obtendría

$$L_e = (n_{e^+} - n_{e^-}) + (n_{\nu_e} - n_{\bar{\nu}_e}) \approx 0. \tag{6.25}$$

[5] En el capítulo primero se enunció que las medidas indicaban que solamente había tres tipos de neutrinos. Al final de este capítulo se verán las razones que permiten constreñir este número.

Teniendo en cuenta que el grado de libertad de electrones, muones, tauones y de sus antipartículas es 2 mientras que el de los neutrinos y antineutrinos correspondientes es la unidad, aplicando también (6.25) a muones y tauones resulta

$$F(x_{e^+}) + \frac{1}{2} F(x_{\nu_e}) \approx 0 \\ F(x_{\mu^+}) + \frac{1}{2} F(x_{\nu_\mu}) \approx 0 \\ F(x_{\tau^+}) + \frac{1}{2} F(x_{\nu_\tau}) \approx 0 \tag{6.26}$$

Estas igualdades (6.23), (6.24) y (6.26), que expresan relaciones de conservación, constituyen un sistema de ecuaciones en función de los parámetros de degeneración de cada una de las partículas que intervienen en el universo. En general, se tendrán más incógnitas que ecuaciones. Para resolver el sistema y determinar así los potenciales químicos, se añadirán las ecuaciones adicionales que se precisen, aplicando (6.15) a las reacciones que tienen lugar en el universo, considerando que los potenciales químicos de partículas y antipartículas son de signos opuestos, y utilizando la definición de parámetro de degeneración. Por ejemplo, de la aplicación a (6.21) resultaría

$$x_p = x_{e^+} + x_{\nu_e} + x_n, \tag{6.27}$$

es decir, también se obtienen ecuaciones asimétricas en los parámetros de degeneración. En este caso, los parámetros de degeneración de protones y neutrones de la ecuación (6.27) figuran asimismo en la conservación del numero de bariones (6.24), el de los protones y positrones en la conservación de la carga (6.23) y el de electrones y neutrinos electrónicos en la conservación del número leptónico electrónico (6.25). Las relaciones (6.23), (6.24), (6.26) y el conjunto de ecuaciones independientes como la (6.27) que pueden escribirse para cada reacción en equilibrio, proporcionan un conjunto de ecuaciones asimétricas en los parámetros de degeneración. En consecuencia, si existe una solución distinta de cero, la misma solución cambiada de signo también será una solución del sistema. Sin embargo, la solución ha de ser única, puesto que una partícula no puede tener dos potenciales químicos distintos. Por consiguiente, la única solución con sentido físico es que los potenciales químicos sean todos nulos.

Este resultado es correcto siempre que se verifiquen las hipótesis de partida:

- Equilibrio termodinámico.
- Asimetría materia-antimateria despreciable.

Si una reacción (6.17) de creación-aniquilación de pares de una partícula i se aleja del equilibrio y se aniquilan los pares, las reacciones que involucren su an-

tipartícula dejarán de estar en equilibrio. Como el número de pares de otros tipos de partículas que quedan sin aniquilar es del orden de 10^{10} veces el del remanente de partículas de tipo i aniquiladas que procede de la asimetría materia-antimateria, puede despreciarse la contribución de las partículas i en las ecuaciones de conservación (6.23), (6.24) y (6.26). Entonces, los potenciales químicos de las demás partículas seguirán siendo cero por el mismo razonamiento anterior, pero el potencial químico de la partícula i ya no es necesariamente nulo. Su valor vendrá determinado por la aplicación de (6.15) a las reacciones en las que intervenga con otras partículas remanentes de anteriores aniquilaciones de pares. Finalmente, cuando todas las partículas que figuran en alguna de las ecuaciones de conservación (6.23) ó (6.24) se hayan aniquilado[6] quedando únicamente el correspondiente remanente de partículas, ya no se puede despreciar la asimetría materia-antimateria[7] y los potenciales químicos de estas partículas ya no podrán ignorarse.

Sin embargo, una reacción de creación-aniquilación de pares perderá el equilibrio cuando los fotones ya no sean suficientemente energéticos como para crear pares, lo cual empezará a suceder cuando la temperatura del universo, que como quedó establecido en el capítulo primero va disminuyendo debido a la expansión, baje por debajo de la masa en reposo de la partícula en cuestión (en las nuevas unidades la temperatura y la masa tienen unidades de energía). Pero cuando eso sucede, la partícula considerada deja de ser relativista. Ello no implica que ya no se halle en equilibrio térmico: por ejemplo la interacción (6.20) sigue manteniendo el equilibrio térmico de los electrones con los fotones incluso después de la aniquilación de pares de los primeros.

Aunque este apartado parezca excesivamente abstracto, su complejidad es más aparente que real. Más adelante se proporcionarán algunos ejemplos clarificadores de aplicación al estudio de distintas épocas del universo temprano. Baste saber, por el momento, que en el universo se puede despreciar el potencial químico de las partículas relativistas.

6.1.6 Límite relativista y no relativista

La integración de (6.9) puede realizarse en dos casos: el limite relativista y el no relativista.

[6] Los neutrinos no se aniquilan, por lo que sus potenciales químicos pueden considerarse siempre nulos al despreciar las partículas aniquiladas en las relaciones (6.26).

[7] El número bariónico ya no podrá considerarse nulo, pero la nulidad de carga eléctrica siempre se verificará puesto que la asimetría materia-antimateria mantiene la carga nula. Es decir, se crean por ejemplo el mismo exceso de protones con respecto antiprotones que de electrones con respecto positrones.

Límite relativista

En este caso la energía cinética domina sobre la masa en reposo, $E_i \approx p_i$, $T_i/m_i >> 1$. Como ya se ha demostrado en el apartado anterior que en estas circunstancias se puede despreciar el potencial químico, la integración de (6.9) proporciona

$$
\begin{aligned}
n_{iR} &= \begin{cases} \dfrac{\zeta(3)}{\pi^2} g_i T_i^3 & \text{para la distribución de Bose-Einstein} \\ \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\zeta(3)}{\pi^2} g_i T_i^3\right) & \text{para la distribución de Fermi-Dirac} \end{cases} \\
\rho_{iR} &= \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{30} g_i T_i^4 & \text{para la distribución de Bose-Einstein} \\ \dfrac{7}{8}\left(\dfrac{\pi^2}{30} g_i T_i^4\right) & \text{para la distribución de Fermi-Dirac} \end{cases} \\
p_{iR} &= \frac{1}{3}\rho_{iR}
\end{aligned}
\qquad (6.28)
$$

donde $\zeta(x)$ es la función zeta de Riemann: $\zeta(3)=1.20206...$

Límite no relativista

En este caso la energía de la masa en reposo domina sobre la energía cinética, $E_i \approx m_i$, $T_i/m_i << 1$, no existe diferencia entre fermiones y bosones y se obtiene

$$
\begin{aligned}
n_{iNR} &= g_i \left(\frac{m_i T_i}{2\pi}\right)^{3/2} e^{(\mu_i - m_i)/T_i} \\
\rho_{iNR} &= m_i n_{iNR} \\
p_{iNR} &= T_i n_{iNR} << \rho_{iNR}
\end{aligned}
\qquad (6.29)
$$

donde la última desigualdad justifica que la presión de la materia no relativista sea nula y surge de combinar con la segunda igualdad teniendo en cuenta que $T_i/m_i << 1$.

6.1.7 Grados de libertad efectivos

Como ya se ha demostrado en el capítulo tercero, en el universo dominado por radiación la densidad total de partículas, la densidad total de energía o la presión total vendrán determinadas esencialmente por la de las partículas relativistas. En efecto, como ya se ha mencionado, cuando una partícula deje de ser relativista se producirá una aniquilación de sus pares y entonces el número de partículas no relativistas remanente será 10^{10} veces menor, por lo que se podrá despreciar su contribución frente a las restantes partículas relativistas. Estas magnitudes totales se

obtendrán sumando cada una de las ecuaciones (6.28) para todas las partículas relativistas presentes en el universo,

$$
\begin{aligned}
n_{\mathrm{R}} &= \sum_{i=\text{bosones}} n_{i\mathrm{R}} + \sum_{j=\text{fermiones}} n_{j\mathrm{R}} = \sum_{i=\text{bosones}} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_i T_i^3 + \sum_{j=\text{fermiones}} \frac{3}{4}\left(\frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_j T_j^3\right) = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_{\mathrm{ef}}^n T^3 \\
\rho_{\mathrm{R}} &= \sum_{i=\text{bosones}} \rho_{i\mathrm{R}} + \sum_{j=\text{fermiones}} \rho_{j\mathrm{R}} = \sum_{i=\text{bosones}} \frac{\pi^2}{30} g_i T_i^4 + \sum_{j=\text{fermiones}} \frac{7}{8}\left(\frac{\pi^2}{30} g_j T_j^4\right) = \frac{\pi^2}{30} g_{\mathrm{ef}}^\rho T^4 \\
p_{\mathrm{R}} &= \frac{1}{3}\left(\sum_{i=\text{bosones}} \rho_{i\mathrm{R}} + \sum_{j=\text{fermiones}} \rho_{j\mathrm{R}}\right) = \frac{1}{3}\rho_{\mathrm{R}} = \frac{\pi^2}{90} g_{\mathrm{ef}}^\rho T^4,
\end{aligned}
\tag{6.30}
$$

donde T es **la temperatura de los fotones,** que **se adopta como referencia,** es decir, $T \equiv T_\gamma$, y donde

$$
\begin{aligned}
g_{\mathrm{ef}}^n &= \sum_{i=\text{bosones}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{3}{4} \sum_{j=\text{fermiones}} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^3 \\
g_{\mathrm{ef}}^\rho &= \sum_{i=\text{bosones}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{j=\text{fermiones}} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^4
\end{aligned}
\tag{6.31}
$$

se denominan grados de libertad efectivos. Para las partículas de tipo i que se encuentren en equilibrio térmico con los fotones se verifica $T_i = T$.

Las ecuaciones (6.30) se verifican en general, tanto en el equilibrio térmico como fuera de él, puesto que la densidad total de partículas o de energía se obtienen como suma de las densidades de partículas o de energía de todas las partículas, independientemente de que se hallen en equilibrio térmico o no. Análogamente en el caso de la presión, puesto que la presión total será la suma de las presiones parciales. Nótese que la independencia de la masa de las ecuaciones (6.28) permite expresar estas magnitudes totales (6.30) de forma muy conveniente mediante (6.31), operación que no es factible en el caso no relativista.

Esta definición de grados de libertad efectivos, tomando como referencia la temperatura de los fotones, permite **utilizar la temperatura de los fotones como termómetro del universo**. Además, como se demuestra a continuación, esta temperatura se podrá relacionar con la edad del universo mediante las ecuaciones de Fridman, por lo que **la temperatura de los fotones también constituye el cronómetro del universo.**

6.1.8 Relación edad-temperatura

Dado que el universo temprano está dominado por materia relativista y radiación, la curvatura puede despreciarse, así como las densidades de energía de materia no relativista y de energía oscura. Entonces, de la segunda ecuación de Fridman (2.65), que en las nuevas unidades incluirá G, y de la expresión de la densidad de energía de (6.30),

$$
H^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho_{\mathrm{R}} = \frac{8\pi^3}{90} G g_{\mathrm{ef}}^\rho T^4 \approx \frac{4\pi^3}{45} \frac{g_{\mathrm{ef}}^\rho T^4}{m_{\mathrm{p}}^2},
\tag{6.32}
$$

donde la última igualdad se obtiene de expresar, en las nuevas unidades, G en función de la masa de Planck m_{p} combinando (5.22) y (5.24):

$$
G \approx m_{\mathrm{p}}^{-2}.
\tag{6.33}
$$

Finalmente, resulta

$$
H = 1.66 \sqrt{g_{\mathrm{ef}}^\rho} \frac{T^2}{m_{\mathrm{p}}}.
\tag{6.34}
$$

Como en el universo temprano de curvatura nula y dominado por radiación $a \propto t^{1/2}$ (3.29), entonces $H = (2t)^{-1}$ (3.31) y, combinando con (6.34),

$$
t = 0.30 \frac{\hbar m_{\mathrm{p}}}{\sqrt{g_{\mathrm{ef}}^\rho}\, T^2} = \frac{1.70}{\sqrt{g_{\mathrm{ef}}^\rho}} \left(\frac{1\mathrm{MeV}}{T}\right)^2 \mathrm{s} \approx \left(\frac{1\mathrm{MeV}}{T}\right)^2 \mathrm{s}
\tag{6.35}
$$

en unidades físicas, expresando la masa de Planck en unidades de energía (5.23). La última aproximación puede aplicarse porque $\sqrt{g_{\mathrm{ef}}^\rho}$ es típicamente menor que un orden de magnitud (ejercicio 6.2). La expresión (6.35) es compatible con la (5.17) deducida en el capítulo anterior. El factor aparece en (6.35) para recuperar las unidades físicas a partir de la nueva redefinición de unidades efectuada. Por tanto, la expresión (6.35) proporciona una estimación de la edad del universo temprano en segundos, en función de la temperatura.

6.1.9 Entropía

En termodinámica se define la entropía a partir de su diferencial

$$
\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{1}{T}\left[\mathrm{d}(\rho V) + p\mathrm{d}V\right]
\tag{6.36}
$$

donde la segunda igualdad procede del primer principio de la termodinámica: ρV es la energía interna. En general, la entropía depende del volumen V y la tempera-

tura T, mientras que en el equilibrio termodinámico la densidad ρ y la presión p sólo dependen de la temperatura (ecuaciones 6.28 y 6.29).

Como $S(V, T)$, la diferencial total será

$$dS = \frac{\partial S}{\partial V} dV + \frac{\partial S}{\partial T} dT. \tag{6.37}$$

Entonces, por comparación con (6.36), y teniendo en cuenta que $\rho(T)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial V} &= \frac{1}{T}(\rho + p) \\ \frac{\partial S}{\partial T} &= \frac{V}{T}\frac{d\rho}{dT}. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Como las derivadas parciales de S con respecto a V y a T se espera que sean continuas, entonces las derivadas cruzadas han de ser iguales,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}. \tag{6.39}$$

Aplicando esta condición a (6.38), se obtiene, operando un poco y teniendo en cuenta que ρ y p solamente dependen de T con lo que sus derivadas parciales con respecto a T son totales,

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T}(\rho + p). \tag{6.40}$$

La ecuación (6.36) puede escribirse

$$dS = \frac{1}{T}\left[d(\rho V) + p dV\right] = \frac{1}{T}\left[d(\rho V) + p dV + d(pV) - d(pV)\right] = \frac{1}{T}\left\{V d\left[(\rho + p)\right] - V dp\right\} \tag{6.41}$$

Sustituyendo dp de la expresión (6.40) se obtiene

$$dS = \frac{1}{T} d\left[(\rho + p)V\right] - V\frac{dT}{T^2}(\rho + p) = d\left[\frac{(\rho + p)V}{T}\right] \tag{6.42}$$

y, por tanto, salvo una constante,

$$S = \frac{(\rho + p)V}{T}, \tag{6.43}$$

expresión que indica que la entropía es constante si la ecuación de estado dominante es de constante cosmológica $p = -\rho$.

La densidad de entropía s será, por consiguiente,

$$s = \frac{(\rho + p)}{T}. \tag{6.44}$$

Hasta este momento no ha intervenido la expansión del universo, sino que solamente se ha considerado el universo como un sistema en equilibrio térmico a una misma temperatura. Sin embargo, la ecuación de Fridman (2.70) puede escribirse

$$a^3 \dot{p} = \frac{d}{dt}\left[a^3(\rho + p)\right] \tag{6.45}$$

como puede comprobarse fácilmente desarrollando (6.45). Pero aplicando la regla de la cadena al primer miembro de (6.45),

$$a^3 \dot{p} = a^3 \frac{dp}{dT}\frac{dT}{dt} = \frac{a^3}{T}(\rho + p)\frac{dT}{dt} \tag{6.46}$$

como se deduce de sustituir (6.40).

Igualando (6.45) y (6.46), dividiendo por T ambos miembros y pasando todos los términos al mismo miembro se obtiene una expresión equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{a^3(\rho + p)}{T}\right] = 0 \tag{6.47}$$

Sin embargo, el volumen propio es proporcional a a^3, por lo que, combinando con la expresión de la entropía (6.43) se obtiene, finalmente,

$$\frac{dS}{dt} = 0. \tag{6.48}$$

Es decir, en el equilibrio térmico la entropía en un volumen a^3 se conserva.
Sin embargo, como (6.36),

$$dS = \frac{dQ}{T} \tag{6.49}$$

de la ecuación (6.48) se deduce que

$$\frac{dQ}{T} = 0 \tag{6.50}$$

Es decir: **la expansión del universo es adiabática.** Como además (6.48) implica que es reversible, **la expansión del universo es un proceso isoentrópico.**

Dado que el universo temprano se halla dominado por partículas relativistas, de (6.30) y (6.44) se obtiene la densidad de entropía,

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{ef}^s T^3 \tag{6.51}$$

donde

$$g_{ef}^s = \sum_{i=\text{bosones}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \sum_{j=\text{fermiones}} \frac{7}{8} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^3 \tag{6.52}$$

Sin embargo, como la ecuación (6.51) indica que la densidad de entropía es proporcional a la tercera potencia de la temperatura, entonces (6.30) implica que la densidad de entropía es proporcional a la densidad de partículas relativistas. Por ejemplo, teniendo en cuenta que $g_\gamma = 2$, (6.28) permite expresar la densidad de entropía en función de la densidad de fotones,

$$s = \frac{\pi^4}{45\zeta(3)} g_{ef}^s n_\gamma \approx 1.8 g_{ef}^s n_\gamma \tag{6.53}$$

Por este motivo, al cociente n_γ/n_B entre la densidad de fotones y la densidad de bariones n_B también se le denomina **entropía por barión**.

Dado que la temperatura es muy elevada, la ecuación (6.53) indica que la entropía del universo temprano es muy elevada (ejercicio 6.3). Por este motivo, las variaciones relativas de entropía que introduzca un proceso serán despreciables, y puede considerarse con mucha aproximación que la expansión del universo es reversible.

De la expresión de la densidad de entropía en función de la temperatura (6.51), de que $S \propto s\,a^3$, y de que la entropía S es constante (6.48) se infiere que, en el equilibrio térmico,

$$T \propto a^{-1}. \tag{6.54}$$

Es decir: la temperatura del universo disminuye con la expansión. Ésta es la demostración formal de la relación análoga (1.24) deducida en el capítulo primero mediante argumentos cualitativos. Esta expresión también puede obtenerse de la relación que verifican las transformaciones adiabáticas y reversibles, como se ha demostrado que es el caso de la expansión del universo en equilibrio térmico. En efecto, estas transformaciones verifican

$$pV^\gamma = \text{constante}, \tag{6.55}$$

donde γ es el cociente entre la capacidad calorífica a presión constante y la capacidad calorífica a volumen constante. Como para la radiación $\gamma = 4/3$, según (6.30)

$p \propto T^4$ y se verifica $V \propto a^3$, para el caso relativista resulta $T \propto a^{-1}$, como ya se había demostrado.

La relación (6.54) permite **utilizar la temperatura de los fotones como medida del desplazamiento al rojo** además de como termómetro.

Combinando (6.54) con la primera ecuación de (6.30) se deduce que, **para las partículas relativistas**[8],

$$n_R \propto a^{-3}, \tag{6.56}$$

es decir, que **su densidad comóvil es constante.**

Sustituyendo (6.54) en la segunda ecuación de (6.30) resulta

$$\rho_R \propto a^{-4}, \tag{6.57}$$

que concuerda con la dependencia obtenida en el segundo capítulo utilizando la ecuación de Fridman (2.70) y la ecuación de estado $p = \rho/3$ asumida para la radiación y materia relativista y que se deduce de la tercera ecuación de (6.30).

Sin embargo, aunque la ecuación de estado para la materia no relativista ($p = 0$ como se deduce de la tercera ecuación de (6.29)) implica, según la ecuación de Fridman (2.70), $\rho_{NR} \propto a^{-3}$ (2.78), de la primera y segunda ecuaciones de (6.29), combinada con (6.54) no se sigue dicha dependencia. Ello es debido a que, como ya se ha indicado, **las ecuaciones** (6.29) **se verifican en el equilibrio termodinámico, lo que implica la existencia de interacciones en equilibrio entre las partículas. En cambio, una evolución pasiva de la densidad de energía, es decir, debida únicamente a la expansión, como sería $\rho \propto n \propto a^{-3}$ en el caso no relativista, implica que no existen interacciones entre las partículas**[9], como ya se mencionó en el capítulo segundo en la sección dedicada a la ecuación de estado (2.5.1). En cambio, **las partículas relativistas tienen la propiedad de verificar** (6.57) **siempre, porque la evolución de su densidad de energía debido a la expansión es la misma en el equilibrio que fuera de él,** como se demostrará en el siguiente apartado.

6.2 Evolución del universo temprano

6.2.1 Procesos en el universo temprano

Como se estudió someramente en el capítulo anterior, en el universo primordial los eventos principales son las transiciones de fase con roturas de simetría que tienen lugar

[8] Como se demostrará en 6.2.2, para que se verifique esta igualdad no es necesario que estén en equilibrio termodinámico, es suficiente con que lo hayan estado.

[9] A modo de ilustración considérese la nucleosíntesis del deuterio, que tiene lugar cuando protones y neutrones no son relativistas: la energía de ligadura del núcleo de deuterio se invierte en crear fotones, lo que disminuye la densidad de energía de las partículas no relativistas.

debido a que la expansión del universo baja la temperatura del mismo. En un universo estático y adiabático no se producirían roturas de simetría y las interacciones permanecerían unificadas según la temperatura a la que permaneciese el universo.

Como se ha discutido cualitativamente en los anteriores apartados, en el universo temprano un conjunto de partículas se mantienen en equilibrio termodinámico mediante una serie de reacciones en equilibrio (aniquilación-creación de pares, por ejemplo), obedeciendo por tanto las expresiones que para dichas partículas se han deducido en el apartado anterior para la densidad, densidad de energía y presión, y todas a la misma temperatura característica. Sin embargo, las reacciones que gobiernan los procesos que se producen en el universo temprano dependen de la temperatura. En un universo estático y adiabático las reacciones permanecerían en equilibrio indefinidamente y las partículas obedecerían las distribuciones del caso de equilibrio termodinámico a la temperatura a la que permaneciese el universo. Sin embargo, como las reacciones que mantienen una partícula en equilibrio termodinámico dependen de la temperatura y ésta disminuye con la expansión, en el transcurso del tiempo la velocidad de una reacción que involucre a una determinada partícula termina disminuyendo por debajo del ritmo de expansión, con lo que se rompe el equilibrio de la reacción. Éste no es un proceso que ocurra de forma instantánea, sino que tiene una cierta duración, y su evolución se estudiará en este apartado.

Considérese la velocidad de reacción de un proceso expresada en interacciones por unidad de tiempo,

$$\Gamma = \sigma v n. \tag{6.58}$$

La velocidad así definida es el producto de la sección eficaz de interacción σ que depende del tipo de interacción y de la temperatura, de la velocidad relativa v de las partículas en interacción, que en general depende de la temperatura[10], y de la densidad n de las partículas, que también depende de la temperatura según (6.28) o (6.29).

Para fijar ideas se considerará, a modo de ejemplo, el proceso de creación-aniquilación de pares partícula-antipartícula en equilibrio (6.17). Los factores que influyen en la abundancia de partículas i serán:

1. La sección eficaz del proceso de aniquilación, que a bajas energías es proporcional al inverso de la velocidad relativa de las partículas.
2. La velocidad relativa de las partículas, que disminuye con la temperatura.
3. La densidad, que disminuye debido a la expansión.
4. La disminución de la densidad debido a la aniquilación de pares.
5. El aumento de la densidad debido a la creación de pares a partir de fotones mediante la reacción inversa.

[10] Salvo en el caso de la velocidad de los fotones.

Cuando la velocidad de reacción sea menor que la escala de expansión, la reacción (6.17) ya no se hallará en equilibrio, y las densidades de las partículas no vendrán determinadas por las expresiones (6.28) ó (6.29) sino por (2.78) con $w = 0$.

En este ejemplo, a altas energías la media del producto de la sección eficaz por la velocidad es inversamente proporcional al cuadrado de la temperatura. Como la densidad de partículas relativistas es proporcional al cubo de la temperatura según (6.28), la velocidad de reacción es proporcional a la temperatura, mientras que $H \propto T^2$ (6.34). Por tanto, la expansión disminuye a mayor ritmo que la velocidad de reacción pero el equilibrio puede mantenerse en un amplio rango de temperaturas.

La situación cambia radicalmente a bajas energías, cuando las partículas dejen de ser relativistas, es decir, cuando la temperatura sea del orden de la masa en reposo de la partícula i ($T \sim m_i$, porque en las unidades utilizadas la constante de Boltzmann y la velocidad de la luz son igual a uno). Esta temperatura se denomina **temperatura umbral** de dicha partícula. Aunque en este caso el producto de la sección eficaz por la velocidad sea una constante, la velocidad de reacción (6.58) disminuye mucho más rápidamente al disminuir la temperatura que en el caso relativista, debido a la disminución en densidad causada por el factor de Boltzmann $e^{-m/T}$ que aparece en (6.29). En consecuencia, el paso al régimen no relativista implica necesariamente que el equilibrio empieza a perderse, y se perderá definitivamente cuando el ritmo de expansión sea mayor que el ritmo de la reacción. El resultado final del proceso será que los fotones ya no pueden crear pares al no tener suficiente energía, y las aniquilaciones se han detenido debido a la caída en la velocidad de reacción causada por la caída en densidad, dejando un pequeño remanente de pares partícula-antipartícula sin aniquilar, que constituye el **fósil** del equilibrio de la reacción (6.17). Además, también quedará, por supuesto, el exceso de remanente de partículas resultado de la asimetría materia-antimateria de la época GUT. Que se pierda el equilibrio de la reacción (6.17) y las abundancias de los pares se hayan **congelado**, evolucionando a partir de ahora pasivamente como $\rho \propto a^{-3}$, no significa que se haya perdido el equilibrio térmico con los fotones, que se mantiene mediante otras interacciones.

6.2.2 La ecuación de Boltzmann con colisiones

El proceso que tiene lugar durante la pérdida del equilibrio químico de una reacción implica que en rigor no pueden utilizarse las ecuaciones deducidas en el apartado (6.1.6) para el caso de equilibrio termodinámico. Para estudiar este proceso será preciso utilizar un formalismo más general: la aplicación de la ecuación de Boltzmann con colisiones al caso de un universo en expansión.

El **teorema de Liouville** establece que las partículas mantienen su distribución f en el espacio de fases salvo que las colisiones la modifiquen. Es decir, si $\dot{f}_c$ es la función de distribución de colisiones por unidad de tiempo, entonces

$$\frac{df}{dt} = \dot{f}_c \tag{6.59}$$

Si $f(t, x, v_x)$ es una función de distribución unidimensional, su derivada total respecto al tiempo será,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v_x}\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \dot{v}_x\frac{\partial f}{\partial v_x}. \tag{6.60}$$

Entonces una función de distribución en tres dimensiones $f(t, \bar{r}, \bar{p})$ verificará, generalizando (6.60) y aplicando (6.59),

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\dot{\bar{r}}\cdot\bar{\nabla}\right)f + \left(\dot{\bar{p}}\cdot\bar{\nabla}_p\right)f = \dot{f}_c \tag{6.61}$$

Esta ecuación constituye la ecuación de Boltzmann colisional. Si la función de distribución es homogénea, como se espera que suceda en un universo homogéneo, $\bar{\nabla}f = 0$. Como además $\dot{\bar{p}}\cdot\bar{\nabla}_p = \dot{p}\dfrac{\partial}{\partial p}$ donde p es el módulo del momento (ejercicio 6.4), resulta

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{p}\frac{\partial f}{\partial p} = \dot{f}_c \tag{6.62}$$

Ahora es preciso incorporar la expansión del universo a la ecuación de Boltzmann. Considérese que una partícula sale de $r = 0$ cuando $t = 0$, con una cierta velocidad $\dot{\bar{r}}$ y llega a un observador situado a una distancia $d\bar{r}$ en un tiempo dt. Durante dicho intervalo de tiempo, la partícula ha viajado una distancia $d\dot{\bar{r}} = Hd\bar{r}$ mientras que el observador situado en $d\bar{r}$ se aleja con una velocidad propia $d\dot{\bar{r}} = Hd\bar{r}$, según establece la ley de Hubble, que es válida a distancias cortas. Por tanto, para el observador la partícula ha variado su momento en $d\bar{p} = -H\bar{p}dt$, donde el signo negativo aparece dado que la expansión ha disminuido el momento. Es decir,

$$\dot{\bar{p}} = -H\bar{p}, \tag{6.63}$$

que se interpreta como una fuerza que se denomina **fuerza de rozamiento de Hubble**[11], y que permite escribir (6.62) en la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} - Hp\frac{\partial f}{\partial p} = \dot{f}_c. \tag{6.64}$$

[11] Del inglés *Hubble drag*.

Si, volviendo al ejemplo anterior, se considera que f disminuye debido a colisiones tipo partícula-antipartícula,

$$\dot{f}_c = -\int\langle\sigma v\rangle f\,\bar{f}\,d^3\bar{p} \tag{6.65}$$

donde $\langle\sigma v\rangle$ es el promedio del producto de la sección eficaz y la velocidad para la reacción de aniquilación, f y $\bar{f}$ son las funciones de distribución de partículas y antipartículas, respectivamente, y la integral (6.65) es con respecto a los momentos de las antipartículas. El factor $\langle\sigma v\rangle$ puede sacarse del signo integral aplicando el teorema de la media, por lo que se evaluará para una energía promedio adecuada. En este caso, e integrando con respecto los momentos de las antipartículas,

$$\dot{f}_c = -\langle\sigma v\rangle f\,\bar{n} \tag{6.66}$$

donde $\bar{n}$ es la densidad de antipartículas.

Sustituyendo (6.66) en (6.64), multiplicando ambos miembros de la ecuación resultante por $\dfrac{g_{\mathrm{ef}}^n}{2\pi^2}p^2dp$, e integrando con respecto a los momentos tenemos

$$\dot{n} + 3Hn = -\langle\sigma v\rangle n^2, \tag{6.67}$$

donde (ejercicio 6.5) el primer término del primer miembro se obtiene trivialmente de las propiedades de la derivación paramétrica de una integral, el segundo término del primer miembro mediante integración por partes considerando las propiedades de las funciones de distribución f (6.2), que tienden a cero exponencialmente en el infinito, y el segundo miembro por la definición de densidad de partículas (6.4) y considerando que las densidades de partículas y antipartículas son iguales (lo cual es cierto con mucha aproximación debido a la pequeña asimetría materia-antimateria). El segundo miembro de (6.67) es el producto de la velocidad de aniquilación de partículas (6.58) por la densidad de las mismas, es decir, la velocidad de aniquilación de partículas por unidad de volumen.

Sin embargo, en (6.67) solamente se ha tenido en cuenta la disminución de partículas debido a colisiones, no se ha tenido en cuenta el aumento en la densidad de partículas por creación de pares a partir de dos fotones. Para ello es preciso añadir al segundo miembro de (6.67) una función fuente F que represente la velocidad de creación de pares por unidad de volumen,

$$F = \langle\sigma v\rangle_{\gamma\gamma} n_\gamma^2, \tag{6.68}$$

donde n_γ es la densidad de fotones y $\langle\sigma v\rangle_{\gamma\gamma}$ es el promedio del producto de la sección eficaz por la velocidad para la reacción de creación de pares. En el equilibrio

termodinámico, la velocidad de creación por unidad de volumen es igual a la de aniquilación (principio del balance detallado), por lo que,

$$(\langle\sigma v\rangle_{\gamma\gamma} n_\gamma^2)_{eq} = (\langle\sigma v\rangle n^2)_{eq} \equiv \langle\sigma v\rangle_{eq} n_{eq}^2, \tag{6.69}$$

donde los subíndices indican que los términos se evalúan en las condiciones de equilibrio termodinámico a la temperatura T. En la hipótesis de que los promedios de la sección eficaz por la velocidad sean los mismos en el equilibrio que fuera de él, y teniendo en cuenta que la densidad de fotones mantiene su distribución de equilibrio mediante otras reacciones, de (6.69) y (6.68) se deduce que dicha función fuente será igual a $\langle\sigma v\rangle n_{eq}^2$. Por tanto, (6.67) queda

$$\dot{n} + 3Hn = -\langle\sigma v\rangle\left(n^2 - n_{eq}^2\right). \tag{6.70}$$

Expresando (6.70) en función de las densidades comóviles N en vez de las propias, teniendo en cuenta que

$$N = a^3 n, \tag{6.71}$$

entonces como es lógico la fuerza de Hubble desaparece, y después de operar resulta (ejercicio 6.5)

$$\frac{\mathrm{d}\ln N}{\mathrm{d}\ln a} = -\frac{\Gamma}{H}\left[1 - \left(\frac{N_{eq}}{N}\right)^2\right] \tag{6.72}$$

donde para su deducción se ha utilizado (6.58) y que la regla de la cadena permite escribir

$$\dot{N} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}a} Ha.$$

El inverso de la constante de Hubble es el llamado **tiempo de Hubble** $\tau_H = H^{-1}$ (ejercicio 2.5), que es el tiempo en el cual el universo dobla su factor de escala, y que también se puede expresar en función de la temperatura. Entonces el cociente Γ/H representa el número de interacciones en el tiempo de Hubble y es una función que disminuye con la temperatura.

La ecuación (6.72) es totalmente general y puede aplicarse a cualquier reacción que pierda el equilibrio debido al descenso de temperatura generado por la expansión. Vemos que tiene en cuenta todos los puntos enumerados en el anterior apartado como responsables de la abundancia de las partículas: la velocidad de reacción Γ tiene en cuenta los puntos 1 y 2; el factor de escala a y la función H incorporan la expansión, que constituía el punto 3; las densidades al cuadrado N y N_{eq} representan la aniquilación y la creación de pares, puntos 4 y 5. Finalmente, la ecuación ha sido deducida en un caso general, no necesariamente en condiciones de equilibrio como las (6.28) y (6.29).

El significado de la ecuación de Boltzmann en un universo en expansión (6.72) es claro:

En el equilibrio

Cuando la velocidad de reacción no es despreciable frente a la expansión, $\Gamma/H >> 1$. En este caso, si N es mayor que el valor correspondiente al equilibrio, el primer miembro es negativo. Es decir, la densidad N disminuirá para acercarse al valor N_{eq} correspondiente al equilibrio a esa temperatura. Si por el contrario N es menor que el valor correspondiente al equilibrio, el primer miembro es positivo. Es decir, la densidad aumentará para acercarse al valor N_{eq} correspondiente al equilibrio a esa temperatura. Por tanto, en cualquier caso la densidad evolucionará para conservar el equilibrio, lo cual se conseguirá siempre que el término Γ/H no sea demasiado pequeño, puesto que entonces la variación resultante en densidad no es suficiente como para mantener la reacción considerada en equilibrio.

Fuera del equilibrio

Cuando la tasa de expansión representada por H es mucho mayor que la velocidad de reacción Γ, entonces $\Gamma/H << 1$, y el primer miembro de (6.72) es prácticamente nulo. En consecuencia, la densidad comóvil N es constante y por tanto (6.72) implica que la densidad propia es inversamente proporcional al factor de escala al cubo. Esto es, tiene lugar una evolución pasiva, de la forma $n \propto a^{-3}$.

Como ya se ha indicado, el resultado de la pérdida del equilibrio de una reacción es distinto para las partículas relativistas que para las no relativistas:

- **Partículas relativistas:** las partículas relativistas en equilibrio termodinámico verifican (6.30), es decir $n_{eq} \propto T^3$, pero como ya sabemos que en el equilibrio térmico $T \propto a^{-1}$ (6.54), entonces según (6.71) N_{eq} permanece constante para las partículas relativistas. En consecuencia, si inicialmente existe un equilibrio termodinámico, es decir, $N = N_{eq}$, es posible mantener esta igualdad indefinidamente, independientemente del valor de Γ/H, puesto que se ha demostrado que N también permanece constante fuera del equilibrio. Es decir, las partículas relativistas evolucionan de la misma manera con la temperatura tanto si se hallan en equilibrio como fuera de él. Sin embargo, si $\Gamma/H << 1$, la partícula es incapaz de mantenerse en equilibrio mediante la reacción considerada, puesto que ya no sufre interacciones en el tiempo de Hubble. Por tanto puede concluirse que **aunque la partícula ya no sufra interacciones, conserva la misma densidad comóvil que tenía cuando se hallaba en equilibrio termodinámico**. Constituye lo que se denomina un **fósil caliente**[12]. Si la partí-

[12] En inglés, *hot relic*.

cula ya no interacciona en lo sucesivo mediante ninguna otra reacción con el resto de las partículas del universo, se dice que se ha **desacoplado**. En el caso de la radiación de fondo, que se crea por la pérdida de equilibrio del esparcimiento Thomson de fotones con electrones, después del **desacoplamiento** los fotones no interaccionan más con la materia, pero su distribución sigue todavía una ley de cuerpo negro, aunque a una temperatura que disminuye con la expansión según (6.54). La razón física de este fenómeno reside en que, al no sufrir más interacciones con la materia, la función de distribución de los fotones se mantiene invariante (por el teorema de Liouville). Además es un invariante adiabático (es decir, verifica (6.55), que ya se ha demostrado que permite deducir la conocida variación de la temperatura con el factor de escala para las partículas relativistas) por lo que la temperatura característica de la distribución desacoplada evoluciona como (6.54).

- **Partículas no relativistas:** en este caso se enmarca el ejemplo de la reacción de creación-aniquilación de pares. Al bajar la temperatura, la velocidad de reacción disminuye y $\Gamma/H<<1$. A partir de este momento, la densidad comóvil de partículas no relativistas se mantiene constante. Se dice que la población se ha **congelado**[13], constituyendo un **fósil frío**[14] que evoluciona pasivamente como $n \propto a^{-3}$, es decir, según la conocida ecuación de estado de presión nula cuya densidad de energía es (2.78) con $w = 0$.

En conclusión, si $\Gamma/H <<1$, es $n \propto a^{-3}$, que implica que ya no tiene lugar la reacción estudiada y la densidad solamente varía como consecuencia de la expansión, y si $\Gamma/H >>1$ la reacción se mantiene en equilibrio, $N \approx N_{eq}$.

6.2.3 Aproximaciones

Para establecer a qué temperatura tiene lugar la pérdida de equilibrio de una reacción y las características de los fósiles que se generan, es preciso resolver numéricamente la ecuación (6.72) en cada caso. Sin embargo, para los fines de este texto, bastará con efectuar algunas aproximaciones sencillas.

Aniquilación de pares

Las elevadas energías del universo temprano implican que existe un equilibrio de creación y aniquilación de pares partícula-antipartícula. A medida que el universo se expande y disminuye la temperatura de los fotones, se crearán cada vez más

[13] Del inglés *frozen out*.
[14] En inglés, *cold relic*.

fotones a costa de la sucesiva desaparición de partículas de energías cada vez menores, salvo un «residuo» resultante de la bariosíntesis (apartado 5.5) que es muy inferior al número de fotones.

Partícula	Símbolo	Masa (MeV)	g
Tauón	τ^-	1777	2
Neutrón	n	939	2
Protón	p	938	2
Pión	π^+	140	1
Muón	μ^-	106	2
Electrón	e^-	0.511	2

Tabla 6.1 Principales partículas del universo temprano, sus masas y grados de libertad. Las antipartículas correspondientes tienen las mismas masas y grados de libertad. Además, existe el pión neutro π^0.

La tabla 6.1 lista las principales partículas que existen en el universo temprano en orden de energías. Nótese que la transición cuark-hadrón tiene lugar a una temperatura de unos 200 MeV.

Como ya se ha estudiado en el apartado anterior, la reacción de creación-aniquilación de pares empieza a perder el equilibrio cuando la temperatura desciende por debajo del umbral de la partícula y éstas se tornan no relativistas. Por tanto, bastará con considerar

$$T = m_i \tag{6.73}$$

como una temperatura aproximada del **inicio de la pérdida de equilibrio del proceso de creación-aniquilación de pares**. Sin embargo, es importante destacar que la distribución de energías de los fotones es tal que aunque la temperatura del máximo de su distribución haya descendido por debajo de la necesaria para la creación de pares, todavía existirán fotones con energías superiores que podrán crear pares de la partícula en cuestión, aunque en menor cantidad (ejercicio 6.6). La creación de pares irá disminuyendo rápidamente a medida que se expande el universo.

La figura 6.1 muestra los resultados de la resolución numérica de la ecuación de Boltzmann para el caso de la aniquilación electrón-positrón. Puede apreciarse que la pérdida de equilibrio empieza en la temperatura umbral $T = m_e$, pero el proceso de aniquilación continúa hasta $T = m_e/25$, dejando un residuo de positrones despreciable como fósil frío, así como los electrones resultado de la asimetría materia-antimateria. Cuando $T = m_e/10$, solamente queda 1 de cada 1000 pares iniciales. Nótese que $n_e \propto n_\gamma \propto T^3 \propto a^{-3}$ para partículas relativistas en equilibrio y para partículas no relativistas después de la aniquilación (fuera del equilibrio).

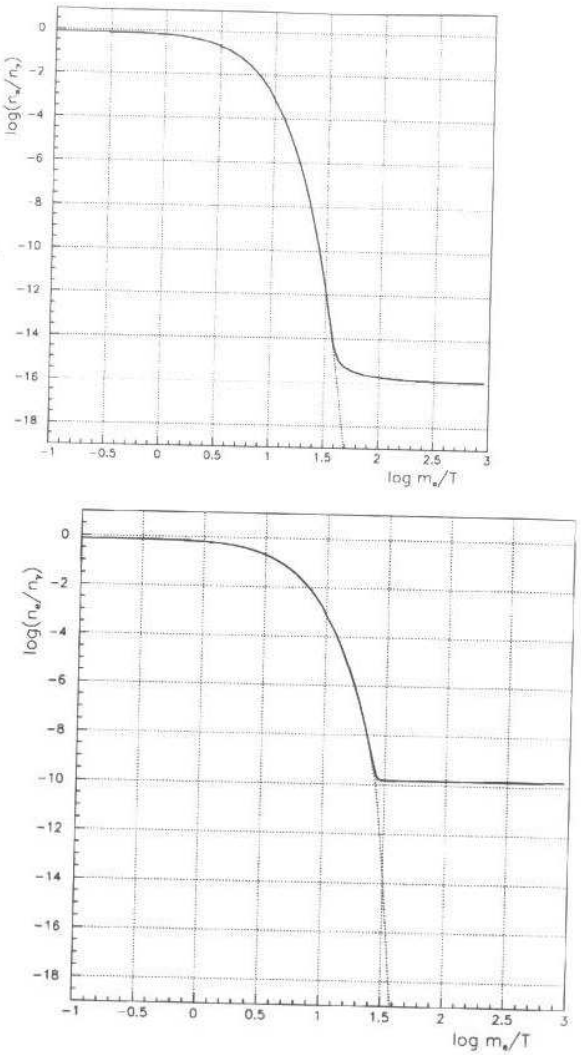


Figura 6.1 Disminución de la densidad de electrones con la temperatura obtenida integrando la ecuación de Boltzmann (6.72). La densidad disminuye a partir de la temperatura umbral $T \approx m_e$ debido a la pérdida de equilibrio de la reacción de creación-aniquilación (6.17). Arriba: con una simetría perfecta materia-antimateria, el proceso de aniquilación continúa hasta $T = m_e/40$, dejando un fósil frío de electrones y positrones sin aniquilar. La línea de puntos representa el caso de equilibrio térmico. Abajo: con una asimetría materia-antimateria, el proceso de aniquilación continúa hasta $T = m_e/25$, dejando un fósil frío de electrones muy superior al de positrones. La línea de puntos muestra la evolución de la densidad de positrones. De Rich, 2001. Reproducido con permiso de Springer Science and Business Media

Hay que señalar que **la aniquilación de pares producirá un incremento en la temperatura de los componentes en equilibrio**. Efectivamente, como la entropía se conserva, $S_a = S_d$, donde los subíndices a y d indican antes y después de la aniquilación, respectivamente. Entonces, como $S \propto a^3 s$, la ecuación (6.51) permite escribir

$$T_d = \frac{a_a}{a_d}\left(\frac{(g^s_{ef})_a}{(g^s_{ef})_d}\right)^{1/3} T_a, \qquad (6.74)$$

es decir, ha aparecido un factor adicional

$$\left(\frac{(g^s_{ef})_a}{(g^s_{ef})_d}\right)^{1/3} > 1 \qquad (6.75)$$

que es mayor que la unidad porque la aniquilación de una especie ha reducido el número de grados de libertad efectivos. Sin embargo, como las diferencias de temperatura debidas al factor (6.75) son pequeñas, menores que un orden de magnitud (ejercicio 6.7), la evolución de la temperatura vendrá dominada por la expansión, por lo que se acostumbra a considerar que la temperatura solamente depende del inverso del factor de escala.

Desacoplamiento/congelación

El **desacoplamiento** de una partícula, es decir, el momento en que ya no sigue interactuando según una reacción dada y abandona el equilibrio térmico generando un **fósil caliente** o el momento de la **congelación** de la abundancia de una partícula generando un **fósil frío** puede estimarse mediante la igualdad

$$\Gamma/H = 1 \qquad (6.76)$$

Como Γ y H dependen de la temperatura, la anterior igualdad permite estimar, con bastante aproximación, la temperatura del desacoplamiento o la congelación de la abundancia (ejercicio 6.8).

La justificación de (6.76) como estimador del momento en que se pierde el equilibrio es que en el apartado anterior se ha demostrado que el equilibrio se mantiene cuando $\Gamma/H >> 1$ mientras que se ha perdido cuando $\Gamma/H << 1$.

6.3 Época hadrónica

Inicio[15]: 2.5×10^{-5} s (confinamiento de los cuarks).
Final: 5×10^{-5} s (empieza la aniquilación de piones).
Composición: Hadrones, leptones y fotones.
Descripción: Es una época muy breve en la que dominan las interacciones fuertes entre piones.

La época empieza después del confinamiento de los cuarks (~200 MeV), cuando los hadrones empiezan a existir como combinación de cuarks, y termina con la desaparición de los últimos hadrones, los mesones pi. Esta desaparición tiene lugar

[15] Todos los tiempos han sido estimados utilizando la expresión (6.35).

como una aniquilación partícula-antipartícula entre π^+ y π^- que empieza a la energía umbral de su masa en reposo, 140 MeV, y la desintegración de π^0 para dar fotones, que tiene lugar a la misma energía. Al final de la época queda solamente la pequeña fracción de hadrones resultado de la asimetría materia-antimateria.

Esta época recibe su nombre porque las interacciones fuertes pión-pión son dominantes. Por este motivo no se puede considerar que las partículas interactúen débilmente y por tanto las relaciones (6.28) y (6.29) no se verifican exactamente.

6.3.1 Composición

En esta era, que es muy breve, el universo se compone de:

- **Fotones.**
- **Leptones:** e^-, e^+, μ^-, μ^+ y τ^-, τ^+ (estos últimos no relativistas y en rápido proceso de aniquilación mutua) y sus neutrinos ν_e, $\bar{\nu}_e$, ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$, ν_τ, $\bar{\nu}_\tau$.
- **Hadrones:** nucleones p, $\bar{p}$, n, $\bar{n}$ no relativistas y en proceso de aniquilación partícula-antipartícula, y los mesones π^+, π^- y π^0.

6.3.2 Interacciones

Las principales interacciones que durante esta época mantienen el equilibrio termodinámico son, por ejemplo:

- **Electromagnética:** $p + \bar{p} \leftrightarrow n + \bar{n} \leftrightarrow \mu^+ + \mu^- \leftrightarrow \pi^+ + \pi^- \leftrightarrow e^+ + e^- \leftrightarrow \pi^0 \leftrightarrow 2\gamma$. (6.77)
- **Débil:** $e^- + \mu^+ \leftrightarrow \nu_e + \nu_\mu$, $e^- + p \leftrightarrow \nu_e + n$, $\mu^- + p \leftrightarrow \bar{\nu}_\mu + n$, ... (6.78)
  $e^+ + e^- \leftrightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e$, $e^\pm + \nu_e \leftrightarrow e^\pm + \nu_e$, ...
- **Fuerte:** entre piones.

6.3.3 Potenciales químicos

Según se demostró en (6.1.5) el potencial químico de las partículas relativistas puede despreciarse. En este apartado se aplicarán las relaciones generales deducidas en (6.1.5) al caso de la época hadrónica.

Despreciando las interacciones pión-pión, lo que se demuestra que es una buena aproximación, de la conservación de la carga eléctrica (6.23) se obtiene:

$$F(x_p) + F(x_{e^+}) + F(x_{\mu^+}) = 0 \tag{6.79}$$

Procediendo análogamente para el número bariónico (6.24),

$$F(x_p) + F(x_n) \approx 0. \tag{6.80}$$

Para los números leptónicos (6.26), despreciando las partículas tau, ya en rápida aniquilación,

$$\begin{aligned} F(x_{e^+}) + \frac{1}{2} F(x_{\nu_e}) &\approx 0 \\ F(x_{\mu^+}) + \frac{1}{2} F(x_{\nu_\mu}) &\approx 0. \end{aligned} \tag{6.81}$$

Finalmente, la reacción: $e^+ + \mu^- \leftrightarrow \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_\mu$ proporciona

$$x_\mu = x_{e^+} + x_{\nu_e} + x_{\nu_\mu} \tag{6.82}$$

y la reacción $e^+ + n \leftrightarrow \bar{\nu}_e + p$ implica,

$$x_p = x_{e^+} + x_n + x_{\nu_e} \tag{6.83}$$

En definitiva, las ecuaciones (6.79), (6.80), (6.81), (6.82) y (6.83) constituyen un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas (x_p, x_n, x_{e^+}, x_{μ^+}, x_{ν_e}, x_{ν_μ}) donde todas las ecuaciones son asimétricas en los parámetros de degeneración, por lo que la única solución con sentido físico es que los potenciales químicos de estas partículas sean todos nulos.

Sin embargo, ya en el transcurso de la misma época hadrónica, los potenciales químicos de protones y neutrones no pueden considerarse nulos puesto que la aproximación (6.80), obtenida de la conservación del número bariónico, solamente se puede considerar válida cuando las densidades de protones y antiprotones, así como de neutrones y antineutrones, sean parecidas. Como en esta época los pares protón-antiprotón y neutrón-antineutrón se están aniquilando, esta aproximación empieza a dejar de ser válida y la asimetría de materia-antimateria no puede despreciarse. Sin embargo, incluso cuando estos pares se hayan aniquilado, todavía se puede despreciar la contribución de los protones en (6.79): las demás partículas cargadas son mucho más numerosas. Como además las ecuaciones (6.81) siguen siendo válidas, el resultado final es que, aunque los potenciales químicos de protones y neutrones empiezan a no poderse despreciar, los potenciales químicos de las demás partículas pueden seguir considerándose nulos durante esta era.

6.4 Época leptónica

Inicio: 5×10^{-5} s (aniquilación de piones).
Final: 4 s (empieza la aniquilación electrón-positrón).

Composición: Leptones y fotones, y pequeñas cantidades de protones y neutrones.
Descripción: Durante esta época se aniquilan los muones y antimuones, se desacoplan los neutrinos y se aniquilan los electrones y positrones, marcando el fin de esta era.

La época empieza cuando termina la hadrónica y la mayoría de los piones, los últimos hadrones que quedan, salvo pequeñas cantidades de protones y neutrones resultantes de la asimetría materia-antimateria, ya han sido aniquilados. Inmediatamente empieza el proceso de aniquilación de muones y mucho después tiene lugar el desacoplamiento de los neutrinos. La época termina con el inicio de la aniquilación de los pares electrón-positrón a una temperatura de ~0.5 MeV. Esta época recibe su nombre por la preponderancia de las interacciones débiles durante la misma.

6.4.1 Composición e interacciones

El universo se compone de:

- **Fotones.**
- **Leptones:** e^-, e^+, μ^-, μ^+ y sus neutrinos ν_e, $\overline{\nu}_e$, ν_μ, $\overline{\nu}_\mu$, ν_τ, $\overline{\nu}_\tau$.
- **Hadrones:** nucleones p, n en pequeña cantidad, remanente de la asimetría materia-antimateria.

Las interacciones dominantes que tienen lugar durante esta época son las débiles (6.78), que se encargan de mantener el equilibrio termodinámico. Cuando a poco de empezar la época leptónica se inicie la aniquilación de pares muón-antimuón, a una energía de ~106 MeV que equivale, según (6.35) a 9×10^{-5} s, sus neutrinos seguirán teniendo un potencial químico nulo, como se deduce de despreciar los muones en $L_\mu \approx 0$. Asimismo también tendrán un potencial químico nulo los electrones y sus neutrinos (relaciones 6.81). Por tanto, los muones siguen teniendo un potencial químico nulo como demuestra la ecuación (6.82). En cualquier caso, implica que **el potencial químico de los neutrinos puede despreciarse**[16].

6.4.2 Desacoplamiento de los neutrinos

Los neutrinos interaccionan con electrones y positrones a través de la interacción débil (6.78). El número de interacciones por unidad de tiempo será, por tanto,

[16] Aunque en propiedad, el potencial químico de los neutrinos no puede determinarse y, como se mencionará en el apartado correspondiente, la degeneración de los neutrinos (es decir, que su potencial químico y por tanto su parámetro de degeneración no sea nulo) afectaría a la nucleosíntesis. Ello podría suceder si el número leptónico no se conservase.

$$\Gamma_d = \sigma_d n, \tag{6.84}$$

teniendo en cuenta que en el sistema de unidades utilizado es $c=1$, donde n es la densidad de partículas, y σ_d es la sección eficaz de la interacción débil,

$$\sigma_d \approx \left(\frac{\alpha T}{m_W^2}\right)^2, \tag{6.85}$$

donde α es la constante de acoplamiento débil: $\alpha^{-1}\sim137$, y m_W=80 GeV es la masa del bosón $W^\pm$ mediador de la interacción débil.

Por otro lado, de (6.34),

$$H \approx \frac{T^2}{m_P}. \tag{6.86}$$

De las tres ecuaciones anteriores y de (6.30) se obtiene

$$\frac{\Gamma_d}{H} \approx \frac{\alpha^2 \zeta(3) g_{ef}^n m_p}{\pi^2 m_W^4} T^3 \tag{6.87}$$

Teniendo en cuenta que los protones y neutrones quedan en poca cantidad y que las partículas $\mu^\pm$ ya han desaparecido, en el universo solamente quedan fotones (g_γ=2), electrones y positrones ($g_{e^\pm}$=2) y todas las especies de neutrinos y antineutrinos (g_ν =1). Todas estas partículas se encuentran todavía en equilibrio térmico. Por tanto,

$$\begin{aligned} g_{ef}^n &= \sum_{i=\text{bosones}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \sum_{j=\text{fermiones}} \frac{3}{4} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^3 = \\ &= g_\gamma + \frac{3}{4}\left(g_{e^-} + g_{e^+} + g_{\nu_e} + g_{\overline{\nu}_e} + g_{\nu_\mu} + g_{\overline{\nu}_\mu} + g_{\nu_\tau} + g_{\overline{\nu}_\tau}\right) = \\ &= 2 + \frac{3}{4}(2+2+1+1+1+1+1+1) = 9.5 \end{aligned} \tag{6.88}$$

que es del orden de $\pi^2/\zeta(3)$.

Si aplicamos la condición Γ_d/H=1, a (6.87), teniendo en cuenta (6.88), se obtiene una estimación del orden de magnitud de la temperatura del desacoplamiento

$$T_{dv} \approx \left(\frac{m_W^4}{\alpha^2 m_P}\right)^{1/3} \approx 4 \text{ MeV}, \tag{6.89}$$

es decir, 6×10^{-2} s después de la Gran Explosión.

Tal y como se dedujo del análisis de la ecuación de Boltzmann (6.2.2) para el caso relativista, una vez los neutrinos se han desacoplado y se expanden libremente sin interaccionar más, mantienen la misma distribución que tenían en el equilibrio: una distribución de Fermi-Dirac, con una temperatura efectiva T_ν, que evoluciona de la forma siguiente:

$$T_\nu = T_{\rm eq}\frac{a_{\rm eq}}{a}, \tag{6.90}$$

donde $a_{\rm eq}$ es el valor del factor de escala en el momento del desacople. Esta igualdad se verifica porque, como ya se ha demostrado en (6.2.2), después del desacoplamiento la densidad comóvil permanece constante e igual al valor que tenía en el equilibrio $N=N_{\rm eq}$ y además su función de distribución se mantiene y por tanto la primera ecuación de (6.28) se sigue verificando después del desacoplamiento, con lo de (6.71) resulta $(aT_\nu)^3=(a_{\rm eq}T_{\rm eq})^3$.

Pero aplicando el mismo razonamiento al caso de la temperatura de los fotones, se obtiene la misma expresión (6.90), que por tanto aplica también a la evolución de la temperatura del resto de partículas en equilibrio térmico. Es decir, **la temperatura de los neutrinos después del desacoplamiento evoluciona como si todavía estuvieran en equilibrio térmico**, como ya se había establecido como una de las consecuencias de la ecuación de Boltzmann (6.2.2). **Esta situación se mantiene hasta la aniquilación electrón-positrón, que produce un calentamiento** (según se demostró en 6.2.3) **de los componentes en equilibrio térmico, pero no de los neutrinos, puesto que éstos están desacoplados.**

6.4.3 Desacoplamiento protón/neutrón-neutrino

Los neutrones y los protones hace tiempo que no son relativistas, puesto que su masa en reposo es del orden de 940 MeV. Sus abundancias vienen determinadas por el equilibrio químico de las reacciones responsables de la conversión de protones en neutrones y viceversa,

$$\nu_e + n \leftrightarrow p + e^- \tag{6.91}$$

$$p + \overline{\nu}_e \leftrightarrow e^+ + n, \tag{6.92}$$

gobernadas por la interacción débil. En dichas reacciones siguen interviniendo los neutrinos incluso después del desacoplamiento, puesto que la velocidad de reacción de (6.91) y (6.92) es mayor, para la misma temperatura, que la de las reacciones entre neutrinos y electrones y positrones de (6.78). A pesar de ello, los neutrinos ya pueden considerarse desacoplados puesto que la densidad de neutrones y protones (el residuo de la asimetría materia-antimateria, que es del orden de 1 por

cada 10^{10} partículas) es muy inferior a la de electrones y positrones (que en este momento, antes de su aniquilación, y por el mismo motivo, son 10^{10} veces más numerosos), y bajo el punto de vista de los neutrinos, las reacciones (6.91) y (6.92) pueden despreciarse frente a las que tenían lugar con electrones y positrones.

El equilibrio químico de las reacciones (6.91) y (6.92) mantiene el equilibrio termodinámico de protones y neutrones, por tanto la razón de la densidad de neutrones con respecto la de protones vendrá dada por el cociente de las relaciones (6.29) para cada especie, incluyendo los potenciales químicos. Teniendo en cuenta que los grados de libertad son los mismos, y los potenciales químicos y las masas muy parecidas[17],

$$\frac{n_n}{n_p} = \frac{g_n\left(\frac{m_nT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{(\mu_n-m_n)/T}}{g_p\left(\frac{m_pT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{(\mu_p-m_p)/T}} \approx e^{-(m_n-m_p)/T}. \tag{6.93}$$

Este cociente es, por tanto, una función de la temperatura. **A temperaturas mayores que la diferencia de masas entre el neutrón y el protón,** que es del orden de 1.29 MeV, la razón es del orden de la unidad: **hay aproximadamente el mismo número de protones que de neutrones.** Cuando la temperatura va acercándose, en su descenso debido a la expansión, a valores del orden de dicho umbral, **el cociente disminuye con la expansión y aumenta la fracción de protones.** Sin embargo, la ecuación (6.93) solamente es válida mientras los protones y neutrones se encuentren en equilibrio termodinámico por el equilibrio químico de las reacciones (6.91) y (6.92). Un cálculo aproximado indica que, para la reacción (6.91),

$$\Gamma_{\nu n} \approx 0.45\left(\frac{T}{1\ \text{MeV}}\right)^5\ \text{s}^{-1}, \tag{6.94}$$

donde T es la temperatura de los fotones. Los neutrinos conservan la misma temperatura que los fotones a pesar de estar ya desacoplados de los electrones y positrones, como ha sido demostrado en el apartado anterior.

Utilizando (6.34) e imponiendo $\Gamma_{\nu n}/H = 1$, puede estimarse la temperatura a la cual se desacoplan los neutrinos de los protones y neutrones (ejercicio 6.9), que re-

sulta ser del orden de 0.70 MeV, es decir, 2 s después de la Gran Explosión. Cuando la temperatura llega a dicho valor, las reacciones (6.91) y (6.92) cesan, y la fracción (6.93) queda **congelada** al valor

$$\frac{n_n}{n_p} \approx e^{-(1.29)/0.70} = 0.16 \tag{6.95}$$

puesto que la pérdida del equilibrio en las reacciones (6.91) y (6.92) no permite crear ni destruir más protones ni neutrones, y además su densidad evoluciona igual.

6.4.4 Aniquilación de pares electrón-positrón

La aniquilación de pares electrón-positrón empieza a la temperatura umbral de 0.511 MeV, su masa en reposo, que según (6.35) equivale a una edad del universo de unos 4 segundos. Los pares dejan de ser relativistas y se aniquilan, dando más fotones e incrementando su temperatura. De acuerdo con (6.74) la temperatura de los fotones después de la aniquilación será

$$T = \frac{a_a}{a}\left(\frac{(g^s_{ef})_a}{(g^s_{ef})_d}\right)^{1/3} T_a, \tag{6.96}$$

donde el subíndice *a* indica el instante de tiempo anterior a la aniquilación. En cambio, puesto que la densidad comóvil de los neutrinos permanece constante, la temperatura de los neutrinos para los mismos instantes de tiempo verificará (6.90),

$$T_\nu = \frac{a_a}{a} T_{\nu a}. \tag{6.97}$$

Sin embargo, se ha demostrado que antes de la aniquilación las dos temperaturas son iguales[18], $T_a = T_{\nu a}$. Los grados de libertad efectivos serán, para las partículas en equilibrio térmico,

$$\begin{aligned} (g^s_{ef})_a &= g_\gamma + \frac{7}{8}\left(g_{e^-} + g_{e^+}\right) = 2 + \frac{7}{8}(2+2) = \frac{11}{2} \\ (g^s_{ef})_d &= g_\gamma = 2 \end{aligned} \tag{6.98}$$

Por lo que, de las tres últimas ecuaciones, se concluye finalmente que

$$T = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} T_\nu, \tag{6.99}$$

[17] De las ecuaciones (6.91) y (6.92) se infiere que, si los potenciales químicos de electrones, positrones y neutrinos electrónicos son prácticamente nulos, los potenciales químicos de protones y neutrones son iguales.

relación que se mantiene en cualquier instante de tiempo. Para la edad actual,

$$T_{\nu 0} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_0 = 1.95 \text{ K}. \tag{6.100}$$

Este episodio termina la época leptónica. Salvo pequeñas cantidades de protones, neutrones, electrones, etc. resultado de la asimetría materia-antimateria que se supone tuvo lugar al final de la época GUT, y los neutrinos desacoplados, el universo se compone esencialmente de fotones, lo cual da lugar a la siguiente era. Antes de seguir adelante, sin embargo, se revivirá un tema ya tratado cualitativamente en el capítulo primero: la masa del neutrino.

6.4.5 La masa del neutrino

Utilizando (6.99) puede calcularse la densidad actual de neutrinos teniendo en cuenta que, en el momento del desacoplamiento son partículas relativistas, y por tanto después del desacoplamiento siguen verificando (6.28), como se demostró en (6.2.2). Separando su contribución a (6.30) (o aplicando (6.28) para la contribución de todos los neutrinos) se obtiene, en unidades físicas,

$$\begin{aligned} n_{\nu 0} &= \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g^n_{ef}\left(\frac{T_0}{\hbar c}\right)^3 = \frac{\zeta(3)}{\pi^2}\frac{3}{4}\left(g_{\nu_e} + g_{\bar\nu_e} + g_{\nu_\mu} + g_{\bar\nu_\mu} + g_{\nu_\tau} + g_{\bar\nu_\tau}\right)\left(\frac{T_{\nu 0}}{T_0}\right)^3\left(\frac{T_0}{\hbar c}\right)^3 = \\ &= \frac{6\zeta(3)}{11\pi^2} N_\nu \left(\frac{T_0}{\hbar c}\right)^3, \end{aligned} \tag{6.101}$$

donde N_ν es el número de especies de neutrino y T_0 se expresa en eV.

De acuerdo con los rangos de masa en reposo que se barajan para el neutrino (véase sección 1.6.4), y según (6.100), en el instante actual los neutrinos ya no serían relativistas. Entonces su *densidad de masa* actual, supuesta una masa promedio para todos ellos, será (6.29),

$$\rho_{\nu 0} = \langle m_\nu \rangle n_{\nu 0}. \tag{6.102}$$

El parámetro de densidad (2.93) debido únicamente a los neutrinos puede obtenerse de las expresiones (6.101) y (6.102), de la definición de densidad crítica en el instante actual (2.92) que en las nuevas unidades introducidas en este capítulo incluye un factor G^{-1}, y de la conversión de unidades de masa a eV,

$$\Omega_{\nu 0} = \frac{\rho_{\nu 0}}{\rho_{c0}} = \frac{16\zeta(3)}{11\pi}\frac{G}{H_0^2}\left(\frac{T_0}{\hbar c}\right)^3 N_\nu \langle m_\nu \rangle = 0.025\, N_\nu \left\langle \frac{m_\nu}{\text{eV}} \right\rangle. \tag{6.103}$$

Asumiendo que solamente hay tres especies de neutrinos y teniendo en cuenta el rango de masas asignadas por el momento al neutrino más ligero (1.19), se obtiene

$$0.004 < \Omega_{\nu 0} < 0.017, \tag{6.104}$$

valor que es significativamente inferior al de la materia no relativista total, lo que confirma que **la contribución de los neutrinos a la materia oscura no es significativa**. Sin embargo, el valor (6.104) es superior, como se verá, al debido a los fotones del fondo cósmico.

6.5 Época fotónica

Inicio: 4 s (aniquilación electrón-positrón).

Final: 6.1×10^4 a (equilibrio materia-radiación).

Composición: Fotones, pequeñas cantidades de protones, neutrones y electrones resultado de la asimetría materia-antimateria, que pronto producen núcleos por nucleosíntesis, así como los neutrinos ya desacoplados.

Descripción: Durante esta época, que tiene una gran duración, se produce la nucleosíntesis primordial. La época empieza con la aniquilación de pares electrón-positrón (0.511 MeV) y termina cuando la radiación deja de dominar energéticamente el universo, produciéndose un cambio de era.

6.5.1 Reacciones

- Las reacciones más importantes que tienen lugar durante esta época corresponden a la nucleosíntesis primordial, y ya se han descrito en el capítulo primero. Esencialmente son:

$$p + n \leftrightarrow {}^2\mathrm{H} + \gamma \tag{6.105}$$

$${}^2\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} \leftrightarrow {}^3\mathrm{He} + n \quad \text{o bien} \quad {}^2\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} \leftrightarrow {}^3\mathrm{H} + p \tag{6.106}$$

$${}^3\mathrm{He} + {}^2\mathrm{H} \leftrightarrow {}^4\mathrm{He} + p \quad \text{o bien} \quad {}^3\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} \leftrightarrow {}^4\mathrm{He} + n \tag{6.107}$$

- Una vez ha tenido lugar la nucleosíntesis, y ya a menores energías, las reacciones de combinación siguientes se hallan en equilibrio:

$$p + e^- \leftrightarrow \mathrm{H} + \gamma \tag{6.108}$$

$$\mathrm{He}^{2+} + e^- \leftrightarrow \mathrm{He}^+ + \gamma \tag{6.109}$$

$$\mathrm{He}^+ + e^- \leftrightarrow \mathrm{He} + \gamma \tag{6.110}$$

- También se produce el esparcimiento Compton de fotones por electrones libres (6.20), así como doble Compton (6.18) y radiación de frenado (6.19). Al final de esta época, y debido a la disminución de la temperatura, el esparcimiento Compton se convierte en esparcimiento Thomson.

En esta época, dado que ya se han aniquilado todos los pares, no puede despreciarse la asimetría materia-antimateria, y **los potenciales químicos ya no pueden considerarse nulos. De esta regla se exceptúan los neutrinos,** como se demuestra aplicando la conservación y nulidad de los números leptónicos, despreciando los demás leptones.

6.5.2 Principios de la nucleosíntesis primordial del ^{2}H y ^{4}He

Como ya se discutió en el capítulo primero (1.8.2), la nucleosíntesis del helio no puede empezar hasta que no empieza a formarse deuterio:

$$p + n \leftrightarrow {}^2\mathrm{H} + 2.225 \text{ MeV}. \tag{6.111}$$

Como la asimetría materia-antimateria ha generado una partícula en exceso por cada 10^{10} pares partícula-antipartícula, cada aniquilación de un tipo dado de partícula ha generado 2×10^{10} fotones. Por este motivo, aunque la temperatura de los fotones baje por debajo de la energía necesaria para fotodisociar el deuterio, la gran cantidad de fotones existentes (ejercicio 6.11) implica que, según la ley de Planck, seguirá existiendo una cantidad significativa de fotones con energías superiores, que seguirán impidiendo la formación de deuterio, manteniendo la reacción (6.105) en equilibrio e impidiendo la nucleosíntesis. Es lo que se denomina el **cuello de botella del deuterio.**

Para calcular la temperatura a la cual la formación de deuterio empieza a ser significativa, consideraremos que el equilibrio implicado por la reacción (6.105) permite expresar las densidades de protones, neutrones y deuterio, que como ya se ha dicho no son relativistas, según la ecuación (6.29),

$$n_i = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \mathrm{e}^{\frac{\mu_i - m_i}{T}} \quad \text{donde } i = p, n, {}^2\mathrm{H} \tag{6.112}$$

Como la reacción (6.105) implica que

$$\mu_{{}^2\mathrm{H}} = \mu_p + \mu_n \tag{6.113}$$

y

$$m_{{}^2\mathrm{H}} = m_p + m_n - L, \tag{6.114}$$

donde L es la energía de ligadura, que es de 2.225 MeV (6.111), entonces las ecuaciones (6.113) y (6.114) permiten expresar la densidad de deuterio de la ecuación (6.112) de la manera siguiente,

$$n_{^2\mathrm{H}} = n_p n_n \left(\frac{2\pi(m_p + m_n - L)}{m_p m_n T} \right)^{3/2} \mathrm{e}^{L/T} \tag{6.115}$$

teniendo en cuenta que los grados de libertad del deuterio son los mismos que el producto de grados de libertad de los protones y neutrones.

Entonces la fracción de deuterio producido por barión será, en unidades físicas,

$$\frac{n_{^2\mathrm{H}}}{n_\mathrm{b}} = \frac{n_p}{n_\mathrm{b}} \frac{n_n}{n_\mathrm{b}} n_\mathrm{b} \left(\frac{2\pi(m_p + m_n - L)}{m_p m_n T} \right)^{3/2} (\hbar c)^3 \mathrm{e}^{L/T}, \tag{6.116}$$

donde n_b *es la densidad de bariones, es decir, de nucleones libres o ligados, mientras que* n_p *y* n_n *son las densidades de protones y neutrones libres*, respectivamente. Por tanto, antes de la nucleosíntesis $n_\mathrm{b} = n_p + n_n$, durante la nucleosíntesis $n_\mathrm{b} \approx n_p + n_n + n_{^4\mathrm{He}}$ y después de la nucleosíntesis todos los neutrones han formado helio, puesto que según (6.95) existe un exceso de protones con respecto los neutrones, y $n_\mathrm{b} \approx n_p + n_{^4\mathrm{He}}$, salvo pequeñas cantidades de otros núcleos.

La ecuación (6.116) es análoga a la ecuación de Saha para la recombinación del hidrógeno y, como ella, implica una transición brusca al disminuir la temperatura. Es decir, la producción de deuterio tiene lugar de forma súbita. Por este motivo, aunque esta ecuación solamente es válida en la hipótesis de partida, equilibrio de la reacción (6.105), que se pierde cuando se produce el deuterio, puede utilizarse para estimar la temperatura a la que empieza la producción de deuterio.

A este fin es preciso efectuar una serie de aproximaciones adicionales:

- Aproximar los cocientes n_p/n_b y n_n/n_b de la ecuación (6.116) expresándolos en función de la fracción de neutrones a protones (6.95), puesto que antes de empezar la nucleosíntesis $n_\mathrm{b} = n_p + n_n$. Incluso considerando una disminución de la densidad de neutrones del 10-20% o superior con respecto la fracción congelada (6.95) debido a la desintegración del neutrón, el producto de ambos cocientes es del orden de 0.1.
- Estimar la densidad de bariones n_b producidos por nucleosíntesis primordial, a partir de su densidad actual $n_{\mathrm{b}0}$, suponiendo una evolución pasiva $n_\mathrm{b} \propto a^{-3}$, despreciando por tanto el intervalo de tiempo en el que las reacciones de combinación de iones (6.108), (6.109) y (6.110) se hallan en equilibrio. Considerando $\rho_{\mathrm{b}0} \approx m_p\, n_{\mathrm{b}0}$, donde m_p es la masa del protón, de la definición de parámetro de densidad (2.93), de la expresión de la densidad crítica (2.92) y expresando G, que en la nueva redefinición de unidades aparece dividiendo en la expresión de la densidad crítica, en función de la masa de Planck m_p (6.33), se termina obteniendo, en unidades físicas (ejercicio 6.12),

$$n_\mathrm{b} = \frac{3 m_\mathrm{p}^2 H_0^2}{8\pi m_p \hbar c^3} \left(\frac{T}{T_0} \right)^3 \Omega_{\mathrm{b}0} \tag{6.117}$$

De las dos expresiones (6.116) y (6.117) puede derivarse la razón

$$\frac{n_{^2\mathrm{H}}}{n_\mathrm{b}} = 5.0 \times 10^{-13}\, \Omega_{\mathrm{b}0} \left(\frac{T}{1\ \mathrm{MeV}} \right)^{3/2} \mathrm{e}^{L/T}, \tag{6.118}$$

donde la temperatura se expresa en MeV y que indica que la fracción de deuterio empezará a ser significativa cuando $T < 0.07$ MeV, teniendo en cuenta que las medidas de abundancias de elementos ligeros indican que $\Omega_{\mathrm{b}0} \approx 0.04$ para H_0=65 km/s/Mpc (3.8.2). Eso implica que **la síntesis del deuterio empieza a una edad de unos ~200 s** (los famosos «tres primeros minutos»).

Sin embargo, entre el intervalo transcurrido entre el desacople protón/neutrón-neutrino (6.4.3) que congela la razón neutrones a protones al valor (6.95) cuando el universo tiene una edad de unos 2 s, y la formación de deuterio, a una edad de unos 200 s, los neutrones se han desintegrado según la reacción[19]

$$n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e \tag{6.119}$$

con una vida media de unos 890 s. Aplicando (1.4) se obtiene una fracción de neutrones[20]

$$\frac{n_n}{n_p} \approx 0.13. \tag{6.120}$$

En cuanto empieza la formación del deuterio, las reacciones (6.106) y (6.107) para la producción de helio ya pueden tener lugar. Como dichas reacciones tienen una sección eficaz muy grande mientras que, como se analizó en el capítulo primero (1.8.2), la producción de elementos más pesados que el helio es ineficiente, el resul-

---

trones son prácticamente iguales. Esta aproximación es correcta puesto que los electrones todavía no se han aniquilado y entonces sigue pudiéndose despreciar la asimetría materia-antimateria en la conservación del número leptónico (6.81) y de la carga (6.79).

[18] Aunque las distribuciones son distintas: los fotones siguen una ley de cuerpo negro mientras que los neutrinos siguen una ley de Fermi-Dirac.

tado final es que prácticamente casi todos los neutrones terminan formando ^{4}He rápidamente en cuanto empieza la formación del deuterio. En este caso, la abundancia estimada de helio primordial *en fracción de masa* Y_p será, teniendo en cuenta (6.120),

$$Y_p \equiv \frac{4n_{^4\mathrm{He}}}{n_b} \cong \frac{4(n_n/2)}{n_p+n_n} = \frac{2(n_n/n_p)}{1+(n_n/n_p)} = 0.23 \qquad (6.121)$$

puesto que la masa total de bariones es aproximadamente igual al producto de la masa del neutrón o protón por la suma de las densidades de protones y neutrones libres inmediatamente antes de la nucleosíntesis. En efecto, la nucleosíntesis crea nuevos núcleos pero no cambia la densidad total de protones y neutrones (entendidos ahora como libres o ligados) y por tanto la densidad de masa total será la misma salvo la energía de ligadura de los núcleos sintetizados, que es mucho menor que la masa en reposo del protón o neutrón.

En el capítulo primero las observaciones más recientes proporcionaban $Y_p = 0.241 \pm 0.002$ (1.42), lo cual representa una diferencia del 4% sobre una cantidad afectada por un error del 1%, lo que constituye un acuerdo muy satisfactorio teniendo en cuenta las aproximaciones efectuadas. El resto de la fracción de masa estará prácticamente constituido por hidrógeno en cuanto la temperatura descienda lo suficiente, ya en la época siguiente, como para permitir la combinación de los protones sobrantes de la nucleosíntesis con los electrones.

6.5.3 Nucleosíntesis de otros elementos

Los demás elementos ligeros se sintetizan en cantidades inferiores. Las cantidades sintetizadas de ^{2}H y ^{3}He primordial son el resultado de la congelación de sus abundancias cuando el descenso de temperatura rompe el equilibrio de las reacciones (6.106) y (6.107). El ^{7}Li se produce mediante (1.36) y (1.37) a una fracción todavía inferior.

La concordancia de las abundancias respectivas de estos elementos (figura 1.27), que dependen de la entropía por barión $\eta^{-1} = n_\gamma/n_b$, constituye un apoyo considerable al modelo de la Gran Explosión y permite determinar el parámetro de densidad de bariones puesto que, de (6.28) y utilizando el mismo procedimiento para evaluar la densidad de bariones que el utilizado para obtener (6.117),

$$\eta = \frac{n_b}{n_\gamma} = \frac{3\pi m_p^2 \hbar^2}{8\zeta(3) g_\gamma m_p} \frac{\Omega_{b0} H_0^2}{T_0^3} = 1.15 \times 10^{-8}\, \Omega_{b0} \qquad (6.122)$$

Como desde el momento en que ocurra la combinación y se desacoplen los fotones ya no existirán más reacciones en equilibrio en el universo, la evolución de la densidad de bariones será pasiva, debida únicamente a la expansión. Además, se conservará la distribución de fotones como si estuvieran en equilibrio. En consecuencia, la razón (6.122) entre bariones primordiales y fotones, o equivalentemente su inverso **la entropía por barión, permanece constante desde el momento en que tiene lugar la combinación hasta la actualidad,** *aunque la ecuación (6.122) se ha obtenido en la aproximación de que pueda considerarse constante desde la nucleosíntesis hasta la actualidad.*

La razón (6.122) proporciona, para los límites de η dados por (1.44) determinados por Burles, Nollet, y Turner (2001) a partir de ajustes de las observaciones más recientes a modelos numéricos de nucleosíntesis más rigurosos, y teniendo en cuenta que se ha adoptado H_0=65 km/s/Mpc

$$\Omega_{b0} = 0.048 \pm 0.004 \qquad (6.123)$$

cuya incertidumbre ascendería a ±0.009 si se incluyera un 10% de error en la determinación de H_0.

6.5.4 Factores que intervienen en la nucleosíntesis primordial

El modelo elemental de nucleosíntesis que se ha descrito someramente se basa en la validez, durante el intervalo temporal en que la misma tiene lugar, de las siguientes hipótesis:

- El universo se halla a alta temperatura.
- El universo se encuentra en equilibrio térmico.
- Las leyes de la física son las mismas en ese instante que en la actualidad. En particular la relatividad general y la física de partículas.
- El universo es homogéneo e isótropo.
- Solamente existen tres especies de neutrinos.
- El potencial químico de los neutrinos es nulo.
- El universo se compone solamente de materia.
- El campo magnético es despreciable.
- La densidad de partículas exóticas (fotinos, gravitinos, etc.) es despreciable.

La asunción de estas hipótesis es evidente por las ecuaciones utilizadas y los procesos de nucleosíntesis considerados. Consideremos, sin embargo, lo que sucedería si no se verificasen algunas de ellas.

En el caso de la cuarta hipótesis, podríamos considerar una densidad de energía homogénea, pero una distribución no homogénea de partículas[21]: en el univer-

[19] Los protones libres son estables o con una vida media muy larga, según las teorías de gran unificación, mientras que los neutrones libres son inestables. Sin embargo, los neutrones ligados dentro de

so existirían zonas que fueran ricas en protones y zonas ricas en neutrones. Esa distribución no alteraría la expansión del universo. Sin embargo, en las zonas ricas en protones todos los neutrones formarían deuterio, aunque en menor cantidad que en la nucleosíntesis estándar. En las zonas ricas en neutrones solamente se formaría el deuterio en función de la disponibilidad de protones. Posteriormente el proceso proseguiría en estas zonas, siempre que la temperatura fuera suficiente, mediante la desintegración de neutrones para dar protones según el proceso (6.119). El resultado neto sería una mayor abundancia de deuterio pero una menor abundancia de helio.

Si existieran más de tres especies de neutrinos, los grados de libertad efectivos (6.31) de las partículas relativistas serían mayores, con lo que según (6.30) la densidad de energía de radiación sería mayor para la misma temperatura. Entonces, la segunda ecuación de Fridman (2.88) indica que H sería mayor, y por tanto el tiempo característico de expansión, el tiempo de Hubble $\tau_H = H^{-1}$ sería menor. En este caso, el tiempo transcurrido entre la congelación de la fracción de neutrones a protones y el inicio de la nucleosíntesis sería menor porque la temperatura habría bajado lo suficiente como para superar el cuello de botella del deuterio en un tiempo menor. En consecuencia, se habrían desintegrado menos neutrones y se produciría una mayor cantidad de helio. Sin embargo, la nucleosíntesis empezaría a la misma temperatura.

Si el potencial químico de los neutrinos no fuera nulo, entonces este potencial intervendría en la ecuación (6.93), puesto que de la reacción (6.119) se deduce que

$$\mu_n = \mu_p + \mu_{e^-} + \mu_{\bar{\nu}_e} \approx \mu_p + \mu_{\bar{\nu}_e}, \tag{6.124}$$

teniendo en cuenta que $\mu_{e^-} \approx 0$ antes de la aniquilación de los pares electrón-positrón. Entonces la ecuación (6.93) adoptaría la forma

$$\frac{n_n}{n_p} \approx \mathrm{e}^{-(\mu_{\nu_e} + m_n - m_p)/T} \tag{6.125}$$

y por tanto la razón congelada neutrón/protón sería distinta, lo cual altera la producción de helio primordial. En efecto, si $x_{\nu e} >> 0$, no existirían apenas neutrones y por tanto no se produciría apenas helio. Si $x_{\nu e} << 0$, existiría una gran cantidad de neutrones y pocos protones, con lo que el deuterio no se podría producir de forma significativa hasta que una fracción de neutrones se hubiera desintegrado dando lugar a protones. Pero la relativamente larga vida media del neutrón implica que, para obtener una relación parecida a (6.120), la densidad habría descendido demasiado como para que la nucleosíntesis prosiguiera. Luego la producción de helio sería menor. En cambio, si $x_{\nu e} \approx -1.29$, podrían obtenerse tantos neutrones como protones en el momento del inicio de la nucleosíntesis, con lo que toda la materia bariónica del universo estaría formada por helio. Pero además, la existencia de un potencial químico no nulo para los neutrinos alteraría su densidad de energía, que ya no vendría dada por (6.28), con lo que variaría el ritmo de expansión y por tanto la producción de helio, como ya se ha discutido en el caso de que existieran más de tres especies de neutrinos.

Si en el universo existieran zonas compuestas de materia y otras de antimateria, los fotones de alta energía generados por la aniquilación materia-antimateria en las regiones de contacto de las distintas zonas contribuirían a la fotodisociación del deuterio, disminuyendo la producción de helio.

El campo magnético acelera la desintegración del neutrón (Grasso y Rubinstein, 2000), por lo que disminuiría la producción de helio.

Si la densidad de partículas exóticas fuera apreciable, habría una mayor producción de helio debido a que la mayor densidad de energía provocaría un mayor ritmo de expansión y entonces se habrían desintegrado menos neutrones para cuando empezase la nucleosíntesis.

En conclusión, existen numerosas variables que afectan a las abundancias relativas de los elementos ligeros. Aunque pueda darse la circunstancia de que una combinación de hipótesis distintas a las enunciadas al principio de este apartado pueda conducir a las abundancias observadas, éstas constituyen un indicio que avala indirectamente las hipótesis de la nucleosíntesis estándar.

6.5.5 Fin de la época fotónica

La época fotónica termina cuando la densidad de energía de radiación deja de ser dominante, y el universo para a estar energéticamente dominado por la materia no relativista, con lo que se produce el cambio de era. Según (6.30), el parámetro de densidad de radiación será, en unidades físicas,

$$\Omega_{r0} = \frac{\rho_{r0}}{\rho_{c0}} = \frac{8\pi^3 g_{\mathrm{ef}}^{\rho} T_0^4}{90 m_{\mathrm{p}}^2 H_0^2 \hbar^2} \approx 1 \times 10^{-4} \tag{6.126}$$

expresando, como ya es habitual, G en función de la masa de Planck (6.33) y teniendo en cuenta que, después de la aniquilación de los pares electrón-positrón, los grados de libertad de las partículas relativistas no han variado desde entonces hasta ahora, y son

$$g_{\mathrm{ef}}^{\rho} = g_{\gamma} + \frac{7}{8} 2 N_{\nu} \left(\frac{T_{\nu}}{T} \right)^4 = 2 + \frac{7}{8} 6 \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} = 3.36. \tag{6.127}$$

Entonces, el momento en que la densidad de energía de la materia no relativista y de la radiación (fotones y neutrinos) son iguales será

$$z_{\rm eq} \approx \frac{\Omega_{\rm m0}}{\Omega_{\rm r0}} \approx 3000, \tag{6.128}$$

puesto que las medidas de cúmulos de galaxias indican que $\Omega_{\rm m0} = 0.3$ (3.8.2). Este desplazamiento al rojo corresponde a una temperatura de 8190 K ó 0.70 eV. La obtención de este valor implica suponer una evolución pasiva de la densidad de partículas no relativistas desde este momento hasta la actualidad. Es decir: despreciar los posteriores procesos de combinación, al igual que en la deducción de la densidad de bariones (6.117).

Para un universo euclídeo (puesto que en el capítulo tercero, apartado 3.8.2, se demostró que la curvatura es despreciable en el modelo estándar) dominado por materia no relativista, este desplazamiento al rojo corresponde a una edad, según (3.12) y (2.100),

$$t_{\rm eq} = \frac{2}{3H_0(1+z_{\rm eq})^{3/2}} = 6.1\times10^4 \text{ a} \tag{6.129}$$

puesto que la diferencia con el modelo simbiótico de materia no relativista y radiación es solamente del 6% (ejercicio 6.15).

Con el fin del dominio de la radiación, el universo entra en la siguiente época que ya corresponde a la era de materia no relativista.

6.6 Época del plasma. Formación del hidrógeno

Inicio: 6.1×10^4 a (equilibrio materia-radiación).

Final: 2.1×10^5 a (combinación del hidrógeno).

Composición: Fotones, protones, electrones, neutrinos desacoplados y elementos ligeros procedentes de la nucleosíntesis primordial que terminarán la época formando átomos.

Descripción: Hasta ahora la época más larga del universo. Empieza con la era de dominio de la materia no relativista y termina con la combinación de los iones. En esta época, el universo está dominado por partículas cargadas, constituyendo un plasma, de ahí su denominación.

Las interacciones dominantes en esta época son (6.108), (6.109), (6.110) y (6.20). **La combinación del hidrógeno se define como el momento en que queda un 10% de electrones libres**. Es decir,

$$X_e \equiv \frac{n_e}{n_{\rm b}} = \frac{n_p}{n_{\rm b}} = 0.10 \tag{6.130}$$

puesto que, como la carga neta del universo es nula, $n_e = n_p$.

Como los electrones y protones ya no son relativistas y sus potenciales químicos no son nulos, pero la reacción de formación del hidrógeno (6.108) está en equilibrio, se puede aplicar el mismo procedimiento seguido en la deducción de (6.115) a esta reacción, obteniendo

$$n_{\rm H} = \frac{g_{\rm H}}{g_e g_p} n_p n_e \left(\frac{2\pi m_{\rm H}}{m_p m_e T}\right)^{3/2} {\rm e}^{L/T}, \tag{6.131}$$

donde ahora L es la energía de ligadura atómica entre protones y electrones mientras que antes correspondía a una energía de ligadura nuclear. Como puede aproximarse $m_{\rm H}/m_p \approx 1$, $n_e = n_p$ y $g_{\rm H} = g_e g_p$ se obtiene, finalmente,

$$\frac{n_{\rm H}}{n_p^2} = \left(\frac{2\pi}{m_e T}\right)^{3/2} {\rm e}^{L/T}. \tag{6.132}$$

La constancia de η (6.122) y la conservación de la carga permite obtener

$$\frac{n_{\rm H} n_{\rm b}}{n_e n_p} = \frac{n_{\rm H}\eta n_\gamma}{n_p^2} \tag{6.133}$$

que también se puede expresar en función de X_e teniendo en cuenta que antes de la combinación $n_{\rm b} \approx n_p + n_{\rm He}$, durante la combinación $n_{\rm b} \approx n_p + n_{\rm H} + n_{\rm He}$ y después de la combinación $n_{\rm b} \approx n_{\rm H} + n_{\rm He}$, salvo pequeñas cantidades de otros núcleos. Despreciando la contribución del helio, la segunda expresión permite escribir $n_{\rm H} \approx n_{\rm b} - n_e$. Entonces,

$$\frac{n_{\rm H} n_{\rm b}}{n_e n_p} = \frac{1-(n_e/n_{\rm b})}{n_e^2/n_{\rm b}^2}. \tag{6.134}$$

Igualando (6.133) y (6.134) y teniendo en cuenta (6.130), (6.132) y (6.28),

$$\frac{1-X_e}{X_e^2} = \eta n_\gamma \left(\frac{2\pi}{m_e T}\right)^{3/2} {\rm e}^{L/T} = \frac{4\zeta(3)\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \eta \left(\frac{T}{m_e}\right)^{3/2} {\rm e}^{L/T} \tag{6.135}$$

que constituye la ecuación de Saha para la fracción de ionización. Como en el caso de la formación de deuterio, la anterior expresión es válida solamente en el equili-

brio de la reacción de combinación, pero la expresión exponencial implica que la combinación es un proceso rápido, por lo que la ecuación puede utilizarse para estimar la temperatura a la cual la combinación tiene lugar. A partir de (6.122) y (6.123), se obtiene

$$\frac{1-X_e}{X_e^2} = 2.12\times10^{-9}\left(\frac{T}{m_e}\right)^{3/2} e^{L/T}. \qquad (6.136)$$

Teniendo en cuenta que $L = 13.59$ eV e imponiendo $X_e < 0.1$, se obtiene una **temperatura de unos 0.30 eV, equivalente a un desplazamiento al rojo $z_H \approx 1300$ y a una edad, utilizando (6.129) de 2.1×10^5 a.**

Lo mismo que en el caso de deuterio, la formación del hidrógeno no tiene lugar a una temperatura del orden de la energía de ligadura (13.59 eV), lo que la situaría en plena época fotónica, sino muy inferior, ya en la era de dominio de materia no relativista, debido a la gran densidad relativa de fotones ionizantes que suministra una distribución de cuerpo negro a la temperatura de la energía de ligadura.

La combinación del helio tiene lugar antes (ejercicio 6.17), puesto que su energía de ligadura es superior: de 27.18 eV en el caso de la combinación del $^4He^{2+}$ (6.109), y de 24.59 eV en el caso de la combinación del $^4He^+$ (6.110).

6.7 Época atómica. Desacoplamiento de los fotones

Inicio: 2.1×10^5 a (combinación del hidrógeno).

Final: 2.7×10^5 a (desacoplo de los fotones).

Composición: Fotones, átomos neutros, neutrinos desacoplados y una fracción minoritaria de electrones y protones por combinar.

Descripción: Al final de esta época se produce el desacoplamiento de los fotones para dar lugar a la radiación cósmica de fondo. A partir de este momento ya puede empezar el crecimiento de estructuras por inestabilidad gravitatoria.

La interacción dominante en esta época es la (6.20), pero el desacople de los fotones no puede determinarse simplemente imponiendo $\Gamma/H=1$ para la reacción (6.20) utilizando la sección eficaz Thomson (ejercicio 6.16). La razón es que, en la época anterior, ya empezó la combinación de electrones con los núcleos para dar lugar a átomos neutros, suceso que finalizó la época del plasma y que redujo el número de electrones con los que los fotones pueden interaccionar. Por este motivo, el desequilibrio de la reacción (6.20) con el consecuente desacoplo de los fotones[22] tendrá lugar mucho antes. Para estimar el instante del desacoplamiento será preciso imponer $\Gamma/H=1$ para la reacción (6.20) con la sección eficaz Thomson[23], pero utilizando la densidad de electrones que queda por combinar en vez de la densidad proporcionada por (6.29),

$$\Gamma_T = \sigma_T c n_e = \sigma_T c X_e n_b = \sigma_T c X_e \eta n_\gamma, \qquad (6.137)$$

donde se han utilizado las definiciones (6.130) y (6.122) para tener en cuenta la disminución en la densidad de electrones en el proceso de desacople, y donde la sección eficaz Thomson es

$$\sigma_T = 6.65\times10^{-29}\ \mathrm{m}^2. \qquad (6.138)$$

Imponiendo $\Gamma_T/H = 1$, donde Γ_T se obtiene de (6.137), y H de (2.100), utilizando el valor de la razón de bariones a fotones (6.122) con (6.123), la densidad de fotones (6.28) y la fracción de ionización proporcionada por la ecuación (6.136), que puede utilizarse debido a que, como veremos, el desacoplamiento ocurre muy próximo, aunque posterior a la combinación, se obtiene (ejercicio 6.18) una **temperatura del desacoplamiento de 0.27 eV, unos 3100 K, equivalente a un desplazamiento al rojo $z_d \approx 1150$ o una edad de 2.6×10^5 a.** Cálculos más precisos que los aquí efectuados permiten obtener un grado de ionización residual, **congelado,** $X_e = 8.3\times10^{-4}$.

Este desplazamiento al rojo es el de la **superficie de último esparcimiento**, y la radiación de fondo así liberada no volverá a interaccionar significativamente con la materia. Por tanto **los fotones de la radiación de fondo proceden del «objeto» más lejano que puede observarse en el universo**[24]. En efecto, fotones más alejados corresponden a instantes anteriores al desacoplo y no pueden llegar al observador porque el recorrido libre medio era demasiado pequeño.

6.8 Resumen

La siguiente tabla resume los principales eventos que tienen lugar en el universo temprano.

---

un núcleo son estables.

[20] Se desprecia el incremento del número de protones debido a la desintegración del neutrón (ejercicio 6.13).

[21] Que se podría crear mediante una transición de fase cuark-hadrón (apartado 5.7) de primer orden que produciría burbujas de hadrones dentro del plasma cuark-gluon.

Era	Época	Edad	Sucesos más importantes	Comentarios
de radiación	Hadrónica	2.5×10^{-5} s	Confinamiento de los cuarks. Inicio de época	Dominio de la fuerza fuerte. Potenciales químicos nulos
		5×10^{-5} s	Principio aniquilación de piones. Fin de época	
	Leptónica	5×10^{-5} s	Inicio de época	Dominio de la interacción débil
		9×10^{-5} s	Principio de la aniquilación de los muones	
		6×10^{-2} s	Desacoplamiento de los neutrinos	
		2 s	Congelación fracción neutrón/protón	
		4 s	Principio aniquilación e^--e^+. Fin de época	
	Fotónica	4 s	Inicio de época	Dominio de los fotones. Con el final de esta época termina también la era de radiación
		200 s	Inicio de la nucleosíntesis primordial	
		6.1×10^4 a	Equilibrio radiación-materia. Fin de época y de la era de radiación	
de materia	del plasma	6.1×10^4 a	Inicio de época y de la era de materia no relativista	Empieza era de materia
		2.1×10^5 a	Combinación del H. Fin de época	
	Atómica	2.1×10^5 a	Inicio de época	Al final de esta época ya puede empezar formación estructuras
		2.6×10^5 a	Desacoplamiento de los fotones. Fin de época	

Tabla 6.2 Principales eventos del universo temprano.

6.9 Ejercicios

6.1 ¿Por qué la redefinición de unidades con $\hbar = 1$ es incompatible con $G = 1$? Demostrar que con esta nueva definición de unidades los tiempos y longitudes se miden en el inverso de las unidades de energía, mientras que las masas y temperaturas se miden en unidades de energía. ¿Cómo se obtienen las densidades relativistas en unidades físicas?

6.2 Calcular los grados de libertad efectivos g^p_{ef} para cada una de las eras dominadas por la densidad de energía relativista. ¿Hasta qué punto es acertada entonces la relación entre la edad y la temperatura (6.35)? ¿Porqué las edades calculadas utilizando (6.35) difieren de las calculadas utilizando (5.17)? ¿Cuál de las dos relaciones es la más precisa?¿Por qué?

6.3 Considerando una evolución pasiva para la densidad de masa, calcular la entropía por unidad de masa del universo. Con esta hipótesis, ¿desde cuando esta entropía por unidad de masa puede considerarse constante?

6.4 Demostrar que

$$\dot{\bar{p}} \cdot \bar{\nabla}_{\bar{p}} = \dot{p} \frac{\partial}{\partial p},$$

donde p es el módulo del momento. Considerar la analogía con el radio vector $\bar{r}$ coordenadas cartesianas.

6.5 Deducir las expresiones (6.67) y (6.72).

6.6 Inmediatamente después de que la transición cuark-hadrón ha tenido lugar, ¿cuál será la densidad de pares de tauones creados por los fotones? ¿Y de protones o neutrones? Se encuentran en equilibrio las reacciones de creación y aniquilación de estos pares? ¿Por qué?

6.7 ¿Cuál es el valor del cociente (6.75) aplicado a la aniquilación de los piones?

6.8 Despreciando la asimetría materia-antimateria, ¿A qué temperatura aproximada ocurrirá la congelación de los pares electrón positrón? ¿Por qué es muy inferior a la temperatura umbral del electrón? ¿Cuál es la razón entre la densidad congelada de electrones y la densidad de fotones? Comparar con la observada.

6.9 Determinar la temperatura del desacople de los neutrinos de los protones y neutrones.

6.10 Calcular la razón entre las densidades actuales de fotones y neutrinos y la razón entre las densidades de energía actuales de fotones y neutrinos. ¿Qué masa media tendría que tener el neutrino para que ambas densidades de energía fueran iguales? ¿Es compatible este valor con la cota superior actual de la masa del neutrino?

6.11 Calcular la densidad de fotones en el momento en que el universo tiene la temperatura de la energía de ligadura del deuterio.

6.12 Obtener la densidad de bariones (6.117).

6.13 ¿Cuál sería la razón de la densidad de neutrones con respecto la de protones en el momento de empezar la nucleosíntesis del deuterio si se tuviera en cuenta que la desintegración de neutrones genera protones?

6.14 Determinar $\eta = n_b/n_\gamma$ en función de Ω_{b0} y $h \equiv H_0/100$; es decir, deducir la ecuación (6.122).

6.15 Calcular la edad a la que la densidad de energía de radiación es igual a la de materia no relativista aplicando el modelo simbiótico de radiación y materia del capítulo segundo.

6.16 Estimar cuándo ocurriría el desacoplo de los fotones si no existieran reacciones de combinación de iones. Determinar la temperatura, desplazamiento al rojo y edad.

6.17 Estimar a qué temperatura, desplazamiento al rojo y edad tiene lugar la combinación de los iones de helio.

6.18 Determinar la temperatura, desplazamiento al rojo y edad a la que tiene lugar el desacoplo de los fotones utilizando el método aproximado descrito en el apartado (6.7).

6.19 Sabiendo que, para la recombinación $\langle \sigma v \rangle_{rec} = 1.4 \times 10^{-19}$ (1 eV/T) m^3/s, estimar cuando terminaría la combinación suponiendo que los fotones no se desacoplasen.

6.20 ¿Cuál es el objeto de mayor desplazamiento al rojo que podemos observar? ¿Porqué? ¿Qué sentido tiene entonces determinar desplazamientos al rojo mayores?

6.21 Enumerar todas las aproximaciones efectuadas en el apartado 6.5.2 para deducir la abundancia de ^{4}He. ¿Cuál es la más restrictiva?¿Por qué?

6.10 Bibliografía

6.10.1 Referencias y textos de consulta

Bergström, L. y Goobar, A. (1999), *Cosmology and Particle Astrophysics*, Wiley.

Burles, S.; Nollet, K. M. y Turner, M. S. (2001), *ApJ* 552, L1.

Coles, P. y Lucchin, F. (1995), *Cosmology. The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, Wiley.

Grasso, P. y Rubinstein, H. R. (2000), *Magnetic fields in the early Universe*, Physics Reports 348, 163.

Lachièze-Rey, M. y Gunzig, E. (1999), *The Cosmological Background Radiation*, Cambridge University Press.

Linder, E. V. (1997), *First Principles of Cosmology*, Addison-Wesley.

Narlikar, J. V. (^{3}2002), *Introduction to Cosmology*, Cambridge University Press.

Peacock, J. A. (1999), *Cosmological Physics*, Cambridge University Press.

Rich, J. (2001), *Fundamentals of Cosmology*, Springer-Verlag.

6.10.2 Textos recomendados para ampliación de conocimientos

Kolb, E. W. y Turner, M. S. (1990), *The Early Universe*, Addison-Wesley.

Peacock, J. A. (1999), *Cosmological Physics*, Cambridge University Press.

Peebles, P. J. E. (1993), *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press.

6.10.3 Enlaces útiles

Página www de este texto

http://webpages.ull.es/users/jcepano

Generales

Diccionario en línea: http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page

Buscador de pretirajes de artículos (astro-ph, y otros): http://www.arxiv.org

Página general de cosmología: http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5

Capítulo 7 | LA RADIACIÓN CÓSMICA DE FONDO

A partir del momento del desacoplamiento de los fotones, éstos pueden propagarse libremente por el espacio[1]. La subsiguiente expansión del universo modifica la distribución espectral de los fotones de acuerdo con el desplazamiento al rojo, de manera que la radiación de fondo mantiene el espectro de un cuerpo negro, pero de temperatura cada vez más fría. Así, la radiación de fondo observada en la actualidad corresponde a la emisión de un cuerpo negro cuyo máximo yace en el rango espectral de las microondas.

El estudio de la radiación cósmica de fondo es de la máxima importancia cosmológica puesto que, como se demostrará en este capítulo, sus anisotropías proporcionan información sobre parámetros cosmológicos esenciales y acerca de las características del universo desde el desacoplamiento hasta la actualidad.

La caracterización de las anisotropías y de los distintos mecanismos que las generan y las amortiguan o enmascaran y sus implicaciones cosmológicas es muy complejo y merecedor de una monografía en sí mismo. En este capítulo solamente se aspira a sentar los principios fundamentales que permitan al lector profundizar sobre el tema estudiando la bibliografía especializada. En particular, se ha preferido no abordar el importante tema de la polarización de la radiación de fondo que puede encontrarse someramente descrito en Hu y Dodelson (2002).

7.1 La superficie de último esparcimiento

Después del desacoplamiento, suceso que ocurre a un desplazamiento al rojo aproximado $z_d \sim 1100$ como se estableció en el apartado 6.7, los fotones pueden propagarse libremente. Como ya se ha comentado en el capítulo primero, la radiación de fondo que se observa procede de una **superficie que se denomina de último esparcimiento,** definida como el lugar geométrico de los puntos del espacio en los que la radiación de fondo que observamos en este instante procedente de cada dirección del cielo sufrió la última interacción con la materia antes de separarse definitivamente de ella. Por isotropía, la superficie del último esparcimiento se hallaría a un mismo desplazamiento al rojo z_d. Sin embargo, como el esparcimiento es un proceso estadísti-

[1] Aunque eso no es totalmente cierto, como se verá a lo largo de este capítulo.

co, los fotones procedentes de una dirección cualquiera del cielo no se habrán desacoplado todos en el mismo instante, por lo que la superficie de último esparcimiento tendrá un cierto espesor finito (figura 7.1), como se demostrará a continuación.

La velocidad a la que tiene lugar el proceso de esparcimiento en unidades físicas es, según (6.137),

$$\Gamma_{\mathrm{T}} = \sigma_{\mathrm{T}} n_{\mathrm{e}} c = \sigma_{\mathrm{T}} X_{\mathrm{e}} n_{\mathrm{b}} c = \sigma_{\mathrm{T}} X_{\mathrm{e}} \eta n_{\gamma} c. \tag{7.1}$$

En un intervalo de tiempo $\mathrm{d}t$ y por unidad de volumen, habrán tenido lugar, por tanto, $\mathrm{d}n_{\gamma}$ interacciones,

$$\mathrm{d}n_{\gamma} = -\Gamma_{\mathrm{T}} n_{\gamma} \mathrm{d}t = n_{\gamma} \mathrm{d}\tau, \tag{7.2}$$

donde τ es la **profundidad óptica** del universo por esparcimiento Thomson y el signo indica que el número de interacciones y la profundidad óptica aumentan cuando la edad disminuye. De (7.1) y (7.2) resulta, considerando que la profundidad óptica es nula en la actualidad,

$$\tau = \int_0^{\tau} \mathrm{d}\tau = \int_t^{t_0} \sigma_{\mathrm{T}} n_{\mathrm{e}} c \mathrm{d}t. \tag{7.3}$$

Integrando (7.2) entre los mismos límites que (7.3) se obtiene la densidad inicial de fotones n_{γ} a partir de la densidad actual de fotones $n_{\gamma 0}$ que llegan sin haber interaccionado más desde el instante t hasta la actualidad,

$$n_{\gamma} = n_{\gamma 0} \mathrm{e}^{\tau}. \tag{7.4}$$

Por tanto, la probabilidad P de que un fotón sufra un esparcimiento desde el instante t hasta la actualidad será

$$P = \frac{\gamma \text{ Iniciales} - \gamma \text{ Llegan}}{\gamma \text{ Iniciales}} = \frac{n_{\gamma} - n_{\gamma 0}}{n_{\gamma}} = 1 - \mathrm{e}^{-\tau} \tag{7.5}$$

y la probabilidad de esparcimiento por unidad de tiempo

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{e}^{-\tau} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \tag{7.6}$$

y por tanto, por unidad de desplazamiento al rojo

$$p(z) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{-\tau} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}z} \equiv g(z) \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}z}, \tag{7.7}$$

donde $p(z)$ es la **función de visibilidad**, que proporciona la probabilidad de que un fotón haya sufrido una última interacción entre z y $z+\mathrm{d}z$, y donde $g(z) \equiv \mathrm{e}^{-\tau}$ se denomina la **visibilidad**.

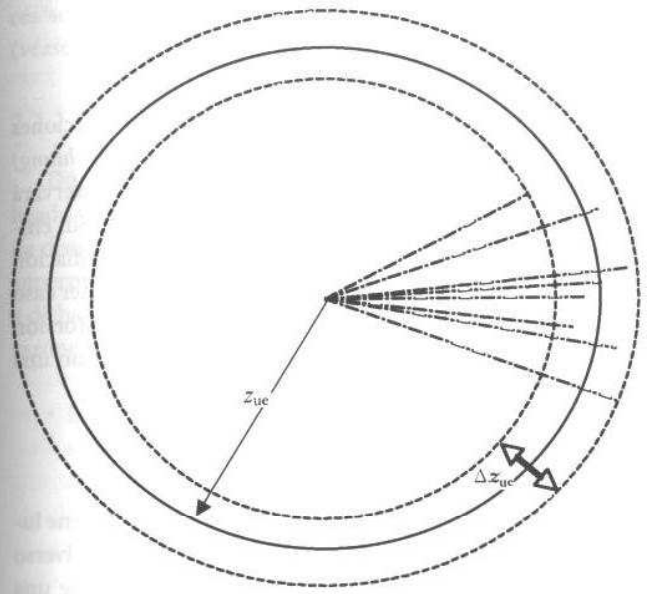


Figura 7.1 La línea continua indica la posición media de la superficie de último esparcimiento z_{ue} y las de trazos las del último esparcimiento más lejana y más próxima, que definen un espesor Δz_{ue} comprendido entre las líneas de trazos. Los fotones que llegan en una dirección determinada proceden de distintos puntos situados en la zona de espesor Δz_{ue} centrada en z_{ue}.

Por tanto, la superficie de último esparcimiento no está definida por un desplazamiento al rojo z_d para el cual $\tau(z_d)=1$, sino que tiene un espesor (figura 7.1). Sin embargo, este espesor no es excesivamente elevado debido a la abrupta caída de X_{e} con el desplazamiento al rojo. La función de visibilidad (7.7) puede aproximarse de forma excelente por una gausiana de media $z_{ue} = 1089$ y anchura[2] $\Delta z = 195$ (Spergel *et al.*, 2003) para el modelo estándar actual, puesto que existe una débil dependencia con la cosmología debido a que la fracción de ionización X_{e} depende del parámetro de densidad de bariones, y la relación entre t y z depende de los distintos parámetros de densidad (3.50).

Finalmente, **la superficie de último esparcimiento representa el máximo desplazamiento al rojo al cual puede observarse el universo:** el esparcimiento de los fotones destruye la información direccional que transportan, de manera similar a como la niebla reduce la visibilidad en la Tierra. La observación de distancias ma-

[2] O lo que es lo mismo: de desviación estándar $\sigma = \mathrm{FWHM} / \left[2\sqrt{2\ln 2}\right] \approx 83$.

yores está sujeta al desarrollo de telescopios de neutrinos o de ondas gravitatorias, que permitirán ver hasta el desacoplo de los neutrinos o los gravitones, respectivamente. Mientras tanto, hay que conformarse con evidencias indirectas acerca de lo que sucede más allá de la superficie de último esparcimiento.

7.2 Mecanismos causantes de distorsiones globales del espectro

Si después de la creación del espectro de cuerpo negro mediante las reacciones de esparcimiento Compton doble (6.18) y de radiación de frenado *(Bremstrahlung)* (6.19) los fotones no vuelven a intercambiar energía con la materia, se conservará la distribución de cuerpo negro así creada (apartado 6.2.2 y ejercicio 1.9). Sin embargo, existe una serie de procesos que pueden afectar a los fotones de la radiación de fondo, bien cambiando su espectro, bien generando **anisotropías**. El primer caso se estudiará en este apartado y corresponde a lo que se denomina una **distorsión global**, mientras que el segundo se analizará más adelante y se identifica con una distorsión que depende de la dirección.

7.2.1 Antes de la combinación: distorsión de Bose-Einstein

Aunque las reacciones (6.18) y (6.19) ocurren con frecuencia hasta que tiene lugar el desacoplamiento, pierden eficiencia a medida que la expansión del universo hace disminuir la densidad de partículas cargadas. Cuando el universo tiene una edad mayor que ~0.4 años (equivalente a $z \approx 10^7$), posterior a la nucleosíntesis, pero anterior al equilibrio radiación-materia (apartado 6.5), estas reacciones ya no son capaces de mantener un espectro de cuerpo negro si se inyecta una cantidad de energía significativa a los fotones mediante, por ejemplo, desintegración de partículas masivas reliquia de la época GUT o Planck[3].

Si esta inyección de energía se produce antes de la combinación, es decir, $10^7 > z > 10^4$, la interacción radiación-materia mediante esparcimiento Compton simple todavía es suficientemente eficiente como para que se alcance un equilibrio térmico, pero el doble Compton y la radiación de frenado ya no son capaces de anular el potencial químico y **la distribución resultante ya no será la de Planck sino la de Bose-Einstein** (6.2), con un potencial químico $\mu \approx 1.4(\Delta E/E)$, donde $\Delta E/E$ es el incremento de energía inyectado integrado sobre todas las frecuencias con respecto a la energía total del espectro no perturbado. Este cambio de la distribución provoca que en el dominio de Rayleigh-Jeans[4] la intensidad disminuya con la frecuencia como ν^3 en vez de como ν^2 (ejercicio 7.1). Las medidas actuales indican que $|\mu| < 8\times10^{-5}$ (Kogut, 2003a).

Si esta inyección de energía se produce después de la combinación, la falta de interacción radiación-materia no permite alcanzar un equilibrio térmico y entonces se produce la llamada **distorsión Compton o comptonización del espectro** (véase más adelante).

7.2.2 Durante la combinación: líneas atómicas

Durante la combinación tienen lugar una gran variedad de transiciones ligado-ligado (desexcitación) y libre-ligado (combinación) entre distintos niveles atómicos de distintos elementos, por lo que cabría esperar la aparición de **líneas de emisión superpuestas sobre el espectro de cuerpo negro** a las frecuencias correspondientes a dichas transiciones. Hasta la fecha no han sido observadas, lo que obedece a varias razones:

- Las líneas más relevantes, que corresponden lógicamente a las distintas transiciones del hidrógeno de la serie de Lyman y de Balmer, se hallan desplazadas al infrarrojo lejano. Sin embargo, a longitudes de onda por debajo de 400 μm, domina el llamado fondo cósmico infrarrojo[5], que es debido a la emisión de fuentes extragalácticas[6], sobre la radiación cósmica de fondo (Hauser y Dwek, 2001). El límite de Lyman ($n=\infty\rightarrow1$, donde n es el nivel atómico) o Lyα ($n=2\rightarrow1$) aparecerían en la actualidad a ≈100 μm, mientras que el límite de Balmer ($n=\infty\rightarrow2$) se hallaría ubicado a ≈400 μm (ejercicio 7.2). En conclusión, estas transiciones serían difícilmente observables.
- Las líneas de la serie del hidrógeno que podrían observarse a mayores longitudes de onda, en un dominio espectral más fácilmente medible, en la zona de las radiondas centimétricas o milimétricas, corresponden a transiciones entre niveles superiores, como por ejemplo $n=21\rightarrow20$ (ejercicio 7.3), que son mucho más débiles.
- La sobreabundancia de fotones con respecto a los bariones (6.122) produce la reionización inmediata de los átomos neutros recién combinados para los que su energía de ionización se halle cerca de la del máximo de la distribución de fotones. Por este motivo, y debido a la disminución de la temperatura de los fotones debido a la expansión, las líneas de combinación se situarían en las

[3] La desintegración generaría partículas relativistas que calentarían los fotones o bien directamente suministraría fotones más energéticos que se añadirían al espectro.

[4] La parte del espectro de frecuencias menores a la del máximo de la distribución.

[5] CIB: del inglés *Cosmic Infrared Background*

[6] Los fotones de longitudes de onda más cortas producidos por la formación de estrellas son absorbidos por el polvo de las mismas galaxias donde se forman y reemitidos en el infrarrojo lejano. Serán observados a todavía mayores longitudes de onda, debido al desplazamiento al rojo de la fuente.

alas de mayor frecuencia de la distribución de Planck. Sin embargo, y debido precisamente a que en las alas la intensidad es baja, es difícil medir con precisión la forma del espectro en esa zona.

- El espesor de la superficie de último esparcimiento ensancha las líneas espectrales, $\Delta\lambda_0/\lambda_0 \sim \Delta z/z = 0.18$ (ejercicio 7.4). Este efecto no solamente dificulta su detección por el ensanchamiento en sí, puesto que a la frecuencia a la que tiene lugar la transición se esperan intensidades de las líneas relativas al fondo de radiación del orden de $\delta I/I \approx 10^{-6}$ (ejercicio 7.5), sino también porque el ensanchamiento favorece el solapamiento de distintas líneas.
- Otros elementos, como el helio, son mucho menos abundantes que el hidrógeno y por tanto sus transiciones son más difíciles de observar al ser más débiles.

7.2.3 Después de la combinación: comptonización y radiación de frenado

Comptonización del espectro

Después de la combinación los fotones de la radiación de fondo no interaccionan significativamente con la materia puesto que los átomos son neutros en su mayor parte o en su totalidad. Si en estas circunstancias se producen electrones a mayor temperatura que los fotones del fondo cósmico debido, por ejemplo, a una reionización del medio causada por las primeras estrellas formadas, las llamadas de población III, los electrones pueden inyectar energía a los fotones mediante efecto **Compton inverso**. Esta inyección de energía distorsiona la forma del espectro de la radiación de fondo. Si los electrones no son relativistas, la sección eficaz de esparcimiento es la de Thomson, en caso contrario hay que utilizar la sección eficaz de Klein-Nishina.

La ecuación de Kompaneets (Kompaneets 1957), que describe la evolución de la distribución f de los fotones esparcidos por un gas de electrones calientes *no relativistas*[7], tiene la forma

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x_e^2}\frac{\partial}{\partial x_e} x_e^4 \left(\frac{\partial f}{\partial x_e} + f + f^2 \right), \tag{7.8}$$

donde $x_e = h\nu/kT_e$, y

$$y = \int \frac{k(T_e - T)}{m_e c^2} \mathrm{d}\tau \tag{7.9}$$

[7] La extensión de la aproximación de Kompaneets a electrones relativistas puede encontrarse en Challinor y Lasenby, 1998. Un tratamiento relativista completo puede encontrarse, por ejemplo, en Birkinshaw, 1999.

que se denomina **parámetro de comptonización**, con $\mathrm{d}\tau$ dado por (7.2) y T_e y T las temperaturas de electrones y fotones, respectivamente[8]. Esta última expresión representa el cambio relativo de energía causado por cada esparcimiento multiplicado por el número medio de esparcimientos (véase 7.2 para el significado de τ) y proporciona, por tanto, el cambio relativo total de energía que los electrones inducen sobre los fotones.

En el límite de x_e pequeñas, lo cual es una buena aproximación para fotones del fondo cósmico esparcidos por electrones calientes, se verifica $\partial f/\partial x_e \approx \delta f/\delta x_e >> f, f^2$. Cuando la profundidad óptica que figura en (7.9) es baja, y permite aproximar $\partial f/\partial y \approx \delta f / y$. Si además las temperaturas no son muy elevadas, puede asumirse $T_e \approx T$ y por tanto $x_e \approx x$. En estas hipótesis (7.8) permite obtener (ejercicio 7.6)

$$\delta f = -2y\Psi(x)\frac{xe^x}{(e^x-1)^2}, \tag{7.10}$$

donde $x = h\nu/kT$ en unidades físicas, y

$$\Psi(x) = 2 - \frac{x(e^x+1)}{2(e^x-1)}. \tag{7.11}$$

Puede demostrarse fácilmente (ejercicio 7.7) que

$$\frac{\Delta T}{T} = -2y\Psi(x). \tag{7.12}$$

La comptonización redistribuye los fotones de menor energía de la distribución de Planck, a energías mayores, lo que causa una disminución de la densidad de fotones en la zona Rayleigh-Jeans del espectro (figura 7.2) que se traduce en una disminución de la temperatura que se deduciría del ajuste a un cuerpo negro en dicha zona (ejercicio 7.7),

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{\mathrm{R\text{-}J}} = -2y. \tag{7.13}$$

En consecuencia, esta redistribución **produce un aumento de la densidad de fotones de mayor energía en la zona Wien del espectro** (figura 7.2), por lo que la temperatura que se inferiría de un ajuste a un cuerpo negro en dicha zona aumenta (ejercicio 7.7),

[8] Se considera, por tanto, que el gas de electrones viene descrito por una única temperatura, lo cual es cierto en bastante aproximación, pero deja de serlo si se pretende conseguir resultados precisos.

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{\text{Wien}} = xy. \tag{7.14}$$

Finalmente, **para x=3.83, que corresponde a una longitud de onda de 1.38 mm, la distorsión del espectro es nula** (figura 7.2 y ejercicio 7.7).

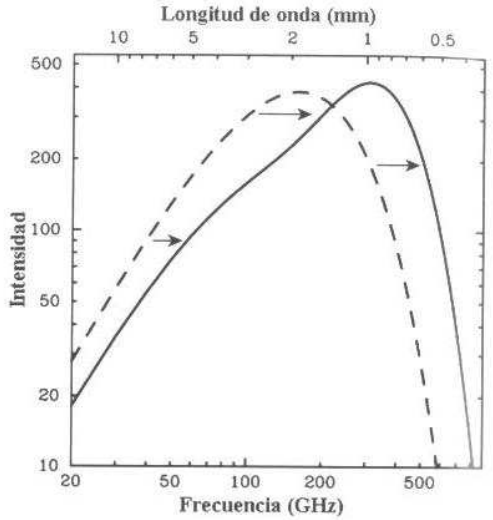


Figura 7.2 La linea de trazos muestra el espectro de la radiación cósmica de fondo. La linea continua muestra el espectro comptonizado: la intensidad es menor a frecuencias menores que 218 GHz (1.38 mm) y mayor a frecuencias mayores. De Carlstrom *et al.*, 2002. Copyright 2002, reproducido con permiso de Annual Reviews.

Las medidas obtenidas por el satélite COBE indican que $y < 2.5\times10^{-5}$, por lo que la comptonización del espectro es muy baja. Este resultado no implica que no exista una reionización debida a una población III, sino que ésta ha debido de tener lugar muy posteriormente a la combinación, cuando la expansión ha reducido la densidad de electrones, disminuyendo la profundidad óptica como indica (7.3), y por tanto reduciendo y según (7.9). Como se discutirá en el apartado (7.9.4), la formación de estrellas masivas ionizantes no ha podido ser significativa antes de z≈30 (Kogut 2003b).

Asimismo, la existencia de una desintegración de reliquias masivas que pudiera inyectar energía a los fotones de la radiación de fondo es muy improbable. La desintegración de reliquias fue postulada en 1988 para explicar un supuesto exceso en la radiación de fondo cósmico con respecto al espectro de cuerpo negro que se creía haber observado en la región de Wien submilimétrica, y que se traduciría en un notable exceso de alrededor de un 20% a longitudes de onda más largas. Este exceso no ha sido observado y se cree que la medida fue alterada por un efecto instrumental causado por la contaminación ambiental alrededor del cohete que contenía los sensores.

Transiciones libre-libre

Los electrones e iones generados en la reionización pueden producir fotones mediante transiciones libre-libre o la radiación de frenado. Debido a la energía involucrada, los fotones generados afectarían especialmente a la parte Rayleigh-Jeans (longitudes de onda más largas) del espectro de la radiación de fondo. Análogamente al procedimiento seguido en la comptonización, se define la profundidad óptica de la transición libre-libre como

$$y_{\text{II}} \equiv \int_{t}^{t_0} \kappa \frac{T_e - T_\gamma}{T_e} dt, \tag{7.15}$$

donde κ es una constante que depende de la temperatura de los electrones y la densidad, por lo que son de aplicación los mismos comentarios realizados con respecto la comptonización. La distorsión producida en el espectro se manifiesta en un cambio ΔT_{II} de la temperatura de la distribución de cuerpo negro que se deduciría a partir de la observación de la parte Rayleigh-Jeans del espectro,

$$\Delta T_{\text{II}} = T_\gamma \frac{y_{\text{II}}}{x^2}. \tag{7.16}$$

La distorsión que una formación estelar a $z \approx 20$ causaría, de algunos mK a una frecuencia de unos pocos GHz, se encuentra por debajo de los límites de observación actuales. Medidas relativamente recientes (Bersanelli *et al.* 1994) indican que

$$|y_{\text{II}}| < 1.9\times10^{-5} \tag{7.17}$$

que equivale a $\Delta T_{\text{II}} < 0.04$ K a 2 GHz.

En conclusión, los datos indican que en el intervalo de tiempo transcurrido desde el desacoplamiento hasta el inicio de la formación de las primeras estructuras, el universo ha sido un lugar muy tranquilo, aunque en modo alguno aburrido, puesto que ha dado lugar al universo moderno. Este intervalo es el objeto de estudio del siguiente capítulo bajo el epígrafe «universo contemporáneo».

7.3 Caracterización de las anisotropías

Una vez revisados los mecanismos responsables de distorsiones globales del espectro de la radiación de fondo, procede estudiar los mecanismos responsables de la formación de anisotropías. Para ello es preciso establecer previamente las herramientas que permitan caracterizar las anisotropías generadas.

Se define la **anisotropía de la radiación de fondo como las diferencias existentes en la temperatura del espectro de cuerpo negro al observar direcciones distintas** del **cielo.** Estas anisotropías se cuantifican mediante la diferencia entre la temperatura de una región del cielo y la temperatura media, dividida por la temperatura media: $\Delta T/T$, y dependen de la escala angular θ a la que se muestrea el cielo.

Como se establecerá en los siguientes apartados, existen varios mecanismos capaces de producir anisotropías en la radiación cósmica de fondo, además de los embriones de estructuras materiales existentes en el momento del desacoplamiento. Cada mecanismo tiene una causa física distinta, y por consiguiente genera anisotropía a distintas escalas angulares y con distinta amplitud. Antes de abordar el estudio de estos mecanismos es preciso desarrollar un método que permita clasificar y cuantificar las distintas anisotropías. Éste es el objeto de este apartado.

7.3.1 Espectro

Consideremos que se obtiene un cartografiado de la temperatura de la radiación cósmica de fondo sobre todo el cielo. Se demuestra que cualquier función continua $f(\theta, \varphi)$ evaluada sobre la superficie de una esfera puede desarrollarse en una serie doble convergente de manera uniforme en los armónicos esféricos[9] Y_{lm} denominada **serie de Laplace.** Por tanto, la variación de temperatura T en función de la dirección (θ, φ) puede expresarse de la forma siguiente:

$$T(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi). \tag{7.18}$$

En este caso existirá una relación entre l y la escala angular de variación de la temperatura. El término $l = 0$, correspondiente a un **monopolo,** no constituye propiamente una anisotropía sino la temperatura media, el término $l = 1$ corresponde a un **dipolo** con una separación $\Delta\theta$ en el cielo entre máximo y mínimo de temperatura de 180º, $l = 2$ constituye un **cuadrupolo** con una separación angular de 90º, y así sucesivamente. Por tanto, la relación aproximada entre l y la separación angular cuando $l \geq 1$ para l pequeños es

$$\Delta\theta \approx \frac{\pi}{l}. \tag{7.19}$$

Para l grandes,

$$\Delta\theta \approx \frac{1}{l}. \tag{7.20}$$

[9] La parte angular de la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas.

En la práctica, lo que se mide es la temperatura media del cielo en cada dirección (θ, φ) dentro de un círculo de radio $\Delta\theta$ cubierto por la antena utilizada[10]. En estas circunstancias, no se pueden detectar anisotropías a escalas angulares inferiores a $\Delta\theta$, es decir, las l del desarrollo (7.18) están limitadas a un valor máximo $1/\Delta\theta$,

$$T_{\Delta\theta}(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}a_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi)W_l(\Delta\theta), \tag{7.21}$$

donde $W_l(\Delta\theta)$ es una **función ventana** que corta la suma para los términos $l > 1/\Delta\theta$.

El cuadrado de (7.21) es

$$T^2_{\Delta\theta}(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\sum_{l'=0}^{\infty}\sum_{m'=-l'}^{+l'}a_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi)W_l(\Delta\theta)a^{*}_{l'm'}Y^{*}_{l'm'}(\theta,\varphi)W^{*}_{l'}(\Delta\theta), \tag{7.22}$$

donde los asteriscos indican los complejos conjugados de las respectivas funciones. Si se promedia para todas las direcciones, las relaciones de ortonormalidad de los armónicos esféricos,

$$\int_{4\pi}Y_{lm}Y^{*}_{l'm'}\,d\Omega=\delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{7.23}$$

permiten escribir

$$\left\langle T^2_{\Delta\theta}\right\rangle=\frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left|a_{lm}\right|^2\left|W_l(\Delta\theta)\right|^2. \tag{7.24}$$

Definiendo el promedio sobre m de $|a_{lm}|^2$,

$$C_l=\frac{1}{2l+1}\sum_{m=-l}^{m=+l}\left|a_{lm}\right|^2=\left\langle\left|a_{lm}\right|^2\right\rangle_m, \tag{7.25}$$

que está normalizado al dividir por todos los $(2l+1)$ valores de m. Sustrayendo de (7.24) la temperatura media al cuadrado (el término en $l = 0$) y aplicando (7.25), se obtiene la varianza de la temperatura a la escala angular $\Delta\theta$,

$$\left\langle\Delta T^2_{\Delta\theta}\right\rangle=\frac{1}{4\pi}\sum_{l=1}^{\infty}(2l+1)C_l\left|W_l(\Delta\theta)\right|^2, \tag{7.26}$$

donde para escalas angulares pequeñas (l grandes) puede reemplazarse la suma por una integral,

$$\left\langle\Delta T^2_{\Delta\theta}\right\rangle=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}l(2l+1)C_l\left|W_l(\Delta\theta)\right|^2\frac{dl}{l}. \tag{7.27}$$

[10] Propiamente es la anchura del haz a mitad de potencia de la antena o HPBW acrónimo inglés de *Half Power Beam Width.*

El factor $l(2l+1)C_l/4\pi$ representa, por tanto, la contribución a las fluctuaciones de temperatura por intervalo de ln$l$. Es decir, este factor representa la varianza por intervalo logarítmico del espectro angular. De esta manera, medidas de $T_{\Delta\theta}(\theta, \varphi)$ a una cierta escala angular $\Delta\theta$ permiten obtener valores de dicho factor para distintos $l < 1/\Delta\theta$. La combinación de medidas obtenidas a distintas escalas angulares por distintos instrumentos permite caracterizar las anisotropías.

La figura 7.3 representa las medidas obtenidas a distintas escalas angulares así como los resultados de los modelos. Puede observarse que, para aproximadamente $l<20$, equivalente a unos 10º, el espectro adopta un valor prácticamente constante e igual a una fluctuación relativa de temperatura de $\sim 10^{-5}$. Este resultado implica que las fluctuaciones de temperatura son independientes de la escala angular para $\Delta\theta > 10º$. Asimismo, puede observarse la existencia de un máximo a $l \approx 220$ correspondiente a una escala angular $\Delta\theta \approx 1º$.

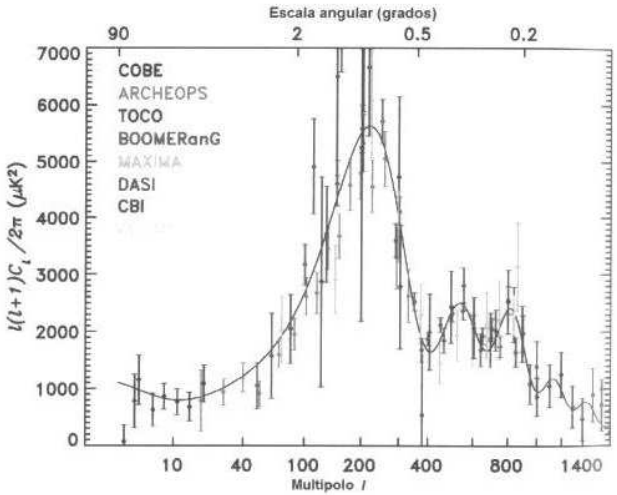


Figura 7.3. Distintas medidas de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo en función de la escala angular superpuestas a un ajuste de un modelo a los datos del primer año de WMAP. Se indican los distintos experimentos. De Hinshaw *et al.*, 2003.
Reproducido con permiso de la American Astronomical Society.

7.3.2 Escala angular

Aunque su relevancia y significado físico se establecerán con un cierto rigor más adelante, intuitivamente puede pensarse que existirán dos escalas angulares significativas en las anisotropías: la determinada por el radio[11] de Hubble[12] R_H y la determinada por el espesor de la superficie de último esparcimiento. Suponiendo el universo euclídeo (es decir, de curvatura despreciable) y dominado por materia no relativista se obtiene (ejercicio 7.9)

$$\Delta\theta_H = \frac{1}{2(\sqrt{1+z}-1)} \approx 0.9º \tag{7.28}$$

para el ángulo subtendido por el radio de Hubble, y

$$\Delta\theta_{ue} = \frac{\Delta z_{ue}}{2\left[(1+z)^{3/2}-(1+z)\right]} \approx 9.5' \tag{7.29}$$

para el ángulo que subtendería una estructura de un tamaño igual al espesor de la superficie de último esparcimiento.

De forma análoga puede estimarse fácilmente (ejercicio 7.10) la masa contenida en una estructura situada en la superficie de último esparcimiento y que subtienda un ángulo $\Delta\theta$, supuesta esférica y despreciando el pequeño incremento de densidad con respecto la densidad media,

$$\Delta\theta = \frac{(2MH_0G)^{1/3}}{2c\left[1-(1+z)^{-1/2}\right]} \approx 0.5'\left(\frac{M}{10^{12}}\right)^{1/3} \tag{7.30}$$

en unidades físicas, donde M se expresa en masas solares.

Estas relaciones permiten obtener los resultados de la tabla 7.1 que relacionan las escalas angulares con las masas.

$\Delta\theta$	$M(M_\odot)$	Estructura equivalente actual
0.9º	10^{18}	Radio de Hubble
20'	10^{17}	Supercúmulos de galaxias
10'	10^{16}	Espesor superficie último esparcimiento
5'	10^{15}	Cúmulos de galaxias[13]
0.5'	10^{12}	Galaxias

Tabla 7.1 Equivalencia entre las escalas angulares de anisotropía de la radiación de fondo y las estructuras a las que equivaldrían en la actualidad.

[11] No el diámetro, puesto que ΔT es la diferencia con respecto la temperatura media, no la amplitud total, en cuyo caso sí habría que considerar el diámetro, aunque se trata de una sutileza académica puesto que se evalúan órdenes de magnitud.

[12] De una manera un tanto laxa, en algunos textos se habla del ángulo subtendido por el horizonte en el instante actual, lo cual puede inducir a confusión puesto que, si se acepta el escenario inflacionario, el horizonte es mayor que el universo observable. Además, ya se demostró que el radio de Hubble no es un horizonte. El origen de esta denominación un tanto confusa es que, como se demostrará más adelante en este mismo capítulo (7.7.2), cuando domina la materia no relativista el radio de Hubble es del orden de magnitud del llamado horizonte acústico. En el presente texto, por claridad y motivos pedagógicos, se ha evitado esta identificación de términos, distinguiendo entre horizonte acústico y radio de Hubble, aunque este último se utilice para estimar la escala del horizonte acústico.

[13] Un cúmulo de galaxias «típico» contiene desde un centenar a varios miles de galaxias, tiene una masa de $10^{14\text{-}15}$ $M_\odot$ y un diámetro de unos 8 Mpc. La separación típica entre cúmulos es del orden de 10 Mpc.

Los ángulos correspondientes al radio de Hubble y al espesor de la superficie de último esparcimiento permiten definir tres escalas angulares: **gran escala, cuando** $\Delta\theta > \Delta\theta_H \approx 1^\circ$ ($l < 200$); **escala intermedia, cuando** $\Delta\theta_H \approx 1^\circ > \Delta\theta > \Delta\theta_{ue} \approx 10'$ ($200 < l < 1000$) **y pequeña escala, cuando** $\Delta\theta < \Delta\theta_{ue} \approx 10'$ ($l > 1000$). Como se verá más adelante, esta clasificación por escalas angulares corresponde a distintos mecanismos físicos generadores o disipadores de anisotropía.

7.3.3 Anisotropías primarias, secundarias y terciarias

Además de la clasificación por escalas angulares, cabe distinguir entre **anisotropías primarias,** entendiendo como tales las **registradas en la superficie de último esparcimiento**, anisotropías **secundarias, generadas en la trayectoria seguida por los fotones desde el desacoplamiento hasta la actualidad** y anisotropías **terciarias, debido a la contribución de otras fuentes distintas de la radiación cósmica de fondo.**

Finalmente, las anisotropías pueden clasificarse, desde el punto de vista matemático, en escalares (fluctuaciones en la densidad y presión), vectoriales (de velocidad o rotación) y tensoriales (ondas gravitatorias). Las más interesantes son las escalares, las fluctuaciones de densidad, puesto que éstas son las que darán lugar a las estructuras que se observan actualmente en el universo.

7.4 Espectro de las fluctuaciones primordiales

Como se trató en el capítulo 5, las fluctuaciones cuánticas del campo escalar responsable de la inflación generan una serie de fluctuaciones iniciales. Usualmente se asume un espectro inicial en forma de ley de potencias en la fluctuación cuadrática media de la masa o la densidad,

$$\left(\frac{\Delta M}{M}\right)_{\text{rms}} = \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{\text{rms}} \propto R^{-(3+n)/2} \propto M^{-\alpha}, \tag{7.31}$$

donde R es la **longitud de escala comóvil** de las fluctuaciones. Como la masa M es proporcional a R^3, entonces $\alpha = {}^1/_2 + n/6$. El espectro se caracteriza por el valor de n, denominado **índice de la ley de potencias** o **inclinación**[14]. El valor $n=1$ genera lo que se denomina **espectro de Harrison-Zel'dovich** o **invariante de escala**[15], que es el habitualmente asumido y que en general predicen las teorías inflacionarias.

[14] Del inglés *power law index* o *tilt*.

[15] Las razones de esta denominación se establecerán más adelante.

7.5 Mecanismos causantes de anisotropías primarias

7.5.1 Variaciones de densidad

Una variación de densidad con respecto la densidad media causada, por ejemplo, por fluctuaciones primordiales, genera una variación de temperatura con respecto a la temperatura media. Es decir: produce una anisotropía en la radiación cósmica de fondo. En efecto, la proporcionalidad inversa (6.54) entre la temperatura de los fotones y el factor de escala, permite relacionar las variaciones de temperatura con las del factor de escala,

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta a}{a}. \tag{7.32}$$

Pero las variaciones relativas del factor de escala se pueden relacionar con las variaciones relativas de densidad de energía (2.78) de los fotones y de la materia bariónica,

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta\rho_b}{3\rho_b} = \frac{\Delta\rho_\gamma}{4\rho_\gamma}. \tag{7.33}$$

Por tanto, las zonas **donde la densidad es más alta (baja) que la densidad media se corresponden con zonas que presentan un incremento (disminución) de la temperatura** con respecto a la temperatura media.

La relación (7.33) corresponde a las llamadas **fluctuaciones de densidad adiabáticas**, para las que la entropía es constante según (6.49), y por tanto η (6.122) es constante (ejercicio 7.11). Este tipo de fluctuaciones son **producidas en los modelos más simples de inflación** con $n = 1$ en (7.31), por lo que son invariantes de escala.

Pero las fluctuaciones de densidad también pueden ser de **isocurvatura,** para las que la densidad es constante y entonces η varía, verificando (ejercicio 7.12),

$$\frac{\Delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma} = -\frac{\Delta\rho_m}{\rho_m}\frac{\rho_m}{\rho_\gamma} \tag{7.34}$$

que generalmente corresponden a una inclinación $n = -1$ en (7.31). En este tipo de fluctuaciones, donde hay más densidad de materia no relativista, la densidad de los fotones es menor y viceversa, a fin de mantener la densidad (es decir, la curvatura) constante.

Finalmente, las **fluctuaciones de densidad isotermas** verifican $\Delta\rho_\gamma/\rho_\gamma = 0$. Es decir, estas fluctuaciones se dan únicamente en la densidad de materia. Sin embargo, debido al ya mencionado acoplamiento entre materia y radiación que existe antes del desacoplamiento, las fluctuaciones isotermas terminan no siéndolo.

7.5.2 Efecto Sachs-Wolfe

Los incrementos de densidad también crean un potencial gravitatorio ψ. De acuerdo con el principio de equivalencia (2.2.1), cuando un fotón se mueve en un campo gravitatorio heterogéneo experimenta un cambio en su energía que representa un desplazamiento al rojo gravitatorio. En el caso de la radiación cósmica de fondo este efecto se traducirá en una disminución de la temperatura de cuerpo negro observada puesto que los fotones recibidos procedentes de la fluctuación de densidad deben vencer el campo gravitatorio causado por la misma. Es decir: este **efecto compensará parcialmente el incremento de temperatura debido a la fluctuación de densidad**. Por conservación de la energía puede escribirse (ejercicio 7.13)

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_0 = \left(\frac{\Delta T}{T}\right) - \Psi. \tag{7.35}$$

El subíndice 0 indica la fluctuación de temperatura o anisotropía *observada* y ψ es la diferencia de potencial entre emisor y receptor, $\psi = V_e - V_r$, con los potenciales definidos positivos.

De (7.32) y para una única ecuación de estado en un universo de curvatura nula (3.7),

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta a}{a} = -\frac{2}{3(1+w)}\frac{\Delta t}{t}. \tag{7.36}$$

Pero en un campo gravitatorio el tiempo transcurre más lentamente. Puede deducirse el retraso temporal recurriendo a un símil newtoniano: la aceleración es igual al gradiente del potencial cambiado de signo,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{dV}{dr} = -\frac{dV}{dt}\frac{dt}{dr} = -\frac{dV}{dt}, \tag{7.37}$$

donde la última igualdad se obtiene considerando que se está aplicando al caso de la luz y por tanto $dr/dt = c = 1$ en las unidades utilizadas. Integrando (7.37) entre los instantes de emisión y recepción, teniendo en cuenta que $c=1$ aplicable en recepción, se obtiene

$$\frac{dr}{dt} = 1 - \Psi. \tag{7.38}$$

Como la velocidad de la luz es constante, ψ es positivo y dr es un elemento de longitud comóvil, (7.38) implica que el intervalo de tiempo es mayor. Elevando al cuadrado y reagrupando, despreciando términos cuadráticos del potencial,

$$0 = -(1-2\Psi)dt^2 + dr^2, \tag{7.39}$$

expresión que, por comparación con la métrica de Robertson-Walker en el caso de la luz ($ds=0$), permite deducir que los intervalos de tiempo difieren por un factor $(1-2\Psi)^{1/2} \approx 1-\psi$. Asimilando los intervalos de tiempo a un tiempo finito se obtiene $t' = (1-\psi)t$, es decir,

$$\frac{\Delta t}{t} \approx -\Psi \tag{7.40}$$

que permite interpretar el intervalo de tiempo de (7.36) como un retraso debido al campo gravitatorio. Sustituyendo (7.40) en (7.36) y éste en (7.35),

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_0 = -\frac{1+3w}{3(1+w)}\Psi \tag{7.41}$$

que para un universo dominado por materia pulverulenta se reduce a[16],

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_0 = -\frac{1}{3}\Psi \tag{7.42}$$

Donde ψ representa la diferencia de potencial gravitatorio entre el emisor y el observador. Es decir: **las regiones de mayor densidad aparecerán más frías, lo que cancela parcialmente la anisotropía** (7.5.1) **causada por el aumento de temperatura asociado al incremento de densidad.**

7.5.3 Efecto Doppler

Un incremento de densidad es susceptible de causar un desplazamiento de materia por interacción gravitatoria. Si existe un movimiento relativo con una velocidad $\vec{v}$ entre la fuente y el observador, se producirá un desplazamiento Doppler que afectará a la temperatura de la distribución de cuerpo negro de la región en movimiento,

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\hat{n}\cdot\vec{v}, \tag{7.43}$$

como se deduce de (7.32), (2.32), (1.7) y del Doppler no relativista, donde $\hat{n}$ es el vector unitario en la dirección del emisor y $c=1$. **Una velocidad radial de alejamiento genera un desplazamiento al rojo que se traduce en una disminución de temperatura con respecto la temperatura media.** De ahí el signo de (7.43).

[16] Una deducción más rigurosa conduce al mismo resultado.

7.5.4 Síntesis

Resumiendo todos los efectos considerados, puede escribirse, para el caso de fluctuaciones de densidad adiabáticas,

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_0 = \frac{\Delta\rho_b}{3\rho_b} - \frac{\Psi}{3} - \hat{n}\cdot\bar{v}, \tag{7.44}$$

donde el primer término representa una fluctuación adiabática de la densidad, el segundo el efecto Sachs-Wolfe y el tercero el efecto Doppler. El segundo tiende a reducir la amplitud del primero.

7.6 Anisotropías primarias de gran escala ($\Delta\theta > \Delta\theta_H$)

7.6.1 Efecto Sachs-Wolfe

A gran escala, el tamaño R de las fluctuaciones de densidad es mayor que el radio de Hubble R_H en el momento de la combinación. El término de Sachs-Wolfe (7.42) será, en unidades físicas,

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{SW} \approx \frac{G\Delta M}{R} \approx G\rho\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_R \frac{4\pi R^3}{3R} \approx \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_R \left(\frac{R}{R_H}\right)^2 = \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_R \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_H}\right)^2 \tag{7.45}$$

puesto que, de la segunda ecuación de Fridman (2.88) y de la definición de radio de Hubble (4.83) resulta que $G\rho \propto H^2 = R_H^{-2}$ y además las escalas angulares son proporcionales a las escalas lineales a través de la distancia de ángulo de la superficie de último esparcimiento. En consecuencia, como para un espectro de fluctuaciones primordiales de Harrison-Zel'dovich (n=1) es $\Delta\rho/\rho \propto R^{-2}$ según (7.31), entonces $(\Delta T/T)_{SW}$ es constante.

Procediendo análogamente, el término Doppler (7.43) puede escribirse

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{\text{Doppler}} = -\hat{n}\cdot\bar{v} \approx -G\rho\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_R \frac{4\pi R^3}{3R^2} t \approx -\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_R \left(\frac{R}{R_H}\right) \approx -\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_R \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_H}\right) \tag{7.46}$$

puesto que (3.12) en un universo euclídeo dominado por materia no relativista, $H = 2/(3\,t)$.

Finalmente, el término de fluctuación de densidad,

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_\rho \approx \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_R. \tag{7.47}$$

Por consiguiente, a **grandes escalas angulares $\Delta\theta > \Delta\theta_H$, el efecto Sachs-Wolfe domina** sobre los demás y, si las fluctuaciones tienen un espectro de Harrison-Zel'dovich, el espectro de las anisotropías será constante, no dependerá de la escala l. De ahí la denominación de «invariante de escala» para este valor de la inclinación n. El espectro observado (figura 7.3) verifica este comportamiento y constituye una evidencia circunstancial de que **las fluctuaciones primordiales son adiabáticas e invariantes de escala**. Los datos de COBE[17] (figura 7.3) muestran una anisotropía de 28 μK a escalas angulares de unos 10° (Smoot *et al.*, 1992).

7.6.2 Efecto Doppler: dipolo y cuadrupolo

Aunque a gran escala el efecto Doppler, debido a las fluctuaciones de densidad, es despreciable frente al efecto Sachs-Wolfe, existe un efecto Doppler debido a la cinemática del observador con respecto a la superficie de último esparcimiento que sí es significativo a gran escala.

Dipolo

Resulta lógico suponer que el Sistema Solar, en su movimiento con respecto al centro galáctico y también debido al movimiento de la Galaxia con respecto a otras galaxias, se mueva con respecto al sistema de referencia determinado por la superficie de último esparcimiento, supuesta esta superficie desprovista de diferencias de velocidades de unas partes con respecto a otras. Este movimiento del Sistema Solar generará una anisotropía tipo dipolo, $l = 1$, o de una escala angular de 180° (figura 7.4).

La medida de la magnitud de esta anisotropía es

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{l=1} = 1.2\times10^{-3}, \tag{7.48}$$

que equivale a 360 km/s, en la dirección de coordenadas galácticas $l = 264°$, $b = 48°$. Teniendo en cuenta el movimiento del Sistema Solar alrededor del centro galáctico, la Galaxia se desplaza con respecto al sistema de referencia comóvil de la radiación de fondo a una velocidad de 550 km/s.

El dipolo observado también podría ser resultado de una superposición de la velocidad del Sistema Solar con respecto la superficie de último esparcimiento y de una anisotropía dipolo presente en la superficie del último esparcimiento, que podría ser causada por fluctuaciones preinflacionarias de campos escalares como el inflatón, o bien debida a fluctuaciones de densidad preinflacionarias. Sin embargo, el análisis de los momentos multipolares superiores de los datos proporcionados por COBE sugiere que al

[17] Acrónimo de «COsmic microwave Background Explorer».

menos el 90% del dipolo está generado por la cinemática del Sistema Solar, por lo que se acostumbra a suponer que el dipolo tiene un origen fundamentalmente Doppler.

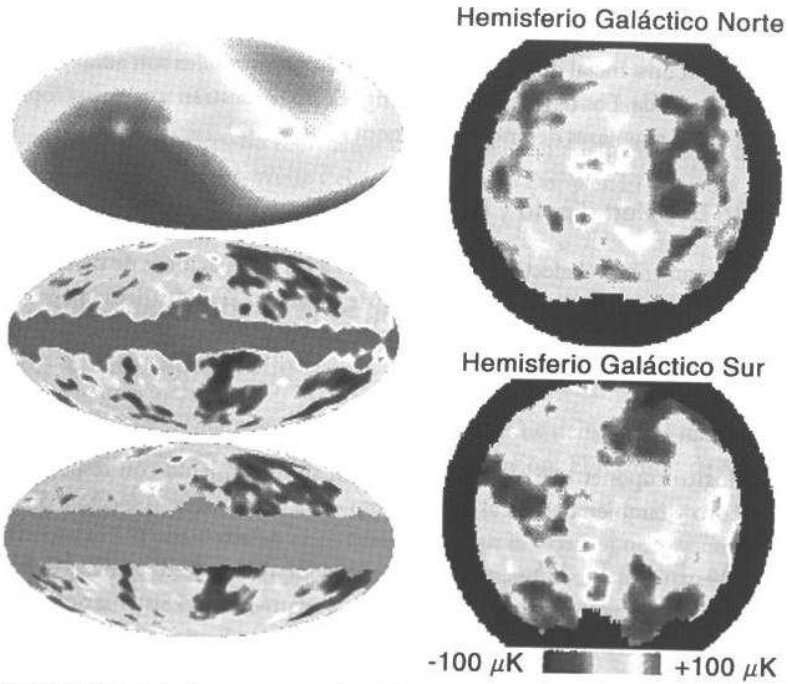


Figura 7.4 Izquierda. Imagen superior: dipolo del fondo cósmico obtenido por el instrumento DMR[18] del satélite COBE. Las manchas se deben a la emisión de la Galaxia. Imagen central: una vez sustraído el dipolo, el mayor contraste permite observar la emisión de la Galaxia. Imagen inferior: una vez extraída la emisión de la Galaxia modelando los datos obtenidos por el satélite COBE con otros instrumentos a otras frecuencias. Las imágenes abarcan todo el cielo. Derecha. Imagen final de las anisotropías primarias de gran escala obtenidas con el instrumento DMR. Todas las imágenes proceden del *Legacy Archive for Microwave Background Data Analysis* (LAMBDA) financiado por la NASA *Office of Space Science* (http://lambda.gsfc.nasa.gov/).

Cuadrupolo

El origen cinemático del dipolo implica un cuadrupolo l=2 causado por efecto Doppler transversal (ejercicio 7.14),

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{l=2} = 7.2\times10^{-7} \tag{7.49}$$

[18] Differential Microwave Radiometer.

7.7 Anisotropías primarias de escala intermedia ($\Delta\theta_{ue} < \Delta\theta < \Delta\theta_H$)

7.7.1 El fluido fotón-barión

Una región del universo con una densidad suficientemente superior a la media tenderá a colapsarse bajo la influencia gravitatoria. Sin embargo, si todavía no se ha producido la combinación, los electrones libres actúan como un pegamento entre los fotones y los bariones: los fotones arrastran a los electrones por esparcimiento Thomson y viceversa, y los electrones arrastran a los bariones mediante atracción electrostática y viceversa. El universo constituye entonces un **fluido fotón-barión** fuertemente acoplado. Por consiguiente, al incremento en la densidad de bariones debido a la gravitación, le corresponderá un incremento en la densidad de fotones, el cual aumentará la presión puesto que $p_\gamma = \rho_\gamma/3$. Esta presión detiene el colapso gravitatorio y expande la región hasta el punto en que la gravedad detiene la expansión y vuelve a comprimir. De este modo, se generan oscilaciones en la densidad del fluido fotón-barión que solamente cesarán cuando se haya producido la combinación y ya las fluctuaciones de densidad puedan crecer por inestabilidad gravitatoria sin que se les oponga la presión de la radiación. Estas compresiones y enrarecimientos representan variaciones de densidad que generarán anisotropías en la radiación cósmica de fondo (figura 7.5) de acuerdo con (7.33)

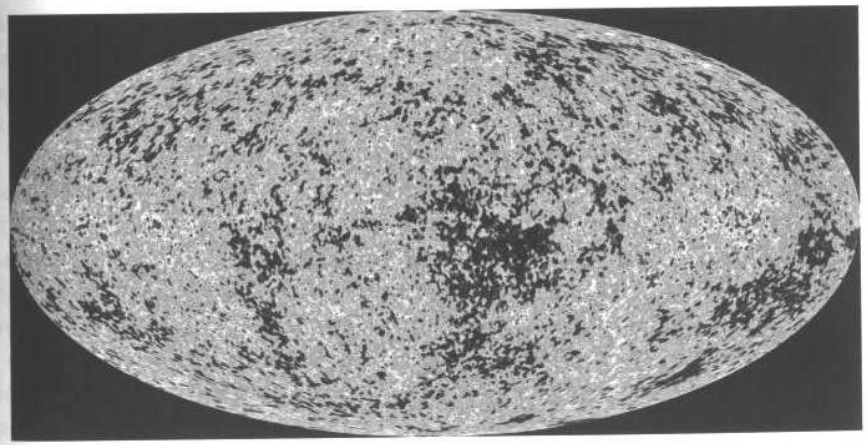


Figura 7.5 Imagen de todo el cielo resultado de la combinación lineal pesada de las cinco frecuencias a las que observó WMAP[19]. En esta imagen, obtenida por el WMAP Science Team, los pesos están elegidos de tal manera que minimicen la contribución de la emisión de la Galaxia. Por tanto, el mapa proporciona una imagen de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo. La imagen procede del *Legacy Archive for Microwave Background Data Analysis* (LAMBDA) financiado por la NASA *Office of Space Science* (http://lambda.gsfc.nasa.gov/).

[19] Acrónimo ingles de *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe.*

puesto que las fluctuaciones son adiabáticas. **A estas escalas**, y teniendo en cuenta las expresiones (7.45), (7.46) y (7.47) obtenidas en el apartado anterior, **las anisotropías debidas a estas variaciones de densidad dominarán sobre los efectos Doppler y Sachs-Wolfe.**

7.7.2 Picos acústicos

Las oscilaciones así generadas en el fluido fotón-barión que constituye el universo antes de la combinación, podrán tener lugar en una variedad de modos. **Los modos que se encuentren en un *máximo o un mínimo de densidad* en el momento de la combinación generarán un máximo en el espectro de anisotropías,** puesto que la expresión (7.27) es cuadrática. Estos máximos en el espectro se denominan **picos acústicos.**

La compresión empieza en el instante en que se generan las fluctuaciones primordiales cuando termina la inflación (t~0). En consecuencia, el modo fundamental, el de mayor escala espacial, denominado **primer pico acústico**, será aquel que se encuentre en su **primer máximo en el momento de la combinación** (figura 7.6). Como las compresiones o enrarecimientos se propagan a la velocidad del sonido, la escala espacial H_A del modo fundamental vendrá determinada por la longitud recorrida entre $t = 0$ (~fluctuaciones primordiales) y la combinación, por una señal acústica u onda de presión propagándose a la velocidad del sonido en un universo en expansión. A esta distancia se la denomina **horizonte acústico,**

$$H_A = a_{rec}\int_0^{t_{rec}} \frac{c_s}{a}\mathrm{d}t \tag{7.50}$$

donde c_s es la **velocidad del sonido en el fluido fotón-barión** (ejercicio 7.15),

$$c_s^2 = \left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\text{adiabático}} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+R} \tag{7.51}$$

con

$$R = \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma} \tag{7.52}$$

Nótese el paralelismo de (7.50) con la definición del horizonte de partículas (4.87) con c_s=1. En consecuencia, **el horizonte acústico representa las zonas conectadas causalmente por ondas de presión en vez de por la luz.**

De acuerdo con (7.52) y según la definición de unidades utilizada, la velocidad del sonido cuando domina la densidad de fotones es igual a

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{7.53}$$

y es mucho menor cuando domina la densidad de bariones. Puede demostrarse fácilmente (ejercicio 7.16) que en el momento del desacoplamiento

$$c_s \approx 0.5. \tag{7.54}$$

Por tanto, c_s varía poco en el intervalo de tiempo considerado, y puede estimarse un valor aproximado del horizonte acústico (7.50) adoptando para c_s el valor constante dado por (7.54), obteniéndose que, **en un universo euclídeo dominado por materia no relativista, el horizonte acústico es igual al radio de Hubble** (4.83) (ejercicio 7.17). De este modo, el horizonte acústico define una escala angular $\Delta\theta_A$ que es igual al ángulo subtendido por el radio de Hubble $\Delta\theta_A \approx \Delta\theta_H$. Éste es el motivo por el que, **a escalas angulares $\Delta\theta < \Delta\theta_H$, es preciso tener en cuenta la fuerza recuperadora debida a la presión del fluido fotón-barión, mientras que a escalas angulares $\Delta\theta > \Delta\theta_H$ no es necesario tener en cuenta esta contribución. La escala angular del modo fundamental vendrá determinada entonces por el ángulo subtendido por el horizonte acústico, correspondiente a la denominada escala acústica** l_A que define la posición del primer pico acústico l_1 (figura 7.6).

El **segundo pico acústico** corresponderá a un **mínimo de densidad** (figura 7.6). Representa un modo de oscilación que habrá efectuado un ciclo completo de compresión y enrarecimiento cuando llega la combinación. En este caso su escala espacial y angular son la mitad de las del primer pico, por lo que la posición l_2 del segundo pico será el doble que la del primero (7.19). El tercer pico volverá a corresponder a un máximo de densidad en el momento de la combinación asociado a un modo que habrá efectuado un ciclo de compresión-enrarecimiento-compresión (figura 7.6), y así sucesivamente. En conclusión, y según este modelo simplificado, la escala angular de los distintos picos acústicos vendrá determinada por fracciones enteras de la escala angular del horizonte acústico. Es decir, según (7.19), la escala l_n de los distintos picos acústicos vendrá definida por múltiplos de la escala acústica

$$l_n = n l_A, \tag{7.55}$$

donde n = 1, 2, 3, ...

Los modos que no sean múltiplos enteros de la escala acústica no generarán picos puesto que su densidad no será máxima ni mínima cuando tenga lugar la combinación, pero ensancharán los picos existentes (figura 7.7).

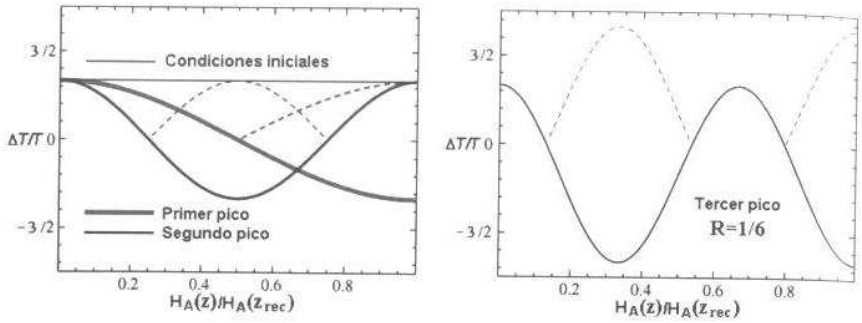


Figura 7.6 Izquierda: el modo que completa media oscilación cuando ocurre la combinación define la escala del primer pico acústico. El modo que completa una oscilación en el momento de la combinación constituye el segundo pico. Tanto los mínimos como los máximos representan picos en el espectro de potencias (7.27) que se representan por la línea de trazos. Por este motivo, los picos más intensos serán múltiplos enteros de la escala del primero. Derecha: un aumento en la densidad de bariones (7.52) amplifica las oscilaciones. En esta figura se representa la amplificación que sufre el tercer pico acústico. De Hu y Dodelson, 2002.
Copyright 2002, reproducido con permiso de Annual Reviews.

7.7.3 Implicaciones cosmológicas de los picos acústicos

Inflación

La sola detección de picos acústicos en el espectro de la radiación de fondo es una **evidencia indirecta de la existencia de inflación.** Los modelos no inflacionarios solamente pueden generar fluctuaciones dentro del horizonte de partículas (que para un universo dominado por radiación es igual al radio de Hubble según la ecuación 4.88). En este caso, y debido a la expansión del horizonte, las fluctuaciones iniciales no se generarían en el mismo instante independientemente de la escala, y las fases de los distintos modos de las oscilaciones de densidad no serían las mismas. Incluso podrían diferir entre horizontes debido a la falta de conexión causal. Esta incoherencia provocaría la desaparición de los picos acústicos. En cambio, la inflación genera un espectro de fluctuaciones independiente de la escala y en el mismo instante, por lo que todos los modos están en fase.

Parámetro de densidad (Ω_0)

La distancia de ángulo puede aproximarse, a altos desplazamientos al rojo, por la distancia propia de un universo de curvatura no nula dominado por materia no relativista ($\Omega_0 \approx \Omega_{m0}$) (ejercicio 7.18),

$$D_A \approx \frac{2}{H_0 \Omega_0 z}, \tag{7.56}$$

de donde se obtiene

$$\Delta\theta_A \approx \Delta\theta_H = \frac{R_H}{D_A} \approx \frac{\sqrt{\Omega_0}}{2\sqrt{z}} = 0.86^o \sqrt{\Omega_0} \tag{7.57}$$

que corresponde, según (7.19), a una escala

$$l_1 = l_A \approx \frac{209}{\sqrt{\Omega_0}}. \tag{7.58}$$

Por tanto, la posición del primer pico acústico está relacionada con el parámetro de densidad. El espectro de anisotropías observado por el satélite WMAP (figura 7.7) exhibe el primer pico acústico a l_1=220.1±0.8 (Hinshaw *et al.*, 2003), lo cual permite afirmar, mediante cálculos más exactos que los efectuados aquí, que el universo es euclídeo.

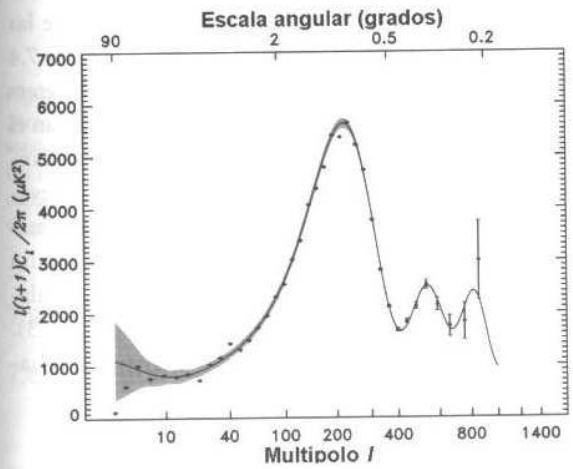


Figura 7.7 Espectro de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo obtenidas por el satélite WMAP en función de la escala angular. Los errores representan 1σ. La línea muestra el mejor ajuste al modelo con constante cosmológica de Spergel *et al.*, 2003. La banda gris alrededor del modelo representa la varianza cósmica[20]. De Hinshaw *et al.*, 2003. Reproducido con permiso de la American Astronomical Society.

[20] Cada C_l (7.25) procede del promedio de $2l$+1 valores de m. Por tanto el error ΔC_l inevitablemente aumenta a medida que disminuye l. En este contexto, este hecho se denomina «varianza cósmica».

Parámetro de densidad de bariones (Ω_{b0}) y constante de Hubble (H_0)

La intensidad y posición relativa de los picos acústicos depende de la densidad de bariones puesto que un incremento en el parámetro de densidad de bariones provoca, a grandes rasgos, los siguientes efectos:

- Una disminución de la velocidad del sonido (7.51) y, por tanto, un incremento de la escala acústica l_A: los picos acústicos se desplazan.
- Aumenta la amplitud de las oscilaciones, en especial la del primer pico, al aumentar el campo gravitatorio. Esta amplitud también estará afectada, por tanto, por el valor de Ω_{m0}.
- Dado que solamente se intensifica la fase de compresión, se rompe la simetría de las oscilaciones: se amplifican los picos impares (debidos a compresión) con respecto a los pares (debidos a expansión).

Como **la altura del primer pico y la posición del segundo pico relativa al primero dependen de Ω_{m0}, Ω_{b0} y de H_0**, combinando estas medidas con la posición del primer pico, que como ya se ha visto depende de Ω_{m0}, **es posible determinar estos parámetros a partir de las medidas de los picos acústicos de la radiación de fondo cósmico (véase tabla 7.4 del apartado 7.11.3)**. En la actualidad, las medidas de WMAP sitúan el segundo pico en l_2=546±10 (Hinshaw *et al.* 2003). No se verifica $l_2 = 2l_1$ puesto que en rigor la posición del segundo pico con respecto al primero depende de los productos $\Omega_{b0}H_0^2$ y $\Omega_{m0}H_0^2$ (Doran y Lilley, 2002).

Realmente, cada una de las posiciones y alturas de los picos no dependen únicamente de un parámetro, sino que las dependencias son más complejas que las aquí esbozadas (figura 7.8 de este apartado y se recomienda consultar la tabla 7.4 del apartado 7.11.3). En general, las medidas de los picos acústicos permiten determinar con precisión, $\Omega_{b0}H_0^2$, $\Omega_{m0}H_0^2$, $D_A(z_{rec})$ y n. Sin embargo, **no proporcionan el parámetro de densidad de energía oscura,** puesto que puede reproducirse mediante una pequeña curvatura (figura 7.8) porque a desplazamientos al rojo tan elevados la densidad de energía oscura es minoritaria. Tampoco proporcionan la ecuación de estado de la energía oscura. El parámetro de densidad de energía oscura debe inferirse en base a medidas de Ω_{m0} obtenidos a partir de los cúmulos de galaxias y ajustes de distancias de luz a supernovas Ia a distancias cosmológicas (4.6.3). Se espera que estos últimos ajustes también puedan proporcionar cotas a la ecuación de estado de la energía oscura.

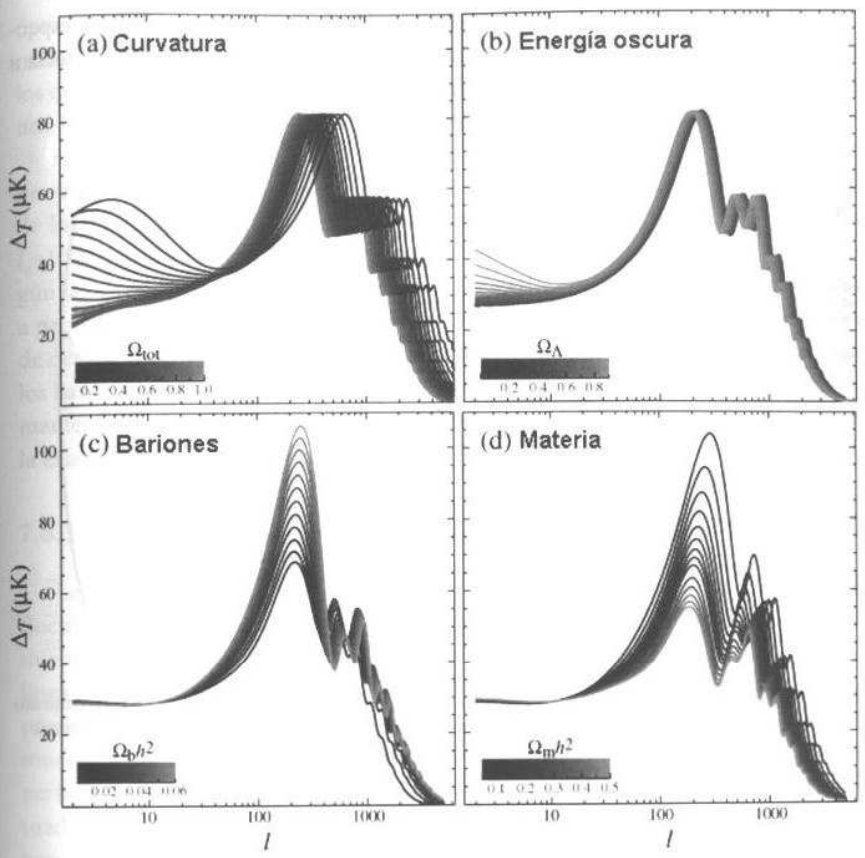


Figura 7.8 Variación del modelo de espectro acústico de temperaturas en función de cuatro parámetros cosmológicos fundamentales: (a) la curvatura, cuantificada por el parámetro de densidad total, (b) la energía oscura cuantificada por su parámetro de densidad, (c) la densidad de bariones y (d) la densidad total de materia no relativista, incluyendo materia oscura. El modelo representado considera n =1, De Hu y Dodelson, 2002.
Copyright 2002, reproducido con permiso de Annual Reviews.

7.8 Mecanismos que reducen las anisotropías primarias

7.8.1 Integración sobre la superficie de último esparcimiento

Las fluctuaciones con un tamaño menor que el espesor de la superficie de último esparcimiento son difíciles de observar, puesto que una fracción de los fotones que provienen de las mismas todavía sufren esparcimientos que emborronan la anisotropía y reducen su amplitud (figura 7.9). De manera más rigurosa: la tempe-

ratura observada en una dirección es el promedio de las temperaturas con respecto al espesor de la superficie de último esparcimiento. Este fenómeno no afecta a las anisotropías a estas escalas que se creen después del desacoplamiento.

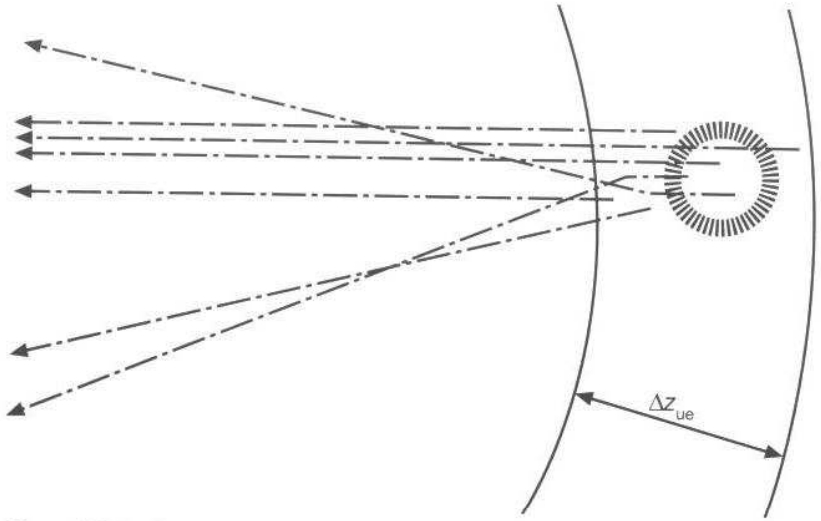


Figura 7.9 Una fluctuación de tamaño menor que el espesor de la superficie de último esparcimiento se observa con una amplitud menor debido al esparcimiento residual de una fracción de los fotones procedentes de ella, y a la contribución de fotones provenientes de la misma dirección, que no proceden de la fluctuación.

7.8.2 Amortiguación de los picos acústicos

El fluido fotón-barión no es perfecto: posee viscosidad y una cierta conductividad térmica. Ambas características provocan la disipación de las oscilaciones acústicas. La viscosidad es equivalente a una fuerza de rozamiento, por lo que resulta claro que contribuye a amortiguar las oscilaciones. En especial las de los modos de menor escala espacial (mayor l), que han completado más oscilaciones cuando llega el momento de la combinación. Con respecto a la conducción del calor, cuando se aproxima la combinación el medio pasa de ser ópticamente grueso ($\tau > 1$ en (7.4)) a ópticamente delgado ($\tau < 1$), y el acoplamiento entre fotones y electrones pierde eficiencia: los fotones «se escapan» de las zonas de mayor densidad y temperatura hacia zonas de menor densidad y temperatura, llevándose con ellos una parte de los electrones debido a la interacción Thomson residual. Los bariones siguen a los electrones por la atracción de Coulomb. Esta difusión del calor provoca la desaparición de picos acústicos de menor escala espacial (mayor l) para los que la profundidad

óptica (7.3) deviene <1 antes. Por consiguiente, antes de la equivalencia radiación-materia los efectos de viscosidad predominan, mientras que después predominarán los de conductividad térmica. En ambos casos son debidos a la difusión de los fotones. Este fenómeno se conoce como **amortiguación de Silk**[21] (Silk, 1968).

Los cálculos detallados indican que la escala de la amortiguación es del orden de $\sim R_H/10 \approx 5'$ o $\sim 10^{15}\ M_\odot$ (tabla 7.1). Por tanto, existe una intensa amortiguación de los picos acústicos de modos superiores al tercero (l_m con $m > 3$). La escala $l_4 \approx 1000$ equivale a $\Delta\theta_{ue}$, lo que confiere sentido a la clasificación de anisotropías según las escalas angulares de la sección 7.3.2: no se observan anisotropías primarias a pequeña escala. Sin embargo, eso no significa que desaparezcan las fluctuaciones de densidad del orden de la **masa de Silk**, puesto que, después de la combinación, los bariones vuelven a caer en los pozos de potencial que la materia oscura fría ha mantenido[22]. En este sentido, la intensidad relativa del tercer pico es indicativa de la existencia de materia oscura fría (figura 7.7).

7.8.3 Proyección de la cinemática sobre la línea de visión

Las oscilaciones acústicas generan un patrón de velocidades radiales. En las fluctuaciones de escala menor que la del espesor de la superficie de último esparcimiento, además del emborronamiento que sufren debido a la integración sobre la línea de visión (7.8.1), las velocidades de la parte que se aleja (acerca) en la compresión (expansión) se compensan con las la parte que se acerca (aleja), como se muestra en la figura 7.10. Cuando las fluctuaciones son de escala mayor que la superficie de último esparcimiento, las subsiguientes interacciones de los fotones situados en la parte más alejada de la superficie de último esparcimiento solamente permitirían observar (figura 7.10) la parte más próxima al observador y por tanto un desplazamiento al rojo (menor temperatura) en la compresión y un desplazamiento al azul (mayor temperatura) en la fase de enrarecimiento. Como el sentido es opuesto al del aumento de temperatura debido al aumento de densidad en la compresión y la disminución con el enrarecimiento, podrían disminuir la amplitud de los picos acústicos. Sin embargo, el efecto Doppler solamente afecta a las velocidades proyectadas sobre la línea de visión (figura 7.10), por lo que no puede disminuir significativamente la amplitud de los picos acústicos. Por este motivo y por la dependencia (7.46), el efecto Doppler no permite generar picos intensos. **Los picos detectados a escalas intermedias son entonces efectivamente picos acústicos y no «picos Doppler»**[23].

---

[21] Del inglés *Silk damping*.

[22] Como se justifica en el siguiente capítulo.

[23] Aunque a veces impropiamente se les denomine así.

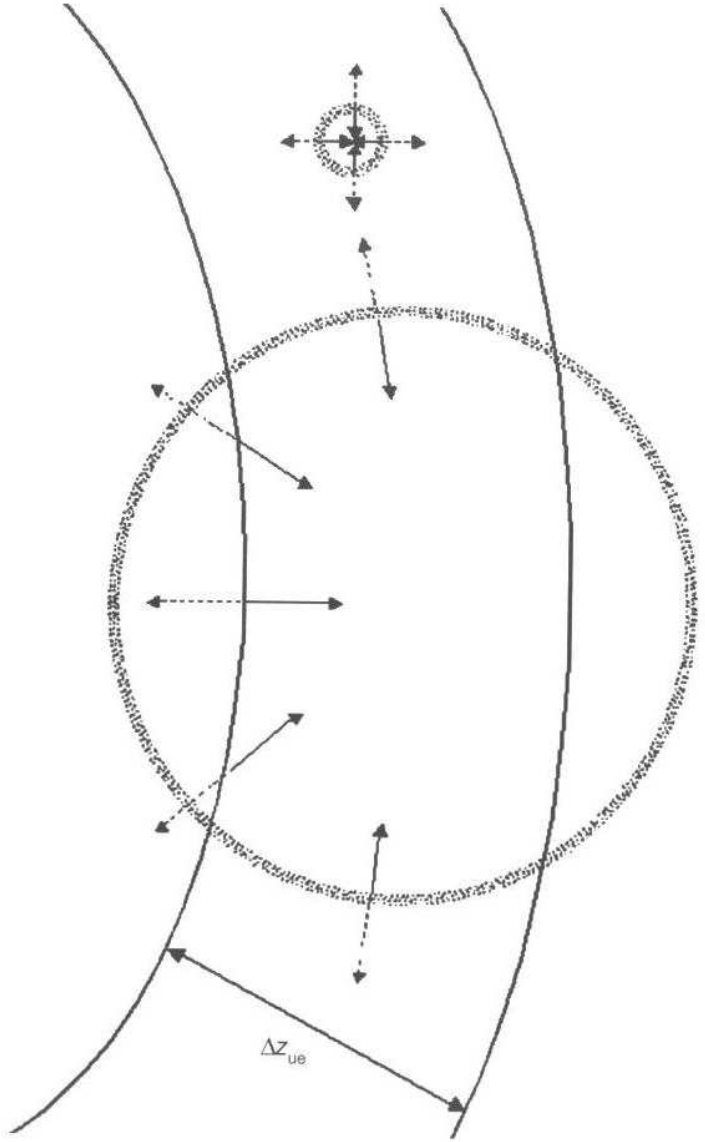


Figura 7.10 Las variaciones de temperatura causadas por el efecto Doppler generado por las oscilaciones de densidad no pueden observarse en fluctuaciones de tamaño menor que el espesor de la superficie de último esparcimiento: las velocidades de alejamiento y de acercamiento se compensan. Esto no ocurre en las fluctuaciones de tamaño mayor que el espesor de la superficie de último esparcimiento: las velocidades de las partes más alejadas no se observan debido al esparcimiento de los fotones, mientras que las de las partes más próximas sí se observan. Sin embargo, la amplitud se reduce por la proyección sobre la línea de visión.

7.8.4 Reionización

Una reionización del medio con posterioridad al desacoplamiento, que puede ser debida, como ya se ha mencionado anteriormente, a la existencia de una población III ionizante, reduce las anisotropías primarias. En efecto, de todos los fotones que provengan de una anisotropía $\Delta T/T$ presente en el momento del desacoplamiento, y que atraviesen una región ionizada del universo con una profundidad óptica τ, solamente una fracción $e^{-\tau}$ llegará al observador (7.4). En cambio, llegará una fracción $(1-e^{-\tau})$ de fotones a la temperatura media T. La temperatura en la dirección de la anisotropía será, por tanto,

$$T_0 = (T+\Delta T)e^{-\tau} + T(1-e^{-\tau}) = T(1+\frac{\Delta T}{T}e^{-\tau}) \tag{7.59}$$

y la anisotropía observada será

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_0 = \left(\frac{\Delta T}{T}\right)e^{-\tau}. \tag{7.60}$$

Las medidas del satélite WMAP (Spergel *et al.* 2003) indican que la profundidad óptica después de la combinación hasta la actualidad es $\tau = 0.17\pm0.06$ con un desplazamiento al rojo para la reionización de $z_r = 17\pm4$ asumiendo $X_e = 1$. Esta profundidad óptica implica una disminución aproximada de la amplitud de las anisotropías del 16%.

Este razonamiento solamente es válido para anisotropías de pequeña escala (gran l) puesto que en caso contrario la fracción de fotones procedentes de otras direcciones que terminan llegando al observador no se encuentran a una temperatura T sino $T+\Delta T$.

Finalmente, **la reionización no permite la formación de nuevos picos acústicos puesto que el medio es ópticamente delgado y fotones y electrones no están acoplados.**

7.8.5 Conclusiones

Los efectos anteriormente mencionados **borran las anisotropías a escalas del orden o inferiores a la del espesor de la superficie de último esparcimiento. Es decir: impiden observar las anisotropías primarias de pequeña escala** $\Delta\theta < \Delta\theta_{ue}$. De este modo se justifica la clasificación por escalas angulares de 7.3.2.

7.9 Después de la combinación: anisotropías secundarias

Las anisotropías secundarias se originan después de la combinación, en el trayecto que siguen los fotones procedentes de la superficie del último esparcimiento hasta el observador. Existe una variedad de efectos, de los cuales el más notable por sus implicaciones es el efecto Sunyaev-Zel'dovich.

Si bien las anisotropías primarias permiten estudiar el universo primordial y temprano, las anisotropías secundarias permiten estudiar el universo post-recombinación en el que se produce el desarrollo de estructuras, que se tratará en el capítulo siguiente bajo el epígrafe de «universo contemporáneo».

7.9.1 Efecto Sunyaev-Zel'dovich

Constituye la anisotropía secundaria más característica y posiblemente la de mayores aplicaciones cosmológicas. Junto con el dipolo, fue de las primeras anisotropías de la radiación de fondo en ser detectada.

Sunyaev-Zel'dovich térmico

Las regiones centrales de los cúmulos de galaxias contienen electrones a muy altas temperaturas $\approx 10^8$ K, como demuestra su emisión de radiación de frenado en rayos X. Cuando los fotones de la radiación de fondo procedentes de la superficie de último esparcimiento atraviesan un cúmulo, el esparcimiento Compton inverso con estos electrones provoca una comptonización local del espectro, originando una anisotropía descrita por las ecuaciones del apartado (7.2.3).

De la ecuación de Kompaneets (7.8) se obtiene (ejercicio 7.20)

$$\Delta f = xy\frac{e^x}{(e^x-1)^2}(x\coth(x/2)-4), \qquad (7.61)$$

de donde se deduce, en unidades físicas,

$$\Delta I = \frac{2h\nu^3}{c^2}\Delta f = \frac{2(kT)^3}{(hc)^2}y\frac{x^4e^x}{(e^x-1)^2}(x\coth(x/2)-4) \equiv \frac{2(kT)^3}{(hc)^2}y\,g(x). \qquad (7.62)$$

La ecuación $g(x)$ se anula para $x = 3.83$, presenta un máximo en $x = 6.61$ y un mínimo en $x = 2.26$. Es decir, que el efecto es nulo a $\lambda = 1.38$mm (figura 7.11), como ya se ha visto en el apartado 7.2.3. Los cúmulos se observarán entonces como una emisión con respecto la radiación de fondo a $\lambda < 1.38$mm, con un máximo de emisión en la parte Wien del espectro a $\lambda \approx 0.80$mm. Se observarán en absorción a $\lambda > 1.38$mm en la parte Rayleigh-Jeans, con un máximo de absorción a $\lambda \approx 2.34$mm (figura 7.12). Es fácil demostrar que es bastante más favorable observar el efecto en emisión en la zona Wien del espectro[24] (ejercicio 7.21). Las magnitudes típicas del efecto, en la parte Rayleigh-Jeans del espectro, son del orden de $\Delta T_{RJ} \sim 0.3$ mK (ejercicio 7.21).

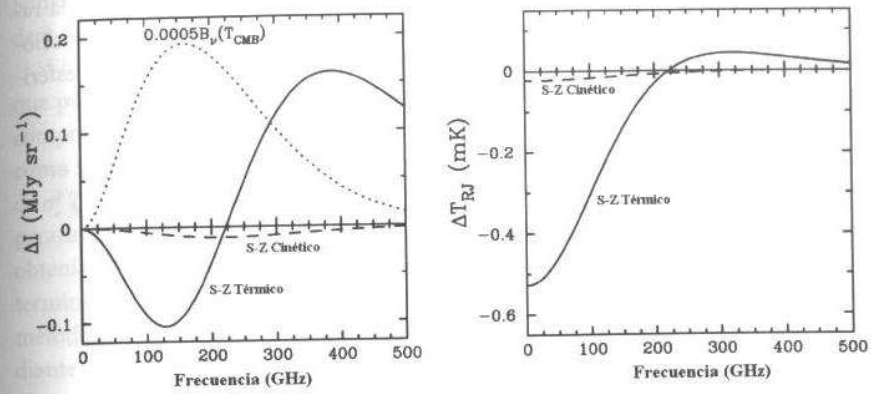


Figura 7.11 Distorsiones de la radiación cósmica de fondo debido al efecto Sunyaev-Zel'dovich. A la izquierda se muestra la intensidad y a la derecha la temperatura deducida en la zona de Rayleigh-Jeans. La línea continua representa el efecto Sunyaev-Zel'dovich térmico y la de trazos el cinético. A modo de referencia se representa en línea de puntos en el panel izquierdo el espectro de la radiación de fondo escalado por un factor 0.0005. Se han asumido T_e=10 keV, $y = 10^{-4}$ y una velocidad peculiar de 500 km/s. De Carlstrom *et al.*, 2002.
Copyright 2002, reproducido con permiso de Annual Reviews.

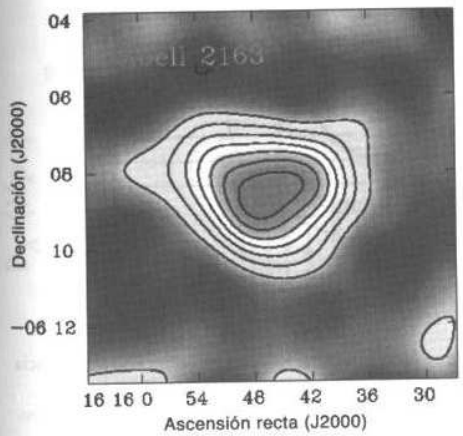


Figura 7.12 Imagen del efecto Sunyaev-Zel'dovich a 30GHz en el cúmulo Abel 2163. Los contornos representan temperaturas menores. En la región de Rayleigh-Jeans del espectro los cúmulos dejan una huella de menor temperatura en la radiación de fondo. Imagen obtenida por el equipo de John Carlstrom (Universidad de Chicago).

[24] Prescindiendo de dificultades instrumentales: en el dominio submilimétrico las observaciones están fuertemente afectadas por el alto brillo del cielo y variaciones temporales de la opacidad atmosférica. Además la mayor precisión requerida en el alineado de los segmentos de la superficie de la antena limita su tamaño y reduce su eficiencia, y por tanto disminuye la capacidad colectora de fotones.

Las longitudes de onda del cero, del máximo y del mínimo son independientes del desplazamiento al rojo del cúmulo puesto que x es independiente del desplazamiento al rojo[25]. Además, **el efecto Sunyaev-Zel'dovich presenta la gran ventaja de que su magnitud es independiente del desplazamiento al rojo,** puesto que la radiación de fondo no procede de un punto, sino que procede de todas las direcciones. Por este motivo no sufre de dilución al distribuirse sobre una superficie esférica como le sucedería a un radiador isótropo (figura 7.13).

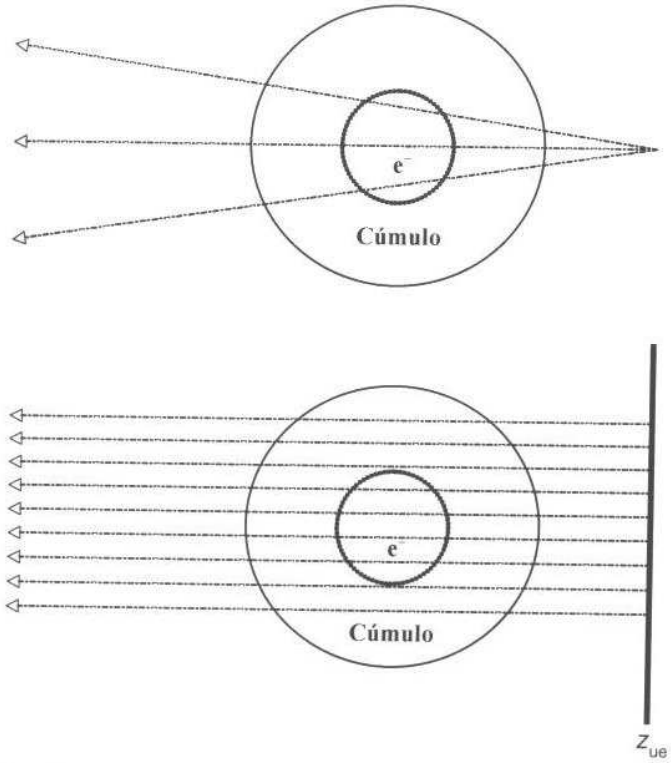


Figura 7.13 Arriba: la radiación procedente de una fuente puntual isótropa se diluye con la distancia al repartirse sobre una superficie esférica. Abajo: la radiación cósmica de fondo no sufre de esta dilución puesto que procede de todas las direcciones. Por este motivo la detección del efecto Sunyaev-Zel'dovich, como el de cualquier otro basado en la radiación de fondo, no está limitado por la distancia sino por la propia evolución de los cúmulos.

[25] Realmente, existe una débil dependencia con la temperatura electrónica cuando se tiene en cuenta la expresión relativista en vez de la aproximación de Kompaneets.

Esta notable característica permite detectar cúmulos a alto desplazamiento al rojo, incluso tan lejos como existan cúmulos. Se demuestra que la velocidad de evolución de los cúmulos depende de Ω_{m0}, por lo que los cartografiados del efecto Sunyaev-Zel'dovich permiten obtener otra estimación del parámetro de densidad de materia no relativista.

Finalmente, una ventaja cosmológica añadida del efecto Sunyaev-Zel'dovich es que **permite determinar distancias en combinación con medidas en rayos X.** La comptonización depende de la integral del producto $n_e T_e$ sobre la línea de visión, como se deduce de (7.9), (7.2) y (7.1), mientras que la emisión en rayos X depende de $n_e^2 T_e^{1/2}$ integrado sobre la línea de visión. Con un conocimiento previo de la temperatura es posible separar la densidad electrónica de la longitud de integración, obteniendo así el tamaño del cúmulo. Asumiendo simetría esférica, se puede determinar la distancia de ángulo a partir del ángulo subtendido. La ventaja de este método es que **es un indicador de distancias** que no depende de su calibración mediante otros indicadores como por ejemplo las cefeidas. La combinación de estas distancias con la medida de los desplazamiento al rojo de los cúmulos permite estimar la constante de Hubble y, con un número suficiente de cúmulos a alto z, incluso estimar $\Omega_{\Lambda 0}$ (figura 7.14) procediendo como en el caso de las SNIa (4.6.3). Se espera que la misión Planck[26] de la ESA, que será lanzada en 2008, permita detectar más de 5000 cúmulos hasta desplazamientos al rojo $z \approx 1$.

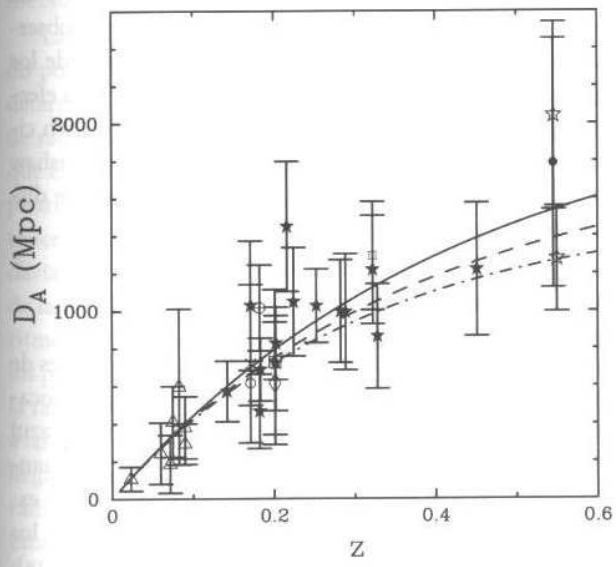


Figura 7.14 Distancias de ángulo determinadas a partir del efecto Sunyaev-Zel'dovich frente al desplazamiento al rojo. Cada punto corresponde a un cúmulo. Las líneas representan modelos de tres cosmologías (H_0 = 60 km/s/Mpc): en línea continua el modelo concordante (Ω_{m0}=0.3; $\Omega_{\Lambda 0}$=0.7), en línea de trazos Ω_{m0}=0.3; $\Omega_{\Lambda 0}$=0 y en línea de puntos y trazos Ω_{m0}=1.0; $\Omega_{\Lambda 0}$=0. De Carlstrom *et al.*, 2002.
Copyright 2002, reproducido con permiso de Annual Reviews.

[26] Destinada al estudio de la radiación de fondo, con capacidades para estudiar la polarización de las anisotropías.

Las anisotropías producidas por efecto Sunyaev-Zel'dovich son de una escala angular que oscila entre varios minutos de arco y menos de un minuto. Son, por tanto, **anisotropías de pequeña escala angular** que dominarán el espectro para $l > 1000$ puesto que las anisotropías primarias se amortiguan y las otras secundarias son de menor entidad.

Los supercúmulos de galaxias pueden producir un efecto Sunyaev-Zel'dovich térmico de pequeña magnitud, del orden del 10% del que causan los cúmulos, a una escala angular del orden del grado, que podría contaminar la anisotropía primaria causada por los picos acústicos. A partir del análisis de los datos de WMAP, algunos autores sugieren que éste podría ser el caso (Myers *et al.* 2004).

Sunyaev-Zel'dovich cinético

Los cúmulos tienen velocidades peculiares del orden de 300-1000 km/s con respecto a la radiación de fondo. La componente de esta velocidad a lo largo de la línea de visión provoca un desplazamiento Doppler de los fotones que se conoce como efecto Sunyaev-Zel'dovich cinético. La anisotropía generada es de la forma

$$\frac{\Delta T}{T} = -\int \frac{\hat{n}\cdot\overline{v}}{c} n_e \sigma_T dl \approx -\frac{\hat{n}\cdot\overline{v}}{c}\tau. \qquad (7.63)$$

Este efecto es débil: en el mejor de los casos típicamente del orden del 10% del térmico. Juntamente con el térmico, del cual se puede distinguir mediante observaciones multifrecuencia, permitiría determinar las velocidades peculiares de los cúmulos y estudiar posibles flujos de materia a gran escala. Sin embargo, para efectuar una determinación suficientemente precisa del efecto Sunyaev-Zel'dovich cinético es preciso utilizar las expresiones relativistas (véase por ejemplo Birkinshaw 1999) en vez de la ecuación de Kompaneets (7.8), y disponer de funciones de distribución adecuadas para el gas de electrones.

7.9.2 Efecto Sachs-Wolfe integrado

Después de la combinación, y en su camino hacia el observador, los fotones de la radiación de fondo atravesarán estructuras cuyo potencial gravitatorio provocará un efecto Sachs-Wolfe (7.42). Primero se producirá un desplazamiento al azul cuando los fotones entren en el potencial, y luego un desplazamiento al rojo cuando salgan del mismo. Si en el tiempo que invierten los fotones en atravesar la estructura el potencial no varía, ambos efectos se cancelan. En cambio, si mientras los fotones atraviesan el pozo de potencial éste se disipa (o por el contrario aumenta), ambos efectos ya no se cancelarán exactamente, puesto que el potencial a la entrada de los fotones es distinto del de la salida. Entonces se producirá un desplazamiento al azul (rojo) de los fotones. Solamente los fotones que hayan atravesado el potencial sufrirán este efecto, por lo que se producirá una anisotropía secundaria en la radiación de fondo.

Para designar este fenómeno se utiliza el término «integrado» puesto que el resultado final observado depende de los pozos de potencial en crecimiento/disipación que los fotones hayan atravesado en su camino desde la superficie de último esparcimiento hasta el observador a lo largo de la línea de visión. En cambio el efecto Sachs-Wolfe primario descrito en 7.5.2 es el que sufren los fotones al salir de un único potencial situado en la superficie de último esparcimiento.

Este efecto solamente se producirá cuando tenga lugar una evolución de los potenciales. **En un universo euclídeo dominado por materia no relativista**, que se puede considerar una buena aproximación al universo después del equilibrio radiación-materia, **los potenciales permanecen constantes aunque las fluctuaciones de densidad crezcan** (ejercicio 7.22). Entonces la única manera de producir un efecto Sachs-Wolfe integrado es, o bien cuando todavía la densidad de radiación es significativa, o bien cuando domina la energía oscura (o la curvatura si es que no existe la energía oscura y el universo es abierto). En el primer caso se originará el llamado Sachs-Wolfe integrado temprano y en el segundo el denominado Sachs-Wolfe integrado tardío.

Efecto Sachs-Wolfe integrado temprano

La transición entre un universo dominado por radiación a un universo dominado por materia no relativista no ocurre de forma brusca al desplazamiento al rojo determinado por el cociente de densidades de energía (apartado 3.8.3). La densidad de radiación todavía es significativa hasta poco después de la combinación, puesto que el inicio de la era de predominio de la materia ($z_{eq} = 3000$, según 6.128) es muy próximo al desacoplamiento ($z_d = 1150$ tal y como se dedujo en el apartado 6.7). Entonces, en el momento del desacoplamiento, la densidad de energía de radiación todavía representa casi un 40% de la densidad de materia. Esta influencia significativa de la densidad de radiación afecta a la evolución del factor de escala, y por tanto al ritmo de expansión. Por este motivo, aunque las fluctuaciones de densidad crezcan, los potenciales tienden a disiparse (ejercicio 7.22), desplazando al azul los fotones de la radiación de fondo que los atraviesan. Éste es un fenómeno que afecta solamente a las fluctuaciones más próximas a la superficie de último esparcimiento, puesto que llegan a su fin rápidamente después del desacoplamiento, en cuanto la densidad de radiación ya no represente una fracción significativa de la densidad de materia. Por esta razón no afecta a las fluctuaciones de grandes escalas angulares ($\Delta\theta >> \Delta\theta_H$), puesto que, antes de que los fotones las hayan podido recorrer en una distancia significativa, ya la densidad de radiación es despreciable frente a la de materia no relativista y los potenciales no decaen sino que permanecen constantes (ejercicio

7.22). Por otro lado, como ya se demostró en 7.6.1, el efecto Sachs-Wolfe no domina a escalas angulares intermedias y pequeñas ($\Delta\theta < \Delta\theta_H$). Dada la proximidad de las fluctuaciones afectadas por este efecto a la superficie de último esparcimiento, el radio de Hubble es ahora sólo algo mayor que en el momento del desacoplamiento. En suma, como resultado de la combinación de todos estos efectos, las anisotropías que genera el efecto Sachs-Wolfe integrado temprano afectan especialmente a las fluctuaciones de una escala angular parecida aunque mayor (menor l) que la del primer pico acústico, desapareciendo a escalas angulares menores (l mayores) para las que el efecto Sachs-Wolfe no domina, y también desapareciendo a escalas mayores (l menores), para las que ya domina la materia antes de que los fotones las hayan podido recorrer en una distancia significativa. La figura 7.18 muestra la influencia del efecto Sachs-Wolfe integrado temprano en el espectro de anisotropías.

Efecto Sachs-Wolfe integrado tardío

Como se demostrará en el capítulo siguiente (8.1.3), cuando la energía oscura o la curvatura dominan sobre la materia no relativista, las fluctuaciones de materia no pueden seguir creciendo y entonces los potenciales gravitatorios de las estructuras en formación decaen debido a la expansión. Puesto que este fenómeno tiene lugar en etapas tardías de la historia del universo, y de acuerdo con el razonamiento de 7.6.1, las anisotropías producidas por este efecto serán del orden o mayores que el radio de Hubble en ese momento, es decir, las de escala angular muy grande ($l << l_A$) (figura 7.18).

La escala a la cual empieza a tener lugar este efecto determina el momento en que domina la energía oscura y por tanto su parámetro de densidad, puesto que un dominio más tardío de la energía oscura generará anisotropías a mayor escala angular (menor l).

En resumen, **el efecto Sachs-Wolfe integrado proporciona una sonda que permite estimar los parámetros de densidad de radiación, de materia no relativista, de energía oscura y de curvatura a partir de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo.**

7.9.3 Lentes gravitatorias

Las concentraciones de masa desvían las trayectorias de los rayos de luz porque alteran la geodésica nula que siguen los fotones. Este efecto se denomina **lente gravitatoria** (1.5.10).

La gran distancia a la que se encuentra la superficie de último esparcimiento favorece que los fotones de la radiación de fondo atraviesen en su trayectoria multitud de concentraciones o proto-concentraciones de masa. Si la radiación de fondo no contuviera anisotropías, el efecto lente no provocaría estructuras apreciables. Sin embargo, una anisotropía representa un gradiente de temperaturas en una cierta región del cielo siguiendo una dirección angular determinada. El efecto lente causado por un objeto situado en la línea de visión de la anisotropía produce una alteración del gradiente en los alrededores de la zona en la que se encuentra dicho objeto (figura 7.15). Este fenómeno genera anisotropías a escalas intermedias y pequeñas y tiende a suavizar los picos acústicos.

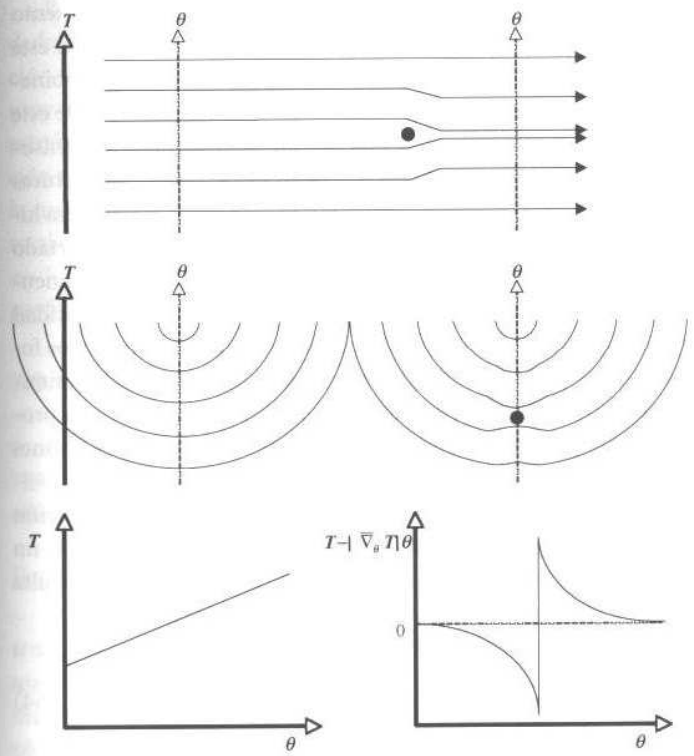


Figura 7.15 Efecto lente gravitatoria sobre la radiación de fondo. Izquierda arriba: sea un gradiente de temperaturas causado por una anisotropía donde la temperatura crece según una dirección angular θ sobre el cielo. Las líneas continuas representan las isotermas seccionadas a lo largo de θ en función de la distancia al observador. Los ejes θ de trazos simbolizan secciones representadas más abajo a izquierda y derecha del diagrama y que se comentan a continuación. Izquierda centro: isotermas sobre el cielo causadas por la anisotropía. El eje θ indica la sección representada. Izquierda abajo: representación del gradiente de temperaturas según θ. Derecha arriba: una masa actuando de lente gravitatoria desvía las trayectorias de los fotones de la radiación de fondo. Derecha centro: distorsión resultante sobre las isotermas en el plano del cielo. Derecha abajo: patrón de variaciones de temperatura a lo largo de θ causado por la lente una vez sustraído el gradiente.

El efecto es proporcional al tamaño angular del gradiente y a la masa y perfil de masa del objeto lente, por lo que podría utilizarse para determinar las propiedades de las masas de los cúmulos de galaxias. Sin embargo, este efecto es muy pequeño y difícil de medir.

7.9.4 Reionización

Si la reionización fuera elevada y la densidad electrónica alta, el aumento de la profundidad óptica podría incluso desplazar la superficie del último esparcimiento a un desplazamiento al rojo inferior a 1100, correspondiente al desplazamiento al rojo a que tiene lugar la reionización, e impidiendo observar más allá. De este modo, las anisotropías observadas no corresponderían al momento de la combinación, sino al instante de la reionización[27], a menor desplazamiento al rojo. De este modo se borrarían las anisotropías primarias y en cambio se observarían las anisotropías correspondientes a las zonas de mayor densidad causadas por estructuras más recientes. Pero este fenómeno solamente sucedería si la reionización tuviera lugar poco después del desacoplamiento. Como ya se ha comentado en el apartado (7.2.3) dedicado a la comptonización, una reionización no implica necesariamente que se desplace la superficie de último esparcimiento. En efecto, la profundidad óptica (7.3) depende de la densidad de electrones y del camino que recorren los fotones. Si la reionización, aunque total (X_e=1), tiene lugar tardíamente, la disminución en la densidad de electrones debido a la expansión reduce grandemente la profundidad óptica y no se desplaza la superficie de último esparcimiento: los fotones del fondo cósmico pueden atravesar en su mayoría el gas ionizado.

Suponiendo que los electrones no son relativistas, que la fracción de ionización es constante, que la materia se halla distribuida uniformemente y asumiendo un universo euclídeo dominado por materia no relativista, de (7.3) y (7.1) resulta (ejercicio 7.23)

$$\tau \approx \frac{2\sigma_T X_e \eta n_{\gamma 0}}{3H_0}\left[(1+z_f)^{3/2}-(1+z_i)^{3/2}\right] \qquad (7.64)$$

donde $n_{\gamma 0}$ es la densidad actual de fotones del fondo cósmico y z_f y z_i designan, respectivamente, los desplazamientos al rojo a los que termina y empieza la reionización.

Por tanto, si la reionización del medio fuera total, la superficie de último esparcimiento estaría ubicada en $z\approx80$ (ejercicio 7.24). Sin embargo, los modelos no permiten formar estructuras antes de $z\approx30$, por lo que **una reionización por estrellas de población III no impediría observar la radiación de fondo cósmico y sus anisotropías primarias** puesto que la profundidad óptica no es suficientemente elevada cuando la reionización tiene lugar.

[27] Ahora sí se podría designar propiamente como «recombinación».

Asumiendo una temperatura media para los electrones y que ésta es muy superior a la de los fotones, de (7.9) se obtiene

$$y \approx \frac{kT_e}{m_e c^2}\tau \qquad (7.65)$$

en unidades físicas.

Por tanto, del valor $y < 2.5\times10^{-5}$ obtenido por el satélite COBE (ejercicio 7.25) se deduce que, debido a la disminución de la densidad con la expansión, **la reionización no ha podido ocurrir poco después del desacoplamiento sino en una etapa muy posterior a éste.** Este reducido valor de y no excluye una reionización tardía por estrellas de población III, sino que sería compatible con, por ejemplo, una reionización total del medio desde $z\approx20$ hasta la actualidad (ejercicio 7.26). Por tanto, como la superficie de último esparcimiento estaría situada a $z \approx 80$ en caso de reionización total del universo hasta la actualidad (ejercicio 7.24), se confirma que la reionización no impide observar las anisotropías primarias. Sin embargo, el incremento de la profundidad óptica reduce las anisotropías, como ya se ha analizado en 7.8.4.

7.9.5 Otros mecanismos

Solamente por completitud y para que le resulten familiares al lector, en este apartado se mencionarán muy brevemente algunos otros efectos que pueden causar anisotropías secundarias de orden superior en la radiación de fondo.

El efecto Vishniac

Podría calificarse como un efecto Sunyaev-Zel'dovich cinético causado por estructuras en formación. Cuando tiene lugar la reionización del universo, antes de que los cúmulos de galaxias se hayan formado (véase tabla 8.1), los fotones de la radiación de fondo pueden interaccionar con los electrones y sufrir un efecto Doppler debido al movimiento de éstos en su proceso de colapso para formar estructuras. Como la profundidad óptica es baja, unos fotones en la línea de visión interaccionarán con los electrones cuya velocidad se dirige hacia el observador, situados en la parte más alejada del pozo de potencial, y otros con los electrones cuya velocidad se aleja del observador, situados en la parte más próxima (figura 7.16). Ambos efectos, por tanto, se cancelan mutuamente, a no ser que las estructuras en colapso estén dotadas de un movimiento neto a gran escala (figura 7.16). De esta manera se pueden generar anisotropías de pequeña escala angular (l>1000) y baja amplitud (ΔT~μK) al ser un efecto de segundo orden.

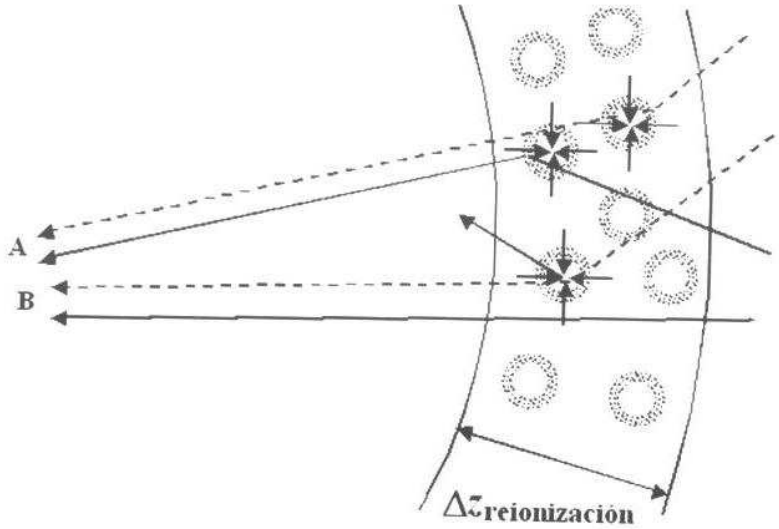


Figura 7.16 Durante la reionización los electrones de las estructuras en formación interaccionan con los fotones de la radiación de fondo. Caso A: si no existe un movimiento neto de materia a gran escala, algunos fotones interaccionan con electrones que se dirigen hacia el observador, desplazándose al azul (línea de trazos) y otros con estructuras cuyos electrones se alejan del observador, provocando un desplazamiento al rojo (línea continua). Ambos efectos se compensan. Caso B: si existe un movimiento de materia a gran escala, representado por la flecha, los electrones esparcidos por las estructuras en formación sufren un desplazamiento al rojo o al azul (en la figura se representa un desplazamiento al azul, en línea de trazos), mientras que los que no son esparcidos (la mayoría) no sufren ningún desplazamiento. Si los movimientos no son a gran escala sino a pequeña escala y aleatorios, se compensan mutuamente.

El efecto Ress-Sciama

Cuando las perturbaciones que generan el potencial gravitatorio variable con el tiempo son lineales (véase capítulo siguiente), estamos en presencia del efecto Sachs-Wolfe integrado que se ha discutido en (7.9.2). Cuando son no-lineales, el desplazamiento al rojo o al azul que sufren los fotones debido a la variación del potencial en el tiempo en que el fotón de la radiación de fondo tarda en cruzarlo se denomina efecto Rees-Sciama (Rees y Sciama, 1968) o de halo móvil.

Las ondas gravitatorias

Son perturbaciones tensoriales de la métrica que varían con el tiempo. La inflación predice un espectro de ondas gravitatorias casi invariante de escala cuya amplitud depende fuertemente de la densidad de energía potencial asociada con el campo escalar responsable de la inflación (apartado 5.9). Por este motivo, la detección de ondas gravitatorias en la radiación de fondo cósmico proporciona un medio para estudiar la inflación de forma directa. Estas ondas sufren una amortiguación a escalas intermedias y pequeñas, y las principales signaturas que imprimen en las anisotropías de la radiación cósmica de fondo cósmico son cuadrupolo y polarización.

Efectos «exóticos»

Las **cuerdas cósmicas**, caso de existir, actúan como lentes gravitatorias que imprimen en la radiación de fondo una anisotropía secundaria característica. Una **expansión anisotrópica** del universo produciría un cuadrupolo, la **rotación de la superficie de último esparcimiento** causaría un desplazamiento al rojo transversal en el ecuador, mientras que los polos no presentarían este efecto al carecer de velocidad tangencial.

7.10 **Anisotropías terciarias**

Son debidas a la contribución de radiofuentes distintas de la radiación cósmica de fondo, que pueden consistir en objetos puntuales, tales como radio galaxias o cuásares, pero también en la emisión producida por procesos libre-libre y sincrotón debidos al gas y polvo de la Galaxia. Usualmente, las anisotropías terciarias se sustraen de los mapas de la radiación de fondo a fin de poder estudiar las anisotropías primarias y secundarias (figura 7.4). Ésta es una operación que debe efectuarse cuidadosamente a fin de no generar anisotropías que sean un artefacto del proceso de sustracción.

7.11 **Resumen**

7.11.1 Distorsiones globales

La radiación cósmica de fondo puede estar afectada por distintos fenómenos que pueden producir:

- Distorsiones globales del espectro de cuerpo negro.
- Distorsiones direccionales, es decir, anisotropías.

Los datos disponibles en la actualidad indican que las distorsiones globales del espectro son muy bajas, y el espectro observado se ajusta de forma excelente por el de un cuerpo negro.

7.11.2 Anisotropías

Anisotropías primarias

Las anisotropías primarias dan lugar (figura 7.17):

- A gran escala, $\Delta\theta > \Delta\theta_H$ domina el efecto Sachs-Wolfe de las fluctuaciones primordiales. La constancia de las anisotropías indica que el espectro de las fluctuaciones primordiales es adiabático invariante de escala, como predicen los modelos inflacionarios.
- A escala intermedia, $\Delta\theta_{ue} < \Delta\theta < \Delta\theta_H$, se observa un conjunto de picos acústicos debido a oscilaciones amortiguadas y en fase de la densidad del fluido fotón-barión, que apoya el origen inflacionario de las fluctuaciones primordiales. La posición del primer pico permite determinar el parámetro de densidad del universo, resultando un universo euclídeo. Las posiciones y amplitudes de los picos permiten determinar un conjunto de parámetros cosmológicos. La amplitud del tercer pico es indicativa de la presencia de materia oscura fría.
- A pequeña escala, $\Delta\theta < \Delta\theta_{ue}$, los picos acústicos se amortiguan y emborronan.

Causa de la anisotropía	Efecto	Funcional ($\Delta T/T$)	Magnitud ($\Delta T/T$)	Escala angular ($\Delta\theta$)
Fluctuaciones primordiales	Sachs-Wolfe	$-\psi/3$	10^{-5}	$>\Delta\theta_H$
Oscilaciones de densidad	Picos acústicos	$\propto\Delta\rho/\rho$	3×10^{-5}	$<\Delta\theta_H$, $>\Delta\theta_{ue}$
Doppler	Dipolo, cuadrupolo	$-\hat{n}\cdot\vec{v}$	10^{-3}, 10^{-6}	$>>\Delta\theta_H$

Tabla 7.2 Resumen de las causas, efectos, dependencia funcional, magnitudes y escalas angulares de las anisotropías primarias de la radiación cósmica de fondo.

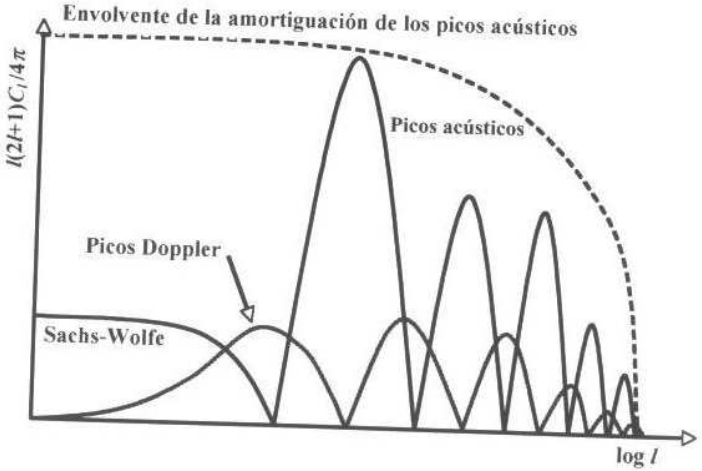


Figura 7.17 Gráfica idealizada de las anisotropías primarias. A gran escala: efecto Sachs-Wolfe, a escalas intermedias: picos acústicos amortiguados y picos Doppler. Los picos Doppler están en antifase con respecto a los acústicos: la máxima compresión o enrarecimiento corresponde a velocidad nula. A pequeña escala: desaparición de anisotropías debido a diversos efectos (apartado 7.8). La composición de estas anisotropías da lugar al modelo representado en la figura 7.7.

Anisotropías secundarias

Son múltiples y de variado origen. La tabla 7.3 resume algunas de las más importantes.

Causa de la anisotropía	Efecto	Escala angular ($\Delta\theta$)	Magnitud[28] ($\Delta T/T$)
Comptonización local	Sunyaev-Zel'dovich térmico[29]	$-\Delta\theta_{ue}$	$\sim10^{-4}$
Gravitación	Sachs-Wolfe integrado temprano	$>\Delta\theta_H$	$\sim10^{-6}$
	Sachs-Wolfe integrado tardío	$>>\Delta\theta_H$	
	Lentes gravitatorias	$-\Delta\theta_{ue}$	
	Rees-Sciama o halo móvil	$>\Delta\theta_H$	$\sim10^{-7}$
	Ondas gravitatorias	$>\Delta\theta_H$	
Doppler	Vishniac (u Ostriker-Vishniac)	$<\Delta\theta_{ue}$	
	Sunyaev-Zel'dovich cinético	$-\Delta\theta_{ue}$	$\sim10^{-5}$

Tabla 7.3 Resumen de las causas, efectos, magnitudes y escalas angulares de algunas anisotropías secundarias de la radiación cósmica de fondo.

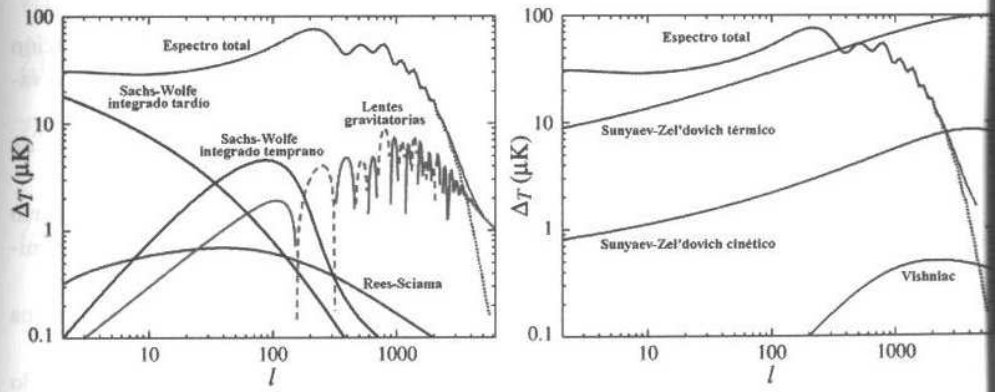


Figura 7.18 Gráfica idealizada de algunas anisotropías secundarias. Izquierda: de origen gravitatorio. Derecha: Comptonización y Doppler. Se muestra el espectro total modelado como referencia. Las escalas y magnitudes son aproximadas. Basado en una figura de Hu y Dodelson, 2002. Copyright 2002, reproducido con permiso de Annual Reviews.

[28] Depende de la escala angular. En general se proporcionan estimaciones aproximadas de órdenes de magnitud máximos.

[29] Magnitud en la zona de Rayleigh-Jeans.

7.11.3 Implicaciones cosmológicas de las anisotropías primarias

Observable del espectro de anisotropías	Dependencia con respecto a la cosmología
Posición del primer pico acústico	Principalmente de Ω_0 pero también de H_0, Ω_{m0}, w y $\Omega_{b0}H_0^2$ en orden decreciente. Por tanto correla fuertemente con t_0 si la curvatura es nula. La contribución de n puede despreciarse si $n \sim 1$
Altura del primer pico relativa a la potencia a l=10 (la llamada **normalización de COBE**)	Esencialmente de n
Altura del segundo pico relativa al primero	Principalmente de n y Ω_{b0}. La contribución de $\Omega_{m0}H_0^2$ puede despreciarse en un universo euclídeo
Altura del tercer pico relativa al primero	De $\Omega_{m0}H_0^2$ y n. Por este motivo la altura del tercer pico es indicativa de materia oscura fría

Tabla 7.4 Resumen de la dependencia de algunos observables que se pueden deducir del espectro de potencias de la radiación de fondo con respecto parámetros cosmológicos.

Historia de la radiación cósmica de fondo

1934 Richard Tolman demuestra que en un universo en expansión la radiación con un espectro de cuerpo negro disminuye su temperatura, pero que no varía la forma del espectro.

1941 Andrew McKellar encuentra que la temperatura efectiva del espacio es de unos 2.3K en relación a la excitación del doblete de la molécula de CN.

1948 George Gamow, Ralph Alpher y Robert Hermann predicen que un universo originado por una «Gran Explosión» tendrá una radiación de fondo cósmica de microondas a una temperatura de unos 5K.

1955 Tigran Shmaonov encuentra un exceso de emisión de microondas a una temperatura de unos 3K.

1964 A. G. Doróshkevich e Igor Dimítrievich Novíkov publican un artículo sugiriendo que se busque la radiación de fondo predicha por Gamow, Alpher y Hermann.

1965 Arno Penzias y Robert Wilson descubren por accidente la radiación cósmica de fondo en el rango de las ondas centimétricas (7.3cm) con una temperatura de 3.5K.

1965 En el artículo previo del mismo número de la revista en que Penzias y Wilson comunicaron su hallazgo[30], Robert Dicke, James Peebles, Peter Roll y David Wilkinson publicaron sus predicciones sobre la radiación de fondo, las medidas infructuosas que Roll y Wilkinson había efectuado a 3cm y la interpretación de los resultados de Penzias y Wilson.

1966 Rainer Sachs y Arthur Wolfe predicen el efecto Sachs-Wolfe integrado.

1968 Martin Rees y Dennis Sciama predicen el efecto Rees-Sciama.

1969 Rashid Sunyaev y Yakov Zel'dovich predicen el efecto Sunyaev-Zel'dovich.

1986 Jeremiah Ostriker y Ethan Vishniac predicen el efecto Ostriker-Vishniac, también llamado Vishniac a secas puesto que fue este último quien al año siguiente, en 1987, publicó cálculos más rigurosos sobre dicho efecto.

1990 El satélite COBE muestra que el espectro sigue muy exactamente el de un cuerpo negro a 2.73K.

1992 Los datos de COBE permiten detectar las anisotropías primarias de gran escala angular debidas al espectro de fluctuaciones primordiales (la normalización de COBE).

2002 Los datos obtenidos con el experimento *Boomerang* permiten determinar la posición del primer pico acústico y deducir que el universo tiene curvatura nula.

2003 El satélite WMAP permite determinar con precisión parámetros cosmológicos esenciales a partir de los picos acústicos.

[30] En mi opinión, el orden lógico habría debido ser el contrario, incluso teniendo en cuenta que Penzias y Wilson desconocían el origen de la señal que detectaron, hasta que Bernie Burke les comentó que el grupo de Dicke en Princeton hablaba de la posible existencia de una radiación de fondo.

7.12 Ejercicios

7.1 Demostrar que en el dominio de Rayleigh-Jeans la distribución de Bose-Einstein se comporta como ν^3 mientras que la de Planck lo hace como ν^2.

7.2 ¿A qué longitud de onda se encontrarían situadas sobre el espectro de la radiación de fondo las transiciones ópticas más importantes? (Límite de Lyman, Lyα, límite de Balmer, Hα.)

7.3 Utilizando el modelo de Bohr, determinar, para el espectro de la radiación de fondo:

a. El nivel correspondiente a una recombinación observable en ondas centimétricas.

b. Los niveles más bajos para los que una transición sería observable en ondas centimétricas y la longitud de onda en reposo de la transición.

c. Los niveles consecutivos para que una transición se observase a ~400 μm.

7.4 Calcular el ensanchamipento de una línea espectral en la radiación cósmica de fondo debido al espesor de la superficie de último esparcimiento.

7.5 Despreciando el ensanchamiento de la línea, demostrar que las intensidades relativas $\delta I/I$ de las líneas con respecto al fondo cósmico serían del orden de $\approx 10^{-6}$.

7.6 Deducir la expresión (7.10) a partir de la ecuación de Kompaneets (7.8) en el caso de fotones de la radiación de fondo esparcidos por electrones calientes y profundidad óptica baja.

7.7 Deducir la variación relativa $\Delta T/T$ que en la temperatura de la radiación de fondo produce la comptonización. Determinar las aproximaciones de esta expresión en el límite de Wien y en el de Rayleigh-Jeans. ¿A qué longitud de onda la distorsión del espectro es nula?

7.8 ¿Por qué en primera aproximación y no depende del desplazamiento al rojo?

7.9 Para un universo euclídeo dominado por materia no relativista, determinar el ángulo subtendido por el radio de Hubble en el momento de la combinación y el subtendido por el espesor de la superficie de último esparcimiento.

7.10 Despreciando el incremento de densidad con respecto a la densidad media, estimar la masa contenida en una estructura situada en la superficie de último esparcimiento en función del ángulo que subtiende. Aplicar a masas típicas de galaxias, cúmulos y estructuras del tamaño de la superficie de último esparcimiento y del tamaño del radio de Hubble.

7.11 Demostrar que la expresión (7.33) para las fluctuaciones de densidad adiabáticas también se deduce de asumir η = cte.

7.12 Deducir la expresión (7.34) para fluctuaciones de densidad de isocurvatura. Demostrar que en este caso η varía.

7.13 Deducir la expresión (7.35) basándose en el principio de conservación de la energía.

7.14 Estimar la magnitud del cuadrupolo producido por Doppler transversal.

7.15 Determinar la velocidad del sonido en el universo precombinación sabiendo que para una ecuación de estado general se verifica

$$c_s^2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$$

donde la diferenciación se realiza para condiciones adiabáticas. ¿Por qué el cambio es adiabático? ¿Por qué el requisito de que el universo sea precombinación? ¿Por qué no interviene la materia no bariónica?

7.16 Estimar la velocidad del sonido en el momento de la combinación.

7.17 Demostrar que en un universo euclídeo dominado por materia no relativista el horizonte acústico es aproximadamente igual al radio de Hubble.

7.18 Estimar la distancia de ángulo aproximada para un universo no euclídeo dominado por materia no relativista y determinar el ángulo subtendido por el radio de Hubble en la combinación en función del parámetro de densidad.

7.19 ¿Por qué la amortiguación de Silk es menor en fluctuaciones de isocurvatura?

7.20 Obtener (7.61) a partir de la ecuación de Kompaneets (7.8).

7.21 Deducir $\Delta I/I$ para el efecto Sunyaev-Zel'dovich térmico en la aproximación de Rayleigh-Jeans y en la aproximación de Wien. ¿Cuál es más favorable? Estimar la magnitud del efecto en la zona Rayleigh-Jeans sabiendo que $\tau \approx 3\times10^{-3}$.

7.22 Como se demostrará en el capítulo siguiente, en un universo euclídeo dominado por materia no relativista el incremento relativo en densidad de una fluctuación de materia de radio R evoluciona de la forma $\delta \equiv \Delta\rho / \bar{\rho} \propto a$, tanto antes como después de la combinación. Determinar, para dicha fluctuación, la evolución de su masa y de su potencial cuando domina:

a. La materia no relativista.

b. La radiación.

c. La radiación pero cuando $\delta \propto a^2$.

7.23 Suponiendo que la reionización del universo tiene lugar entre dos desplazamientos al rojo determinados, calcular τ para el caso de electrones no relativistas, fracción de ionización constante y distribución uniforme de materia en un universo euclídeo dominado por materia no relativista.

7.24 Suponiendo una temperatura constante de los electrones, determinar a qué desplazamiento al rojo estaría situada la superficie de último esparcimiento si el universo hubiese permanecido totalmente ionizado desde entonces hasta el momento actual.

7.25 Deducir la temperatura media de los electrones a partir de los datos de COBE (7.2.3) y WMAP (7.8.4).

7.26 Demostrar que el parámetro de comptonización obtenido por COBE sería compatible con una reionización total del universo desde la actualidad hasta z =20.

7.27 Demostrar con argumentos astrofísicos que la reionización no habría podido ocurrir a z>50-100 si fuera debida a un único estallido de formación estelar.

7.13 Bibliografía

7.13.1 Referencias

Bersanelli, M. *et al.* (1994), *ApJ* 424, 517.

Birkinshaw, M. (1999), *Physics Reports* 310, 97.

Carlstrom, J. E. *et al.* (7 autores más) (2000), IAP Conference Proceedings.

Carlstrom, J. E.; Holder, G. P. y Reese, E. D. (2002), *ARA&A* 40, 643.

Challinor, A. y Lasenby, A. (1998), *ApJ* 499, 1.

Doran, M. y Lilley, M. (2002), *MNRAS* 330, 965.

Hauser, M. G. y Dwek, E. (2001), *ARA&A* 39, 249.

Hu, W. y Dodelson, S. (2002), *ARA&A*.

Hinshaw, G. *et al.* (16 autores más) (2003), *ApJSS* 148, 135.

Kogut, A. (2003a), *New Astronomy Reviews* 47, 945.

Kogut, A. (2003b), *New Astronomy Reviews* 47, 977.

Kompaneets, A. (1957), *Sov. Phys.* JETP 4, 730.

McKellar, A. (1941), *Publ. Dominion Astron. Obs. Victoria B.C.* 7, 251,

Myers, A. D. *et al.*(2004), *MNRAS* 347, L67,

Rees, M. y Sciama, D. W. (1968), *Nature* 217, 511.

Silk, J. (1968), *AJ* 151, 459.

SMOOT, G. F. *et al.* (27 autores más) (1992), *ApJ* 396, L1.
SPERGEL *et al.* (16 autores más) (2003), *ApJSS* 148, 175.
VISHNIAC, E. T. (1987), *ApJ* 322, 597.

7.13.2 Textos de consulta

BERGSTRÖM, L. y GOOBAR, A. (1999), *Cosmology and Particle Astrophysics*, Wiley.
HU, W. y DODELSON S. (2002), *ARA&A*.
LACHIÈZE-REY, M. y GUNZIG, E. (1999), *The Cosmological Background Radiation*, Cambridge University Press.
LINDER, E. V. (1997), *First Principles of Cosmology*, Addison-Wesley.
RICH, J. (2001), *Fundamentals of Cosmology*, Springer-Verlag.

7.13.3 Textos recomendados para ampliación de conocimientos

Radiación cósmica de fondo

GAWISER, E. y SILK, J. (2000), *Phys.Rept.* 333, 245 (astro-ph/0002044v1).
LACHIÈZE-REY, M. y GUNZIG, E. (1999), *The Cosmological Background Radiation*, Ed. Cambridge University Press.

Picos acústicos. Desarrollos formales

HU, W. y DODELSON, S. (2002), *ARA&A*.
HU, W. y SUGIYAMA, N. (1996), *ApJ* 471, 542.

Implicaciones cosmológicas de las anisotropías primarias

HU, W.; FUKUGITA, M.; ZALDARRIAGA, M. y TEGMARK, M. (2001), *ApJ* 549, 669.
DORAN, M. y LILLEY, M. (2002), *MNRAS* 330, 965.

Efecto Sunyaev-Zel'dovich

BIRKINSHAW, M. (1999), *Physics Reports* 310, 97.
CARLSTROM, J. E.; HOLDER, G. P. y REESE, E. D. (2002), *ARA&A* 40, 643.

7.13.4 Enlaces útiles

Página www de este texto

http://webpages.ull.es/users/jcepano

Generales

Diccionario en línea: http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
Buscador de pretirajes de artículos (astro-ph, y otros): http://www.arxiv.org
Página general de cosmología: http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5

Radiación cósmica de fondo

http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5
http://background.uchicago.edu/

Variación de los picos acústicos con los parámetros cosmológicos

http://background.uchicago.edu/~whu/metaanim.html

Radiación cósmica de fondo y efecto Sunyaev-Zel'Dovich

http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5/bcg_radiation.html
http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-1998-11/index.html

Anisotropías secundarias

http://astro.uchicago.edu/~laroque

Capítulo 8 | EL UNIVERSO CONTEMPORÁNEO

Bajo este epígrafe se designa al universo desde que se produce el desacoplamiento de los fotones hasta la actualidad y más allá. Es, con mucho, el de mayor duración. En él se produce la transición de la era de materia a la de energía oscura, y el proceso que lo distingue es la formación de estructuras de materia a distintas escalas. De ahí el calificativo «contemporáneo» a pesar de su gran extensión temporal: en la actualidad todavía se están formando las mayores estructuras del universo y prosigue la formación de estrellas. Este universo es también susceptible de dividirse en épocas según la escala de la estructura que empieza a formarse, como se indica en la tabla 8.1.

Era	Época	z	Edad	Sucesos característicos	Referencias
De materia	Estelar	1100	2.6×10^5 a	Desacoplamiento	Yoshida, Bromm y Hernquist, 2004
		>20	$<2\times10^8$ a	Primeras estrellas	
	Galáctica	>7	$<8\times10^8$ a	Primeras galaxias	Iye *et al.* 2006
	Cumular	~7	$\sim10^9$ a	Primeros cúmulos	Miley *et al.*, 2004
De energía oscura	Súpercumular	>1	$<7\times10^9$ a	Primeros supercúmulos. Continúa en la actualidad	Gal y Lubin, 2004

Tabla 8.1 División en épocas del universo contemporáneo. Las primeras estrellas se forman en los embriones de lo que serán galaxias. Las galaxias más lejanas detectadas hasta la fecha (Iye *et al.* 2006, Bouwens e Illingworth 2006) se hallan a $z > 7$. Se han detectado supercúmulos hasta un desplazamiento al rojo de $z = 0.9$, por lo que es previsible que existan supercúmulos más lejanos.

Las primeras estrellas, llamadas de población III, se forman en embriones de galaxias[1] a desplazamientos al rojo z~20 y mayores (Yoshida, Bromm y Hernquist 2004). Sus características son distintas de las estrellas que se forman en la actualidad, debido a las diferencias del entorno y a la ausencia de metales. Aunque la primera generación de estrellas puede tener un amplio abanico de masas posibles, las estrellas más masivas, entre 100 y 300 veces más masivas que el Sol, tienen un papel preponderante en los procesos de ionización, calentamiento y enriquecimiento químico del medio intergaláctico. Es preciso señalar que en la actualidad no llegan a formarse estrellas tan masivas debido a que el material a partir del cual nacen contiene metales, lo cual incrementa su opacidad: la radiación emitida durante el proceso de colapso es capaz de detener la caída de material adicional más allá de una cierta masa acumulada. En cambio, en la primera generación de estrellas, formada a partir de un material sin metales y por tanto de opacidad inferior, no existía esa limitación para la formación de astros muy masivos. Estas estrellas, que producen los primeros metales del universo, tienen una vida muy corta, de pocos millones de años. Como ya se ha demostrado en el capítulo anterior, aunque estas estrellas reionizan el universo, la baja densidad electrónica no es capaz de generar una nueva superficie de último esparcimiento, sino únicamente de amortiguar parcialmente las anisotropías de la radiación de fondo. Desde que tuvo lugar la primera formación de estrellas, las estrellas han seguido formándose en nuestro universo.

[1] En halos de baja masa: entre 10^6 y 10^7 masas solares.

La galaxia más lejana detectada hasta ahora se halla a z =7 (Iye *et al.* 2006, aunque existen candidatos a z ~ 7-8 (Bouwens e Illingworth 2006), mientras que los primeros cúmulos de galaxias parece que se formaron cuando el universo tenía un 10% de su edad actual (Miley *et al.*, 2004).

Finalmente, se han observado supercúmulos a desplazamientos al rojo de 0.9 (Gal y Lubin, 2003), por lo que es previsible que ya existan en instantes anteriores. Los supercúmulos de galaxias todavía se estarían formando en la actualidad, y algunos autores sostienen que aún se encuentran en las primeras etapas de su formación.

La formación de estructuras es un campo muy complejo y dinámico. Los datos de la tabla 8.1 dan una idea aproximada del estado de la cuestión en el momento de escribir este texto. Han representado una gran sorpresa, puesto que indican que las estructuras se forman antes de lo que se suponía. En el futuro es seguro que las observaciones mediante grandes telescopios en la Tierra y en el espacio proporcionarán todavía más sorpresas.

Sin embargo, en este capítulo no se tratará propiamente de la formación de estrellas, galaxias o cúmulos, sino que se abordará a un nivel elemental, con sustanciales simplificaciones, el estudio de las etapas iniciales de la formación de estructuras en un universo en expansión. Para un estudio más riguroso se recomienda al lector la bibliografía dedicada a la formación de estructuras del apartado 8.9.3. Finalmente, los procesos detallados del colapso de estructuras para formar los objetos que se observan en la actualidad son muy complejos y caen por completo fuera del alcance de este texto.

8.1 Formación de estructuras en el universo

8.1.1 Introducción

La formación de estructuras es un proceso que tiene su origen en el momento en que termina la inflación, cuando se conjetura que las fluctuaciones cuánticas del campo escalar inflacionario generaron las perturbaciones primordiales, y que todavía prosigue en la actualidad.

Como se ha tratado en el capítulo anterior, el espectro de potencias de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo es consistente con un espectro inicial adiabático invariante de escala. Una vez creadas estas fluctuaciones, la gravitación, única interacción puramente atractiva que es capaz de actuar a gran escala, provoca su amplificación en un proceso que se conoce como **inestabilidad gravitatoria.** Este proceso de crecimiento puede contrarrestarse mediante fuerzas de presión, como es el caso de las fluctuaciones acústicas ya mencionadas en el capítulo anterior, mediante rotación, por calentamiento del medio, o mediante campos magnéticos. En este capítulo se considerará solamente el caso de la presión y de la dispersión de velocidades.

Para cada ecuación de estado $p_w = w\rho_w$, las fluctuaciones se caracterizan por δ_w, que es la **desviación relativa de densidad con respecto la densidad media** $\bar{\rho}_w$,

$$\delta_w \equiv \frac{\Delta\rho_w}{\bar{\rho}_w} = \frac{\rho_w - \bar{\rho}_w}{\bar{\rho}_w}. \tag{8.1}$$

Se dice que **una fluctuación crece si δ_w aumenta con el tiempo y que se disipa en caso contrario. Mientras se verifique $\delta_w << 1$, el proceso de crecimiento de las fluctuaciones puede considerarse lineal** y tratarse por tanto mediante ecuaciones linealizadas. Cuando la desviación de densidad (8.1) sea del orden de la unidad, los términos no lineales cobrarán importancia y será necesario abordar el proceso mediante otros procedimientos.

8.1.2 Ecuaciones linealizadas de las fluctuaciones

Existen varias aproximaciones posibles para abordar la evolución lineal de δ_w. Una de ellas se basa en linealizar las ecuaciones de continuidad, de Euler y de Poisson. En este texto se utilizará el resultado del procedimiento más riguroso y completo: el que consiste en perturbar el tensor energía momento de la ecuación de Einstein (2.20) y resolver las ecuaciones linealizadas obteniendo

$$\ddot{\delta}_w + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_w = w\frac{\nabla^2\delta_w}{a^2} + 4\pi(1+w)\sum_i(1+3w^i)\bar{\rho}_i\delta_i - \frac{3}{2}w(1+w)\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} \tag{8.2}$$

para cada ecuación de estado, donde $h = \delta_w g_a^a$. La expresión (8.2) es totalmente general y aplicable mientras las fluctuaciones sean lineales.

El primer término de (8.2) representa el crecimiento de las fluctuaciones de densidad para la ecuación de estado considerada. El segundo, un término denominado **rozamiento de Hubble,** puesto que **la expansión del universo se opone a la concentración de energía.** En el segundo miembro de (8.2), el primer término se interpreta como la contribución de la presión para la ecuación de estado considerada, puesto que se verifica[2] $c_{sw}^2 = w$ (ejercicio 8.1) donde c_{sw} es la velocidad del sonido (7.51). El segundo término del segundo miembro representa la contribución gravitatoria a la fluctuación debida a todas las ecuaciones de estado (nótese el paralelismo con la primera ecuación de Fridman 2.87), mientras que el tercer término refleja las variaciones resultantes en la métrica.

Se buscarán soluciones de (8.2) de la forma

$$\delta_w = \delta_k e^{i(\bar{k}_c\cdot\bar{r}-\omega t)}, \tag{8.3}$$

que equivale a considerar que el campo de fluctuaciones $\delta_w(\bar{r})$ en un cierto volumen definido por una escala característica propia L, suficientemente grande como para ser estadísticamente significativa, se puede descomponer en un desarrollo en serie de Fourier

$$\delta_w(\bar{r}) = \sum_k \delta_k e^{i(\bar{k}_c\cdot\bar{r}-\omega t)}$$

para cada ecuación de estado, y que **en lo que sigue se procederá a estudiar la evolución de cada modo k separadamente.** El vector $\bar{k}_c$ es el vector de onda comóvil, que está relacionado con el propio $\bar{k}$ mediante la relación $\bar{k}_c = a\bar{k}$, puesto que $k = |\bar{k}| = 2\pi / \lambda$ donde λ es la longitud de onda propia de la fluctuación. Las condiciones de contorno implican que $k_i = 2\pi n_i/L$, donde n_i es entero y el subíndice indica las componentes espaciales x, y, z. De este modo, el campo de fluctuaciones contenido en una escala característica L puede considerarse compuesto de un conjunto de fluctuaciones de distintas longitudes de onda (figura 8.1). Si dominan los modos de mayor k (menor λ) predominarán las estructuras de pequeña escala. Si dominan los modos de menor k (mayor λ) predominarán las estructuras de gran escala.

[2] La velocidad del sonido solamente es nula para la materia pulverulenta (galaxias, estrellas...). Para la materia gaseosa no será nula, y vendrá dada por la ecuación de estado del gas. Sin embargo, la contribución de una fluctuación de materia al término gravitatorio de (8.2) sí se obtendrá adoptando el valor $w = 0$ en dicha expresión, puesto que en este sentido y a gran escala se comporta como la materia pulverulenta.

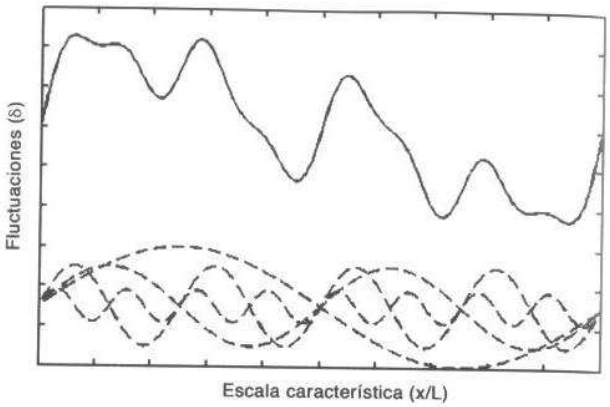


Figura 8.1 Representación simplificada unidimensional de la descomposición del campo de fluctuaciones (línea continua) en una cierta escala propia característica L, como superposición de fluctuaciones de distintas longitudes de onda (líneas de trazos), para una ecuación de estado.

Por definición, el valor medio de las fluctuaciones en la escala L es cero (los mínimos y máximos se compensan, figura 8.1) pero su varianza no es nula. Si las amplitudes de las fluctuaciones siguen una distribución gaussiana de varianza σ^2, se dice que **las fluctuaciones son gaussianas.** En este caso, la probabilidad de encontrar una fluctuación de amplitud δ_k en algún punto del espacio viene dada por

$$P(\delta_k) \propto \exp\left(\frac{-\delta_k^2}{2\sigma^2}\right). \tag{8.4}$$

Las perturbaciones generadas por las fluctuaciones cuánticas asociadas al campo inflacionario son gaussianas. El carácter gaussiano se refleja en que las fluctuaciones de la temperatura de la radiación cósmica de fondo presentan una distribución gaussiana de probabilidad: su asimetría y curtosis son nulas. En cambio, las fluctuaciones de temperatura asociadas a defectos topológicos (5.3.5) no son gaussianas.

Como ya se ha mencionado más arriba, en lo que sigue se procederá a estudiar las soluciones de (8.2) para cada modo separadamente. De (8.3) se infiere que para cada modo k_c se verifica $\nabla^2\delta_w = -k_c^2\delta_w$. Despreciando las variaciones métricas, lo cual será exacto cuando domine la materia pulverulenta ($w = 0$) o la constante cosmológica ($w = -1$), se obtiene

$$\ddot{\delta}_w + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_w = -c_{sw}^2 k^2 \delta_w + 4\pi(1+w)\sum_i (1+3w^i)\bar{\rho}_i\delta_i \tag{8.5}$$

para cada ecuación de estado. La sumatoria del término gravitatorio, que representa la suma de las contribuciones de los términos gravitatorios correspondientes a las fluctuaciones de densidad de cada una de las ecuaciones de estado, se podrá aproximar por la densidad de energía dominante en cada momento. De este modo, se obtendrá un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden, cuyo planteamiento y resolución, *siempre en el caso euclídeo*, se discutirán más adelante.

8.1.3 La longitud de Jeans

La solución de la ecuación diferencial (8.5) dependerá del signo del segundo miembro. Si es positivo, podrán existir soluciones con crecimiento de fluctuaciones. Si es negativo, las fluctuaciones no podrán crecer sino que oscilarán, disminuirán o se mantendrán constantes. En particular, **si domina el término de presión** –el primer término del segundo miembro– **la ecuación diferencial resultante corresponde a la de un oscilador armónico amortiguado por el rozamiento de Hubble, y las fluctuaciones oscilarán sin crecer.**

El signo del segundo miembro vendrá determinado por dos factores: la ecuación de estado dominante y la longitud característica λ de la fluctuación. De (8.5) resulta que el segundo miembro es negativo cuando dominan densidades de energía $w < -1/3$. Por tanto, **cuando dominen ecuaciones de estado $w \leq -1/3$, las fluctuaciones no podrán crecer** (ejercicio 8.2). Sin embargo, a pesar de que sea $w > -1/3$, el segundo miembro de (8.5) podrá ser negativo cuando la longitud característica de la fluctuación sea menor que la denominada **longitud de Jeans** λ_J, para la que el segundo miembro se anula. Por ejemplo, para una única ecuación de estado, la longitud de Jeans es

$$\lambda_J = c_{sw}\sqrt{\frac{\pi}{(1+w)(1+3w)\bar{\rho}_w}}. \tag{8.6}$$

Cuando la longitud de onda de una fluctuación sea mayor que la longitud de Jeans, el término de presión será despreciable frente al término gravitatorio y las fluctuaciones podrán crecer puesto que el término de gravitación dominará a gran escala. En caso contrario, la presión se opondrá a la gravedad impidiendo el crecimiento de la fluctuación y generando un comportamiento oscilatorio. Como la densidad media varía con el tiempo, la longitud de Jeans también varía con el transcurso del tiempo.

Para formar estructuras es preciso evitar entrar o conseguir salir de este régimen oscilatorio, bien porque ya antes de entrar se alcance un régimen no lineal, o bien porque disminuya c_{sw}, posibilidad esta última que, como se tratará más adelante, en el caso de la materia bariónica tiene lugar en el momento del desacoplamiento de los fotones.

Por motivos ilustrativos y para fijar ideas, se acostumbra a definir la **masa de Jeans** como la masa de materia no relativista, puesto que es la que va a terminar formando estructuras, contenida en una esfera de diámetro igual a la longitud de Jeans, resultando, para una única ecuación de estado (ejercicio 8.4),

$$M_J \equiv \frac{\pi}{6}\lambda_J^3 \rho_m = \sqrt{\frac{2}{27}}\,\pi^3\,\frac{c_{sw}^3\,\Omega_{m0}}{H_0}\left\{\Omega_{w0}\left[(1+w)(1+3w)\right](1+z)^{1+3w}\right\}^{-3/2} \qquad (8.7)$$

En el régimen lineal, dado que las fluctuaciones son pequeñas, la masa de Jeans puede considerarse equivalente a la masa no relativista contenida en la fluctuación. Entonces fluctuaciones de masas mayores que la de Jeans (8.7) crecerán al dominar la atracción gravitatoria sobre la presión, mientras que las fluctuaciones de masas menores oscilarán sin crecer.

8.1.4 Longitud de Jeans para la materia oscura

En el capítulo primero ya se estableció que la materia oscura domina sobre la luminosa y es fundamentalmente no bariónica. Esta materia oscura se caracteriza por interaccionar débilmente y crear campo gravitatorio. La debilidad de su interacción se manifiesta por un desacoplamiento del equilibrio térmico del universo anterior al desacoplamiento de los fotones e incluso anterior a la etapa de equilibrio radiación-materia. Antes de su desacoplamiento, la materia oscura se comporta como la materia relativista o no relativista, pero desde el momento de su desacoplamiento su interacción con el resto de las partículas se manifiesta únicamente por su influencia gravitatoria. Por tanto, las ecuaciones de la dinámica de fluidos de las que se puede deducir (8.5) deben reemplazarse por la ecuación de Boltzmann sin colisiones. Entonces el criterio de estabilidad de Jeans también se verifica reemplazando la velocidad del sonido por la velocidad,

$$v = \sqrt{\frac{\int f(v)\mathrm{d}^3\overline{v}}{\int (f(v)/v^2)\mathrm{d}^3\overline{v}}}, \qquad (8.8)$$

que es igual a la velocidad cuadrática media en el caso de que la distribución de velocidades $f(v)$ de la materia oscura sea maxwelliana.

En este caso la longitud de Jeans representará la longitud de escala por encima de la cual la gravedad domina sobre la dispersión de velocidades y las fluctuaciones pueden crecer.

Sin embargo, las fluctuaciones de materia oscura estarán sujetas a una amortiguación por difusión debido al recorrido libre de las partículas, que no colisionan al estar desacopladas. Este fenómeno se analiza en 8.1.8.

8.1.5 Crecimiento en un universo estático

Si $H = 0$, cuando en un universo dominado por materia no relativista domina la gravitación sobre el término de presión, las soluciones de (8.5) son una combinación lineal de un término creciente y otro decreciente, ambos exponenciales (ejercicio 8.5). Este crecimiento es el que tiene lugar en los procesos de formación estelar en nubes moleculares gigantes[3]. El término adicional de rozamiento de Hubble que aparece en (8.5) debido a la expansión del universo, representa una amortiguación del crecimiento proporcional a la velocidad de crecimiento que, como se demostrará seguidamente, se manifiesta en que **el crecimiento en un universo en expansión ya no es exponencial sino potencial.**

8.1.6 Dominio de la radiación

Sólo radiación

Cuando solamente existe la radiación, la sumatoria de (8.5) se reduce al término de densidad de radiación con $w = 1/3$. Además, la velocidad del sonido para la radiación en equilibrio térmico es $c_{sr} = 1/\sqrt{3}$ de acuerdo con (7.53). Entonces la ecuación que representa la evolución de las fluctuaciones de radiación y materia relativista es, según (8.5),

$$\ddot{\delta}_r + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_r = \left[\frac{32}{3}\pi\bar{\rho}_r - c_{sr}^2 k^2\right]\delta_r \qquad (8.9)$$

que es equivalente a (ejercicio 8.6)

$$\ddot{\delta}_r + 2H\dot{\delta}_r = \left[4\bar{\Omega}_r H^2 - c_{sr}^2 k^2\right]\delta_r. \qquad (8.10)$$

En este caso, la longitud de Jeans (8.6) es

$$\lambda_J = c_{sr}\sqrt{\frac{3\pi}{8\bar{\rho}_r}}. \qquad (8.11)$$

Mientras que la masa de Jeans, en unidades físicas (ejercicio 8.7), es

$$M_J \equiv \frac{\pi}{6}\lambda_J^3 \rho_m = \frac{(\pi c)^3}{48\sqrt{3}G}\frac{\Omega_{m0}}{H_0\Omega_{r0}^{3/2}}(1+z)^{-3} = 1.1\times 10^{28}(1+z)^{-3} M_\odot \qquad (8.12)$$

Es decir, que **la masa de Jeans crece con el tiempo.** Por tanto las fluctuaciones de materia de 1 $M_\odot$ dejarán de crecer y empezarán a oscilar cuando $z < 2\times 10^9$, mientras que las del orden de la masa de una galaxia $\sim 10^{12}\ M_\odot$ lo harán cuando $z < 2\times 10^5$ (ejercicio 8.7). La masa de Jeans en el momento de la equivalencia radiación-materia es de $4\times 10^{17}\ M_\odot$, superior a la de supercúmulos de galaxias.

[3] Del inglés *Giant Molecular Clouds*.

Como ya se ha mencionado, según la longitud de onda de la fluctuación cabe distinguir dos casos: longitudes mayores y longitudes menores que la de Jeans (8.11), que se analizan a continuación.

Caso $\lambda > \lambda_J$

En este caso domina el término gravitatorio y (8.10) puede aproximarse por:

$$\ddot{\delta}_r + 2H\dot{\delta}_r = 4\bar{\Omega}_r H^2 \delta_r. \tag{8.13}$$

Buscando soluciones de la forma $\delta_r = C\,t^n$ por sustitución en (8.13) y teniendo en cuenta que para un universo dominado por radiación y *de curvatura despreciable* $H=1/(2t)$ como se deduce de (3.31), se obtiene una ecuación de segundo grado en n, de raíces $n = \pm 1$. Por tanto, las soluciones buscadas serán (ejercicio 8.8)

$$\delta_r = C_1 t + C_2 t^{-1}. \tag{8.14}$$

Una solución corresponde al modo de crecimiento y otro al de decaimiento de la fluctuación. Por tanto, en un universo dominado por radiación (3.29) **las fluctuaciones de radiación crecen como**

$$\delta_r \propto a^2. \tag{8.15}$$

Se verifica que, aunque sean del mismo orden, $\lambda_J > R_H$ (ejercicio 8.9), mientras que la ecuación linealizada (8.2) procedente de la ecuación de Einstein perturbada no tiene por qué ser válida a escalas mayores que el radio de Hubble en que la aproximación lineal dejaría de ser aceptable y sería preciso tener en cuenta el término en $\dot{h}$ de (8.2). Sin embargo, la validez del resultado así obtenido puede verificarse suponiendo que una perturbación de escala suficientemente grande puede asimilarse a un mini-universo de curvatura positiva sumido en un universo de curvatura nula. En este caso puede determinarse (8.1) asumiendo que el incremento de densidad viene dado por la densidad de un universo de curvatura positiva dominado por radiación (3.4.2) con respecto a una densidad media representada por la densidad de un universo de curvatura nula dominado por radiación (ejercicio 8.10) obteniendo también la dependencia (8.15).

Caso $\lambda < \lambda_J$

En este caso se tiene la aproximación

$$\ddot{\delta}_r + 2H\dot{\delta}_r = -c_{sr}^2 k^2 \delta_r, \tag{8.16}$$

que es equivalente a la ecuación de un oscilador armónico amortiguado de constante recuperadora $c_{sr}^2 k^2$ y con un término de fricción (el rozamiento de Hubble) proporcional a la velocidad y cuyo coeficiente de amortiguamiento en general disminuye con el tiempo. Luego **a estas longitudes de escala la radiación oscila amortiguadamente sin crecer.**

Radiación y materia no relativista

Si además existe materia no relativista, a la ecuación (8.9) hay que añadir, basándose en (8.5), la ecuación que rige la evolución de las fluctuaciones de materia no relativista,

$$\ddot{\delta}_m + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_m = 8\pi\bar{\rho}_r \delta_r - c_{sm}^2 k^2 \delta_m. \tag{8.17}$$

Esta ecuación y la (8.9) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas.

Despreciando el término de presión en (8.17), sustituyendo la solución creciente de (8.14) y buscando una solución potencial en t, se obtiene que una solución puede ser (ejercicio 8.8)

$$\delta_m = \frac{3}{4}\delta_r. \tag{8.18}$$

Es decir: las fluctuaciones adiabáticas (7.33) son una posible solución[4]. Éste no es un resultado sorprendente habida cuenta del excelente acoplamiento entre la materia y la radiación ya puesto de manifiesto en el capítulo séptimo y causado por las frecuentes interacciones entre fotones y electrones, que se transmiten a los protones por interacción electrostática. Estas interacciones son muy eficientes impidiendo el movimiento relativo de los bariones con respecto los fotones. Este acoplamiento permite suponer que $c_{sr} \approx c_{sm}$ y sustituyendo (8.18) en (8.17), permite obtener la misma ecuación para las fluctuaciones de materia que para las de radiación (8.9). Por tanto, **cuando $\lambda > \lambda_J$ las fluctuaciones de materia δ_m también crecen como (8.15) y cuando $\lambda < \lambda_J$** se entra en un régimen oscilatorio en fase con las fluctuaciones de radiación, que representa las **oscilaciones acústicas** estudiadas en el capítulo séptimo (7.7.1). En conclusión, **cuando domina la radiación las fluctuaciones de materia por debajo de la longitud de Jeans no pueden crecer, sino que oscilan con la radiación.**

Antes de proceder a estudiar lo que sucede cuando domina la materia sobre la radiación es preciso analizar la influencia de la materia oscura, puesto que ésta se desacopla durante la era de dominio de la radiación. Intuitivamente, como la materia oscura predomina sobre la bariónica, cuando el universo pase a estar domi-

[4] Existe también una solución de fluctuaciones de isocurvatura.

nado por la materia no relativista, la materia oscura jugará un papel predominante y su crecimiento determinará el de la materia bariónica. Dos factores influirán en el crecimiento de la materia oscura después de su desacoplamiento: el efecto Mészáros y la amortiguación de sus fluctuaciones debido a su recorrido libre.

8.1.7 Efecto Mészáros

Según los resultados del anterior apartado, cuando domina la radiación y a escalas mayores que R_H, la presión puede despreciarse frente al término gravitatorio y la atracción ejercida por las fluctuaciones de radiación guía el crecimiento de las de materia, mientras que a escalas menores que R_H materia y radiación oscilan acústicamente. Cuando se produce el desacoplamiento de la materia oscura la situación no varía a escalas mayores que R_H, donde domina la gravitación que sigue afectando a la materia oscura, pero cambia a escalas menores, donde domina la presión, que ya no afecta a la materia oscura. En efecto, la presión de la materia oscura es cero por definición y la materia oscura solamente está afectada por la gravitación, pero a escala menor que R_H las fluctuaciones de la radiación no crecen sino que oscilan, por lo que su atracción ya no puede conducir el crecimiento de la materia oscura. En consecuencia, desde el punto de vista gravitatorio, *a escalas menores que* R_H la radiación puede aproximarse como un fondo uniforme que solamente influye en la evolución del factor de escala[5]. En estas circunstancias, las fluctuaciones δ_{nb} de la *materia oscura ya desacoplada y no relativista* vendrán descritas por,

$$\ddot{\delta}_{nb} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{nb} = 4\pi\bar{\rho}_{nb}\delta_{nb}, \tag{8.19}$$

donde, de la ecuación de Fridman (2.88), resulta $H^2 = 8\pi(\rho_m+\rho_r)/3$ para un *universo euclídeo*. Con el cambio $y \equiv \rho_m/\rho_r = a/a_{eq}$, y asumiendo $\rho_m \approx \rho_{nb}$, se obtiene (ejercicio 8.11)

$$\delta''_{nb} + \frac{2+3y}{2y(1+y)}\delta'_{nb} - \frac{3}{2y(1+y)}\delta_{nb} = 0 \tag{8.20}$$

donde $\delta'_{nb} = d\delta_{nb}/dy$. La solución creciente de (8.20) con $\delta''_{nb} = 0$ es (ejercicio 8.11)

$$\delta_{nb} \propto y + \frac{2}{3} \tag{8.21}$$

[5] La argumentación rigurosa que permite despreciar la contribución de las fluctuaciones de la radiación al término gravitatorio, es que una de las modalidades de soluciones de la ecuación completa es del tipo $\delta_r = O(k^{-2})$, por lo que las fluctuaciones de radiación son despreciables cuando k es grande, es decir, cuando la longitud de escala es pequeña (Weinberg, 2002). Para más detalles se recomienda la lectura del apartado 4 y de la cuarta nota a pie de página de dicha referencia.

que indica que antes de la equivalencia radiación-materia el crecimiento es lento. Desde $t = 0$ ($\equiv y = 0$) hasta $t = t_{eq}$ ($\equiv y = 1$), el crecimiento es solamente

$$\frac{\delta_{nb}(1)}{\delta_{nb}(0)} = \frac{5}{2}. \tag{8.22}$$

Después de la equivalencia radiación materia, cuando la materia domina, es decir, $y >> 1$, entonces el crecimiento es

$$\delta_{nb} \propto y \propto a. \tag{8.23}$$

La interpretación del efecto Mészáros (1974) es que, cuando domina la radiación, la expansión es tan rápida, que la fluctuación de materia oscura se mantiene prácticamente constante. Como consecuencia, **después de su desacoplamiento las fluctuaciones de materia oscura de escala menor que R_H solamente pueden empezar a crecer a partir del instante de la equivalencia radiación-materia.** Mientras, a estas escalas, la materia bariónica seguirá oscilando acústicamente con la radiación hasta el desacoplo de los fotones, como ya se ha discutido en el capítulo séptimo (7.7.1). Como las fluctuaciones de estas escalas son las de importancia astrofísica, puesto que según (8.12) la masa de Jeans en el momento de la equivalencia radiación materia es mayor que la masa de supercúmulos, puede afirmarse **que las fluctuaciones de materia no podrán crecer hasta que domine la materia sobre la radiación.**

8.1.8 Amortiguación de las fluctuaciones de materia oscura

Como ya se ha mencionado, mientras la materia oscura se encuentra acoplada a los demás constituyentes del universo su comportamiento no difiere de las demás partículas relativistas o no relativistas. Sus fluctuaciones, o bien crecerán, o bien oscilarán con la radiación según lo establecido en 8.1.6. Pero cuando tiene lugar el desacoplamiento de la materia oscura, como por definición ésta no interacciona más salvo por gravitación, las partículas de materia oscura que forman parte de una fluctuación de materia siguen en las trayectorias que tenían en el momento del desacoplamiento, dispersándose libremente por el universo. Este comportamiento prosigue hasta el momento del equilibrio radiación-materia, cuando la gravitación de la materia oscura puede empezar a dominar y las fluctuaciones a crecer, como ya se ha establecido en el apartado anterior. Como la materia oscura predomina sobre la bariónica, **este proceso de difusión causa una amortiguación de las fluctuaciones de materia** al disminuir su pozo de potencial, de forma parecida a la manera en que la velocidad térmica provoca la amortiguación de Landau en un plasma

sin colisiones[6]. Sin embargo, **la situación es muy distinta si el desacoplamiento de la materia oscura tiene lugar cuando ésta es todavía relativista (materia oscura caliente) o cuando ya no lo es (materia oscura fría)**. En el primer caso, las partículas de materia oscura recorren libremente distancias mayores que en el segundo. La **distancia recorrida desde el desacoplamiento de la materia oscura hasta el momento de la equivalencia radiación-materia proporcionará el orden de magnitud de las fluctuaciones de materia oscura que podrán crecer a partir del momento del dominio de la materia sobre la radiación.**

Materia oscura caliente

De acuerdo con (6.104), los neutrinos no pueden constituir la materia oscura. Sin embargo, para fijar ideas y a modo de ejemplo, supóngase que una partícula relativista o conjunto de partículas relativistas x con los mismos grados de libertad que los neutrinos, y que se desacoplan aproximadamente al mismo tiempo, representan la materia oscura que es, por tanto, caliente al ser las partículas relativistas en el momento de su desacoplamiento. En este caso, su masa en reposo debería ser de 3.36 eV, según (6.103), teniendo en cuenta (6.123) y que $\Omega_{m0} = 0.30$ (3.8.2). Según (6.3), las partículas x dejarían de ser relativistas cuando $m_x > |\overline{p}_x|$. De acuerdo con (6.6) y aplicando la ley de los gases perfectos, ello conduce a $m_x c^2 > 3kT_x$, en unidades físicas. Teniendo en cuenta la relación entre la temperatura de los neutrinos y de los fotones (6.99), que también puede aplicarse para relacionar la temperatura de las partículas x con la de los fotones, dado que se ha supuesto que las partículas relativistas x se desacoplan en la misma época, entonces las partículas x dejarían de ser relativistas a un desplazamiento al rojo,

$$1+z_{nr} < \frac{m_x c^2}{3kT_0}\left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} \approx 6700. \tag{8.24}$$

Por tanto, cuando según (6.128) ocurra la igualdad de densidades de energía relativista (fotones y neutrinos) y no relativista a $z_{eq} = 3000$, las partículas x ya no serán relativistas, lo cual es un escenario consistente. La distancia propia R_{rl} recorrida libremente por las partículas x que forman parte de una fluctuación desde su desacoplamiento t_{dx} hasta el momento t_{eq} en que domina la materia no relativista y las fluctuaciones pueden empezar a crecer será, teniendo en cuenta que en las unidades aquí utilizadas $c = 1$ (ejercicio 8.12),

$$R_{rl} = a_{eq}\int_{t_{dx}}^{t_{eq}} \frac{v\,dt}{a} \approx a_{eq}\int_{t_{dx}}^{t_{nr}} \frac{dt}{a} + a_{eq}\int_{t_{nr}}^{t_{eq}} \frac{v_p\,dt}{a} = t_{eq}^{1/2}\left\{t_{nr}^{1/2}\left[2+\ln\left(\frac{t_{eq}}{t_{nr}}\right)-t_{dx}^{1/2}\right]\right\}, \tag{8.25}$$

[6] Se amortiguan las oscilaciones del plasma a escalas comparables o menores que la longitud de Debye.

asumiendo *curvatura nula* (3.29) y teniendo en cuenta que, como se demostró en el capítulo cuarto (4.79), la velocidad peculiar propia en un universo en expansión evoluciona como

$$v_p = \frac{a_{nr}}{a}, \tag{8.26}$$

donde a_{nr} es el valor del factor de escala cuando las partículas devienen no relativistas.

La distancia (8.25) define una masa en el momento de la equivalencia radiación-materia

$$M_{rl} = \frac{\pi}{6} R_{rl}^3 \rho_m \tag{8.27}$$

que en unidades físicas y utilizando (6.35), (6.54), (6.89), (6.128) y (6.129) es de

$$M_{rl} = \frac{\Omega_{m0} c^3 H_0^2}{16G} R_{rl}^3 (1+z_{eq})^3 \approx 1.5\times 10^{16} M_\odot. \tag{8.28}$$

Esta masa es del mismo orden que la masa de Jeans (8.1.4) de la materia oscura caliente (Coles y Lucchin 1995). Por consiguiente, si la materia oscura fuese caliente todas las fluctuaciones de materia oscura de masas menores que (8.28) quedarían amortiguadas por la difusión de las partículas x antes de que la materia dominase. Esta escala de masas es del orden de súper cúmulos de galaxias.

Dado que, asumiendo un espectro de Harrison-Zel'dovich las amplitudes del espectro de fluctuaciones primordiales disminuyen como el inverso de la longitud de escala al cuadrado (7.31), las estructuras que se formarían primero serían del orden de la masa (8.28). Por tanto, **si la materia oscura fuese caliente, se formarían primero estructuras de la escala de supercúmulos de galaxias**. Cuando estas estructuras gigantescas llegasen a ser no lineales, evolucionarían sufriendo un colapso anisotrópico que las aplanaría formando las denominadas tortas[7]. La subsiguiente fragmentación de estas tortas formaría las estructuras menores, como cúmulos de galaxias, galaxias y estrellas, que se hallarían agrupadas formando el supercúmulo. Este escenario, sin embargo, no es compatible con las observaciones que indican que la reionización del medio debido a la formación de las primeras estrellas tuvo lugar a $z > 20$ (como se estableció en el capítulo anterior), mientras que los cúmulos de galaxias se forman más tardíamente y los supercúmulos se están formando en la actualidad (tabla 8.1).

[7] Del inglés *pancakes*.

Materia oscura fría

La materia oscura fría, al contrario de la caliente, se desacopla muy tempranamente y, por definición, ya a velocidades no relativistas. La distancia recorrida desde el desacoplamiento de la materia oscura fría hasta la equivalencia radiación-materia, cuando las fluctuaciones de materia ya pueden empezar a crecer como tales, será entonces, utilizando el mismo razonamiento que en el caso anterior,

$$R_{rl} = a_{eq} \int_{t_{desac}}^{t_{eq}} \frac{v_p \, dt}{a} = t_{nr}^{1/2} \, t_{eq}^{1/2} \ln\left(\frac{t_{eq}}{t_{desac}}\right), \tag{8.29}$$

y en unidades físicas la masa que contiene una esfera de diámetro (8.29) en el momento del equilibrio radiación-materia será

$$M_{rl} = \frac{\Omega_{m0} c^3 H_0^2}{16G} \left[t_{nr}^{1/2} t_{eq}^{1/2} \ln\left(\frac{t_{eq}}{t_{desac}}\right) \right]^3 (1+z_{eq})^3 \tag{8.30}$$

que es $<< 1\ M_\odot$ (ejercicio 8.13). Ésta es una diferencia fundamental y muy significativa con respecto a la materia oscura caliente: **desde el momento de su desacoplamiento hasta el equilibrio radiación-materia las fluctuaciones de materia oscura fría siguen (8.21) a todas las escalas de importancia astrofísica,** puesto que la masa de Jeans (8.1.4) de la materia oscura fría tampoco es relevante para la formación de estructuras (Coles y Lucchin, 1995).

En conclusión, y por el mismo argumento esgrimido anteriormente de que las amplitudes del espectro de fluctuaciones adiabáticas primordiales disminuyen como el inverso de la longitud de escala al cuadrado (7.31), **la materia oscura fría permite formar primeramente las estructuras de menor escala del universo,** mientras que las estructuras mayores se forman con posterioridad por agrupación gravitatoria jerárquica[8]. Éste es el modelo más aceptado actualmente, concordante con las observaciones (tabla 8.1) que no excluye, sin embargo, la presencia de fracciones no dominantes de materia oscura caliente que ayudarían al crecimiento de grandes estructuras.

En el razonamiento utilizado a lo largo de este apartado, se ha supuesto que las fluctuaciones de materia bariónica y de materia oscura se corresponden espacialmente. En el universo actual la relación a gran escala entre las estructuras de materia bariónica y oscura se estima mediante un indicador fenomenológico b denominado **sesgo**[9],

$$\delta_n = b\delta_m, \tag{8.31}$$

[8] Del inglés *hierarchical clustering*.
[9] Del inglés *bias*.

donde δ_n es la sobredensidad en la densidad n de galaxias. Las observaciones actuales indican que $b \approx 1$-2. Un valor del sesgo $b > 1$ indica que las sobredensidades de materia oscura δ_m son de menor amplitud que las de la materia luminosa, representadas por δ_n. Este valor del sesgo no hace más que reflejar el hecho de que la materia oscura interacciona débilmente: no pierde energía a través de interacciones y por tanto no forma estructuras colapsadas como la materia bariónica. El sesgo se define convencionalmente en función de la fluctuación de masa en una escala de $8h^{-1}$ Mpc:

$$b^{-1} = \left\langle \left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 \right\rangle_{8h^{-1}\mathrm{Mpc}}^{1/2} \equiv \sigma_8. \tag{8.32}$$

8.1.9 Dominio de la materia antes del desacoplamiento de la radiación

Puede concluirse, por tanto, que la materia oscura ha de ser mayormente fría y, de acuerdo con los resultados hasta ahora obtenidos, **cuando domina la densidad de energía de radiación, a escala mayor que la longitud de Jeans las fluctuaciones de materia crecen siguiendo a la radiación, mientras que a escala menor oscilan acústicamente con ésta, hasta el desacoplamiento de la materia oscura. Cuando llega ese momento, la materia bariónica prosigue las oscilaciones junto con la radiación mientras que la oscura no. Sin embargo, esta última apenas crece hasta que domina la materia sobre la radiación.**

Formalmente, en la era de dominio de la materia no relativista procede aplicar (8.5) para la materia oscura y para la materia bariónica y radiación separadamente, teniendo en cuenta que la gravedad de la primera dominará sobre las demás densidades de energía que figuran en la sumatoria de (8.5), y que el término de velocidad (8.8) de la materia no bariónica fría es despreciable frente a la gravedad:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\delta}_r + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_r = \frac{16\pi}{3}\bar{\rho}_{nb}\delta_{nb} - c_{sr}^2 k^2 \delta_r \\
&\ddot{\delta}_b + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_b = 4\pi\bar{\rho}_{nb}\delta_{nb} - c_{sb}^2 k^2 \delta_b \\
&\ddot{\delta}_{nb} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{nb} = 4\pi\bar{\rho}_{nb}\delta_{nb}
\end{aligned} \tag{8.33}$$

que son equivalentes a (ejercicio 8.6),

$$\begin{aligned}
&\ddot{\delta}_r + 2H\dot{\delta}_r = 2\bar{\Omega}_{nb}H^2\delta_{nb} - c_{sr}^2 k^2 \delta_r \\
&\ddot{\delta}_b + 2H\dot{\delta}_b = \frac{3}{2}\bar{\Omega}_{nb}H^2\delta_{nb} - c_{sb}^2 k^2 \delta_b \\
&\ddot{\delta}_{nb} + 2H\dot{\delta}_{nb} = \frac{3}{2}\bar{\Omega}_{nb}H^2\delta_{nb}.
\end{aligned} \tag{8.34}$$

Las ecuaciones (8.34) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales acoplado. La tercera de las ecuaciones puede resolverse procediendo como en el caso de dominio de radiación, buscando soluciones de la forma $\delta_{nb} = C\, t^n$, teniendo en cuenta que ahora en un *universo euclídeo* $H = 2/(3t)$, resultando (ejercicio 8.8)

$$\delta_{nb} = C_1 t^{2/3} + C_2 t^{-1}. \tag{8.35}$$

Es decir, que **en este caso las fluctuaciones en la materia oscura crecen**[10] **como**

$$\delta_{nb} \propto a. \tag{8.36}$$

La solución de las restantes ecuaciones de (8.34) dependerá de la escala y, lo mismo que en el caso de dominio de radiación, se distinguen dos posibilidades según la longitud de escala sea mayor o menor que la longitud de Jeans.

Longitud de Jeans

Como desde su desacoplamiento las fluctuaciones de materia no bariónica a escalas menores que la longitud de Jeans (8.11) se han mantenido estables durante la era de dominio de la radiación y en parte también hasta la combinación (8.1.7), al igual que las fluctuaciones bariónicas a estas escalas, cuyo comportamiento oscilatorio impide el crecimiento, puede suponerse que a una escala del orden de la longitud de Jeans las fluctuaciones bariónicas tendrán una amplitud parecida a las no bariónicas. Con esta aproximación, como es $\delta_b \approx \delta_{nb}$ en la segunda ecuación (8.33), ahora la longitud de Jeans será

$$\lambda_J \approx c_{sb}\sqrt{\frac{\pi}{\bar{\rho}_{nb}}}, \tag{8.37}$$

mientras que la masa de Jeans, en unidades físicas (ejercicio 8.7), adopta la forma

$$M_J \approx \frac{8}{81}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{(\pi c)^3}{G}\frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{m0}}}\left(\frac{\Omega_{\gamma 0}}{\Omega_{b0}}\right)^{3/2} = 4.2\times 10^{19} M_\odot, \tag{8.38}$$

[10] Nótese sin embargo que, como ya se mencionó al tratar del efecto Sachs-Wolfe integrado temprano (7.9.2), y se analizó semicuantitativamente en (8.1.7), la evolución del factor de escala todavía está influida por la densidad de energía de radiación hasta poco después del desacoplamiento de los fotones, puesto que la densidad de energía de radiación en el momento del desacoplamiento todavía representa el 40% de la densidad de materia no relativista. En este caso habría que aplicar el modelo de universo simbiótico estudiado en (3.7.2). Por este motivo, aunque las fluctuaciones crezcan proporcionalmente al factor de escala, los potenciales tienden a decaer hasta que domina completamente la materia no relativista. En este estudio somero y simplificado no se incorpora este efecto y se considera que la transición entre el universo dominado por radiación y el dominado por materia pulverulenta es brusca y completa.

resultado que se obtiene suponiendo que $\bar{\rho}_{nb} \approx \bar{\rho}_m$ y teniendo en cuenta que cuando domina la materia no relativista la velocidad del sonido (7.51) disminuye con el tiempo y se puede aproximar por

$$c_{sb}^2 = \frac{1}{3}\frac{4\rho_\gamma}{4\rho_\gamma + 3\rho_b} \approx \frac{4\rho_\gamma}{9\rho_b} = \frac{4\Omega_{\gamma 0}}{9\Omega_{b0}}(1+z). \tag{8.39}$$

En este caso, y en primera aproximación, **la masa de Jeans** (8.38) **no depende del desplazamiento al rojo** puesto que la variación con z de la longitud de Jeans se compensa con la variación con z de la velocidad del sonido y de la densidad de materia.

Caso $\lambda > \lambda_J$

En este caso, el término gravitatorio en (8.34) es dominante, con lo que sustituyendo la solución creciente de (8.35):

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_r + 2H\dot{\delta}_r &= 2\bar{\Omega}_{nb}H^2 C_1 t^{2/3} \\ \ddot{\delta}_b + 2H\dot{\delta}_b &= \frac{3}{2}\bar{\Omega}_{nb}H^2 C_1 t^{2/3}. \end{aligned} \tag{8.40}$$

Despreciando la curvatura, las soluciones de la segunda ecuación también son de la forma (8.35), mientras que para la primera, una posible solución conduce también al caso adiabático (8.18), (ejercicio 8.8). Luego, cuando domina la materia antes del desacoplamiento, **a escalas mayores que la longitud de Jeans** (8.37) **la materia bariónica crece como la no bariónica** (8.36) **y para la radiación una posible solución la constituyen fluctuaciones adiabáticas, que por tanto también crecen conducidas por la materia oscura.**

Como en el caso anterior, también se verifica $\lambda_J > R_H$ incluso por un factor mayor, aunque ambas cantidades sigan siendo del mismo orden (ejercicio 8.9). Al igual que cuando domina la radiación, puede demostrarse que es posible extrapolar la solución (8.36) a estas escalas si se admite que la fluctuación se comporta como un mini universo de curvatura positiva sumido en otro de curvatura nula, ambos dominados por materia no relativista. Si se efectúa un desarrollo de Taylor del seno y coseno de (3.16) y (3.15) hasta el segundo término, se obtiene (ejercicio 8.14)

$$a = \Omega_{m0}^{1/3} a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}, \tag{8.41}$$

que es la misma expresión que en el caso euclídeo salvo el factor $\Omega_{m0}^{1/3}$. Esta expresión demuestra el hecho ya establecido en el capítulo tercero de que la curvatura se puede despreciar cuando la densidad es suficientemente elevada, como sucede en

las primeras etapas del universo. Desarrollando ahora seno y coseno de (3.16) y (3.15) hasta el tercer término y procediendo como en (8.41), se tiene

$$a=\Omega_{m0}^{1/3}a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}\left[1-\frac{1}{20}(\Omega_{m0}-1)\left(\frac{12H_0t}{\Omega_{m0}}\right)^{2/3}\right], \tag{8.42}$$

de donde se puede deducir la densidad de este mini universo de curvatura positiva (ejercicio 8.15), haciendo uso de (2.78),

$$\rho_m=\rho_{m0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^3\left[1+\frac{3}{5}\frac{(\Omega_{m0}-1)}{\Omega_{m0}}\left(\frac{a}{a_0}\right)\right]=\overline{\rho}_m\left[1+\frac{3}{5}\frac{(\Omega_{m0}-1)}{\Omega_{m0}}\left(\frac{a}{a_0}\right)\right]. \tag{8.43}$$

Nótese que, si $\Omega_{m0}=1$, no existe sobredensidad.
Entonces,

$$\delta_m=\frac{\rho_m-\overline{\rho}_m}{\overline{\rho}_m}=\frac{3}{5}\frac{(\Omega_{m0}-1)}{\Omega_{m0}}\left(\frac{a}{a_0}\right) \tag{8.44}$$

que es un resultado análogo a (8.36).

Caso $\lambda < \lambda_J$

A estas escalas domina la presión de los fotones con respecto a la gravitación de la materia oscura. Asumiendo que el acoplamiento entre los bariones y los fotones permite escribir $c_{sr}\approx c_{sb}$, **la materia bariónica y la radiación presentan oscilaciones acústicas en fase** según la primera y segunda ecuaciones de (8.34), dado que los fotones interaccionan con los bariones transmitiéndoles la presión de radiación que se opone al crecimiento de las fluctuaciones de masas menores que la de Jeans. En **cambio**, como la materia oscura no interacciona con los fotones, **las fluctuaciones de la materia oscura *fría* seguirán creciendo** como (8.36) **a todas las escalas.**

Sin embargo, cuando se produzca el desacoplamiento de los fotones la amortiguación de Silk (7.8.2) ya habrá disipado las fluctuaciones bariónicas de masas menores que la masa de Silk, que según Efstathiou y Silk (1983) es (ejercicio 8.17)

$$M_{Silk}\approx 2\times10^{12}(\Omega_{m0}/\Omega_{b0})^{3/2}(\Omega_{m0}h^2)^{-5/4}M_\odot\approx 4\times10^{14}\,M_\odot, \tag{8.45}$$

valor que equivale a una masa del orden de la de cúmulos de galaxias.

En suma, **en el intervalo que transcurre desde la equivalencia radiación-materia hasta el desacoplamiento, las fluctuaciones bariónicas de escalas menores que la longitud de Jeans se han estabilizado debido a las oscilaciones acústicas y a pequeña escala se disipan debido a la amortiguación de Silk (8.45). En cambio, las fluctuaciones bariónicas de escala mayor que la de Jeans crecen como la materia oscura, mientras que esta última crece a todas las escalas.**

8.1.10 Después del desacoplamiento

Las ecuaciones son las mismas que la segunda y tercera ecuaciones del caso anterior, pero ahora la velocidad del sonido es mucho menor, lo que disminuye grandemente la longitud de Jeans, permitiendo el crecimiento de fluctuaciones de escalas mucho menores puesto que ahora los fotones no se oponen al crecimiento de las fluctuaciones bariónicas de pequeña escala (figura 8.2).

En efecto, después del desacoplamiento la velocidad del sonido puede aproximarse a la de un gas monoatómico perfecto (ejercicio 8.18),

$$c_{sb}^2=\frac{5kT}{3m_H}. \tag{8.46}$$

Y, por tanto, la masa de Jeans en unidades físicas, con las mismas aproximaciones que en el apartado anterior para obtener (8.38), es (ejercicio 8.7)

$$M_J=\frac{5}{9}\sqrt{\frac{5}{3}}\frac{\pi^3}{GH_0\sqrt{\Omega_{m0}}}\left(\frac{kT}{m_H}\right)^{3/2}(1+z)^{-3/2} \tag{8.47}$$

que equivale a $4.9\times10^5\,M_\odot$ ***en el momento del desacoplamiento,*** cuando la temperatura es de 3000 K. **Esta masa es del orden de magnitud de la de los cúmulos globulares.** Después del desacoplamiento la temperatura del gas ya no se mantiene igualada a la de los fotones. Como la temperatura de un gas perfecto es proporcional al cuadrado de la velocidad cuadrática media y las velocidades peculiares en un universo en expansión se comportan como (8.26), sustituyendo en (8.47) se obtiene que **después del desacoplamiento la masa de Jeans evoluciona como** (figura 8.2)

$$M_J\propto a^{-3/2}\propto T^{3/2} \tag{8.48}$$

donde la temperatura T es la de los fotones de la radiación de fondo.

Por consiguiente, **después del desacoplamiento,** caen en picado la velocidad del sonido y la longitud de Jeans, la interacción Thomson con los fotones ya no impide el crecimiento de fluctuaciones bariónicas y **pueden crecer fluctuaciones barió-**

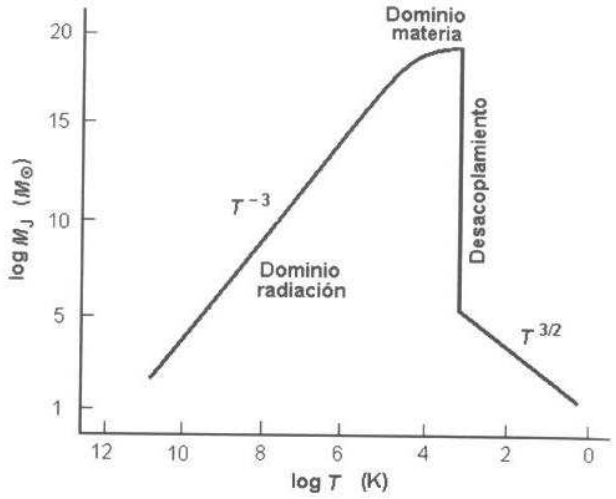


Figura 8.2 Evolución idealizada de la masa de Jeans frente a la temperatura de los fotones. Cuando domina la radiación la masa de Jeans evoluciona como T^{-3} según (8.12). Se estabiliza cuando domina la materia antes del desacoplamiento según (8.38). Cae en picado cuando tiene lugar el desacoplamiento debido a la disminución de velocidad del sonido, y evoluciona como (8.48) a partir del desacoplamiento.

nicas de masas mucho menores, con la misma dependencia funcional que (8.36), mientras sean lineales ($\delta < 1$).

Aunque la amortiguación de Silk (7.8.2) habrá disipado las fluctuaciones bariónicas de masas menores que la masa de Silk, las fluctuaciones bariónicas a estas y a menores escalas crecerán después de la combinación gracias a la materia oscura *fría*. En efecto, considérese que, para un cierto tiempo t_b, la amplitud de las fluctuaciones bariónicas era mucho menor que las de la materia no bariónica. En este caso, la solución de la segunda ecuación de (8.40) será

$$\delta_b = C_1(t^{2/3} - t_b^{2/3}), \tag{8.49}$$

donde t_b es el tiempo a partir del cual las fluctuaciones bariónicas empezaron a crecer. Combinando con la solución creciente de (8.35), y teniendo en cuenta la evolución del factor de escala en un universo de curvatura nula dominado por materia no relativista se tiene

$$\delta_b = \delta_{nb}\left(1 - \frac{z}{z_b}\right). \tag{8.50}$$

Es decir: la atracción gravitatoria dominante de **las fluctuaciones en la materia oscura fría**[11] **hace crecer rápidamente las fluctuaciones bariónicas hasta que adquieren su misma amplitud.** Cuando $z = z_b/2$, las fluctuaciones bariónicas tienen la mitad de amplitud que las de la materia oscura fría. Como $z_b = z_{ue} \approx 1100$, las fluctuaciones bariónicas habrán adquirido la mitad de amplitud que las de materia oscura fría para $z = 550$.

[11] La ecuación es válida, sin embargo, para la materia oscura en general.

En conclusión, **antes del desacoplamiento de los fotones las fluctuaciones de materia bariónica con longitudes características menores que la longitud de Jeans se encuentran oscilando acústicamente.** Por este motivo, las fluctuaciones bariónicas de estas escalas **no podrán crecer hasta que tenga lugar el desacoplamiento.** Dado que la materia oscura fría no ha disipado sus fluctuaciones a pequeñas escalas, **después de la combinación las fluctuaciones bariónicas de escalas intermedia y pequeña** (tabla 7.1) **crecen ayudadas por la materia oscura fría** según (8.50), incluso aquéllas de masa menor que la masa de Silk (8.45), puesto que la amortiguación de Silk no ha disipado las fluctuaciones de la materia oscura fría asociadas. Por tanto, **las fluctuaciones bariónicas de masas menores que la masa de Silk también crecerán después de la combinación ayudadas por la materia oscura fría.** En resumen, la materia oscura fría permite formar estructuras empezando desde las escalas más pequeñas, consistentemente con las observaciones (tabla 8.1). Esto no sucedería ni en un universo dominado por materia oscura caliente, donde (8.50) indica que la materia oscura potenciaría el crecimiento de las fluctuaciones de escalas muy grandes, como ya se ha discutido en 8.1.8, ni en un universo compuesto solamente de materia bariónica: en este caso, las fluctuaciones de masas menores que la de Silk se disiparían y después de la combinación únicamente podrían crecer estructuras de masas superiores. Como las amplitudes del espectro de fluctuaciones adiabáticas primordiales (7.31) disminuyen como el inverso de la longitud de escala al cuadrado, las primeras estructuras que se formarían serían de orden de la Masa de Silk (8.45) es decir, serían cúmulos de galaxias.

8.1.11 La función de transferencia

Toda la física del crecimiento y decaimiento lineal de las fluctuaciones: crecimiento gravitatorio, oscilaciones acústicas, amortiguación, etc., se compendia en la llamada **función de transferencia** $T_w(k)$, que proporciona la evolución lineal normalizada a $k = 0$ de las fluctuaciones de número de ondas k del componente de ecuación de estado w, desde su formación hasta la actualidad,

$$T_w(k) \equiv \frac{\delta_w(k, z=0)}{\delta_w(k, z=\infty)} \frac{\delta_w(0, z=\infty)}{\delta_w(0, z=0)}, \tag{8.51}$$

donde $\delta_w(k,z)$ es la fluctuación de densidad de ecuación de estado w y número de ondas k a un desplazamiento al rojo z. La función de transferencia de la materia no relativista se obtendrá, por tanto, como la suma ponderada de las funciones de transferencia de la materia bariónica y la materia oscura:

$$T_m(k)=\frac{\Omega_{b0}}{\Omega_{m0}}T_b(k)+\frac{\Omega_{nb0}}{\Omega_{m0}}T_{nb}(k) \qquad (8.52)$$

A escalas mayores que el horizonte acústico, la función de transferencia de materia (8.52) es prácticamente la unidad (ejercicio 8.20), puesto que materia bariónica y materia oscura son indistinguibles, mientras que a una escala menor la función de transferencia presenta ondulaciones debidas a las oscilaciones acústicas de la componente bariónica, cuya envolvente decae debido a distintos efectos tales como: amortiguación de Silk, disminución de la velocidad del sonido, etc. Como se demostró en el anterior apartado, después de la combinación las fluctuaciones bariónicas crecen rápidamente, alcanzando las de materia oscura, por lo que ambas funciones de transferencia se igualan.

De acuerdo con la definición (8.51), el espectro de potencias

$$\left\langle \left|\delta_w(\vec{k})\right|^2 \right\rangle$$

es proporcional al cuadrado de la función de transferencia multiplicado por el espectro de potencias inicial de las fluctuaciones, que a menudo se adopta como una ley de potencias k^n donde, según se mencionó en el capítulo anterior, la inclinación n=1 corresponde al caso invariante de escala o espectro de Harrison-Zel'dovich.

8.1.12 Crecimiento no lineal de las fluctuaciones

Con el transcurso del tiempo, y gracias a la ayuda de la materia oscura fría, las fluctuaciones que crecen llegan a ser no lineales antes de la época actual, es decir, $\delta \approx 1$. A partir de ese momento, el análisis lineal esbozado anteriormente no es válido y son precisos cálculos más elaborados que quedan más allá del alcance de este texto. Por este motivo, en este apartado se proporcionará solamente un análisis semicuantitativo del proceso.

Este análisis se basará en determinar el valor de la sobredensidad que verifica el teorema del Virial. Utilizando luego la dependencia de la densidad con z, permitirá estimar el desplazamiento al rojo al cual una estructura de una cierta masa se encuentra en equilibrio de Virial.

Ya se ha mencionado que una fluctuación de densidad se comporta como un mini universo de Ω>1 sumido en un universo de curvatura nula. Esta fluctuación, aunque inicialmente se expandirá, terminará deteniendo su expansión y volviendo a colapsar, como lo haría un universo de curvatura positiva dominado por materia. Por este motivo, se hará uso de las variables, parámetros y ecuaciones del apartado 3.3.2 a las que se referirá en lo sucesivo. El momento en que la expansión se detiene corresponde a $Q=\pi$ en el que el factor de escala es máximo $a=a_{máx}$ y la densidad es mínima. En este momento, el contraste de densidad con el entorno de densidad crítica es (ejercicio 8.21)

$$\frac{\rho_m(a_{máx})}{\bar{\rho}_m}=\frac{\rho_m(a_{máx})}{\rho_c}=\frac{9\pi^2}{16}=5.55, \qquad (8.53)$$

donde el numerador procede de utilizar (3.21) para $Q=\pi$ y el denominador de la definición de densidad crítica (2.92) y la dependencia de H con z (2.100) para un universo de curvatura nula dominado por materia no relativista. Mediante (3.10) puede expresarse el desplazamiento al rojo en función del tiempo cosmológico, donde t_0 viene dado por (3.12) y el tiempo t del modelo euclídeo corresponde al que hace máximo a en el modelo de curvatura positiva (ecuación 3.16 para $Q=\pi$), puesto que el origen de tiempos se considera el mismo. Nótese que en este momento ya el proceso de crecimiento es altamente no lineal.

El valor de (8.53) representa, por tanto, la densidad de la fluctuación con respecto a la densidad media en el momento en que ésta alcanza el valor máximo de a, para el cual $\dot{a}=0$, y toda la energía se encuentra en forma de energía potencial E_p. Suponiendo que la fluctuación puede asimilarse a una esfera uniforme de masa M y radio $R_{máx}$, su energía potencial puede aproximarse por $-3GM^2/(5R_{máx})$. Cuando el radio haya disminuido a la mitad debido a su proceso de colapso gravitatorio, habrá adquirido una energía cinética E_c a expensas de la potencial que será

$$\begin{aligned} E_c(R_{máx}/2)&=E_p(R_{máx})-E_p(R_{máx}/2)= \\ &=-\frac{3GM^2}{5R_{máx}}+\frac{3GM^2}{5(R_{máx}/2)}=\frac{3GM^2}{5R_{máx}}=-\frac{1}{2}E_p(R_{máx}/2). \end{aligned} \qquad (8.54)$$

Es decir, en el momento en que su radio es la mitad del radio máximo, su energía cinética es igual a la mitad de la potencial cambiada de signo, que es la condición de equilibrio dinámico según el teorema de Virial.

Por tanto, en el momento en que la fluctuación, supuesta esférica, se halla en equilibrio de Virial, su radio es la mitad que el que tiene cuando alcanza la densidad mínima y por tanto su densidad ha aumentado en un factor 8 con respecto la que tenía entonces,

$$\frac{\rho_m(a_{máx}/2)}{\rho_m(a_{máx})}=\frac{a_{máx}^3}{(a_{máx}/2)^3}=8, \qquad (8.55)$$

mientras que la densidad del entorno ha continuado disminuyendo. Para calcular esa disminución hay que tener en cuenta que cuando $a=a_{máx}/2$ es $Q=3\pi/2$ según (3.15), y por tanto el tiempo $t_{1/2}$ en que el radio es la mitad será, de acuerdo con (3.16),

$$t_{1/2}=t_{máx}\left(\frac{3}{2}+\pi^{-1}\right), \qquad (8.56)$$

puesto que $t_{máx}=\alpha\pi/2$ (3.16). Luego la densidad del entorno, un universo crítico dominado por materia, habrá disminuido en un factor

$$\frac{\bar{\rho}_m(t_{1/2})}{\bar{\rho}_m(t_{máx})}=\left(\frac{a(t_{máx})}{a(t_{1/2})}\right)^3=\left(\frac{t_{máx}}{t_{1/2}}\right)^2=0.30, \tag{8.57}$$

donde la penúltima igualdad se obtiene de (3.10). En conclusión, cuando la estructura resultante del crecimiento no lineal de la fluctuación está virializada (su radio es la mitad del radio máximo), su densidad con respecto al entorno es de

$$\frac{\rho_m(a_{máx}/2)}{\bar{\rho}_m(t_{1/2})}=\frac{\rho_m(a_{máx})}{\bar{\rho}_m}\frac{\rho_m(a_{máx}/2)}{\rho_m(a_{máx})}\frac{\bar{\rho}_m(t_{máx})}{\bar{\rho}_m(t_{1/2})}=\frac{5.55\times 8}{0.30}\approx 150 \tag{8.58}$$

como resulta de combinar (8.53), (8.55) y (8.57). Las simulaciones numéricas permiten obtener resultados más precisos que indican que el contraste de densidades sería del orden de 400. Por tanto, puede considerarse que las estructuras estarán virializadas cuando su densidad ρ_{Vir} sea al menos 100 veces la del entorno, que es la que corresponde a un universo de curvatura nula dominado por materia,

$$\rho_{Vir}\geq 100\,\rho_c=100\,\Omega_{m0}\frac{3H_0^2}{8\pi G}(1+z_{Vir})^3 \tag{8.59}$$

expresado en unidades físicas.

Como por definición de Virial, la energía cinética es la mitad que la potencial,

$$\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}G\frac{M^2}{R}, \tag{8.60}$$

y $\rho_{Vir}=3M/(4\pi R^3)$, de (8.59) y (8.60) se obtiene

$$1+z_{Vir}\leq\frac{1}{(50G^2\Omega_{m0}H_0^2)^{1/3}}\frac{v^2}{M^{2/3}}\approx\left(\frac{v}{100\text{ km/s}}\right)^2\left(\frac{M}{10^{12}M_\odot}\right)^{-2/3}, \tag{8.61}$$

de donde se deduce que una galaxia espiral típica de $10^{12}\,M_\odot$ y una curva de rotación con una amplitud de 300 km/s se formaría a $z<8$, mientras que un cúmulo rico de $10^{15}\,M_\odot$ y una dispersión de velocidades de unos 1000 km/s, estaría virializado en la actualidad. Estos valores son razonablemente consistentes con los de la tabla 8.1, dadas las aproximaciones efectuadas y las incertidumbres involucradas. En efecto, desde que los primeros cúmulos empiezan a formarse a $z = 7$ (Miley *et al.* 2004) hasta que la mayor parte de ellos se hallan virializados transcurrirá un intervalo de tiempo.

Es mucho lo que podría añadirse acerca de los distintos modelos de formación de estructuras y los resultados de las observaciones más recientes. Sin embargo es preciso poner un límite a la extensión de una obra[12], y este autor ha decidido trazar el límite en este punto.

8.2 Más allá del universo contemporáneo: el futuro del universo

Este libro no podía concluir sin una breve mención al futuro del universo y, por tanto, a su fin, no en forma de un análisis riguroso sino como un divertimento final.

En la actualidad está razonablemente establecido que el universo es euclídeo y que la mayor parte de su energía se halla en forma de una energía oscura que provoca una expansión acelerada. Por tanto, el universo no terminará colapsando sino que se expandirá para siempre. Se ha mencionado a menudo que un universo en expansión ilimitada sufrirá una «muerte térmica», consistente en alcanzar un máximo de entropía que no permita extraer más trabajo del universo, suceso que por consiguiente representa el fin de la especie humana. Sin embargo, trabajos más recientes basados en la teoría de cuerdas y la mecánica cuántica indican que este escenario no es verosímil. Bajo esta nueva luz, se procederá a conjeturar sobre los sucesos que pueden acaecer en el porvenir del universo.

Es de esperar que el crecimiento de las superestructuras quede interrumpido en un futuro no muy lejano debido a la expansión acelerada del universo. Las estrellas, sin embargo, continuarán formándose en las galaxias a partir de nubes de gas puesto que la masa de las galaxias detiene la expansión localmente. Las estrellas más masivas devolverán parte de su materia al medio interestelar mediante explosiones de supernovas o vientos estelares. Las estrellas menos masivas quemarán su combustible más gradualmente durante mayor tiempo, pero no devolverán una fracción significativa de su masa al medio. El material devuelto al medio por las estrellas más masivas deberá enfriarse para poder colapsarse y formar más estrellas. Este proceso terminará más tarde o más temprano con la formación de las últimas estrellas. En este momento la mayor parte de la masa bariónica quedará bloqueada en estrellas de masas intermedias y bajas. Dependiendo de su masa M las estrellas de este rango de masas evolucionarán hacia enanas blancas ($M<1.4M_\odot$), estrellas de neutrones ($1.4M_\odot<M<2M_\odot$) o agujeros negros estelares ($M> 2M_\odot$).

Las enanas blancas se enfriarán progresivamente hasta una temperatura inferior a 5 K, convirtiéndose en enanas negras, en unos 10^{17} años. Mientras, las es-

[12] Sin contar con las objeciones que también pondría mi editor.

trellas que componen las galaxias se escaparán lentamente de las mismas debido a interacciones gravitatorias fortuitas con otras estrellas de la misma galaxia (como las sondas del espacio profundo escapan del Sistema Solar mediante pasos cercanos a planetas masivos). Se estima que el 90% de la masa estelar que compone una galaxia se habrá escapado al espacio en unos 10^{19} años. El 10% restante habrá sido engullida por el agujero negro supermasivo central. En este mismo intervalo de tiempo y por el mismo mecanismo, los planetas habrán escapado de sus soles y se habrán perdido en el espacio profundo. Los planetas que no sufran este destino terminarán cayendo hacia sus soles por radiación gravitatoria en unos 10^{20} años. En unos 10^{23} años, los cúmulos de galaxias también se disgregarán debido a las interacciones gravitatorias.

Llegado este momento, el universo se compondrá de enanas negras, estrellas de neutrones y agujeros negros de distintas masas junto con planetas y pequeñas cantidades de gas y polvo. Todos estos objetos se hallarán aislados y sumergidos en una radiación de fondo a 10^{-13} K a la cual se hallarán también la mayor parte de objetos.

Los agujeros negros terminan evaporándose mediante la emisión de radiación de Hawking. Un agujero negro del orden de una masa solar se evapora en 10^{66} años, mientras que un agujero negro del orden de la masa de una galaxia se evapora en 10^{102} años. Esta radiación, debido a la baja densidad del gas, ionizará los átomos que todavía queden en el universo.

Una vez evaporados los agujeros negros, los demás objetos –enanas negras, planetas y estrellas de neutrones– se convertirán en hierro, el elemento de menor energía de ligadura, por efecto túnel. Este proceso es muy improbable y se estima que ocurra en unos 10^{1500} años. Finalmente, al cabo de $10^{10^{25}}$, estos objetos compuestos de hierro se convertirán en agujeros negros por efecto túnel, que a su vez se terminarán evaporando por radiación de Hawking.

A partir de este momento, el universo estará compuesto de partículas aisladas estables: fotones, electrones, neutrinos y protones (si es que el protón es estable). La densidad del universo tenderá a cero y las partículas no podrán interaccionar entre sí.

Rizando el rizo, como la temperatura no podrá alcanzar el cero absoluto, el universo puede sufrir fluctuaciones cuánticas. Dado que se dispone de todo el tiempo del mundo (o más bien del universo), una de estas fluctuaciones quizá podría generar otro universo (¿?).

Esta historia puede venir modificada por una serie de factores. Uno de ellos es la ecuación de estado de la energía oscura. Si correspondiera a una energía fantasma ($w<-1$), el fin de universo se produciría mucho antes, a una edad de unos 3.5×10^{10} años, mediante una «Gran Fuga» que disgregaría primero las galaxias, luego los sistemas solares unos tres meses antes del final, seguidamente las estrellas y planetas en los últimos minutos y, finalmente, los átomos en la última fracción de segundo. Descartando la posibilidad de esta energía fantasma debido a que no presenta un potencial estable, quedan como candidatos la constante cosmológica y quintaesencias. Una constante cosmológica o una quintaesencia con w constante crearán un horizonte de sucesos. Como consecuencia, y con el transcurso del tiempo, los objetos que componen el universo, sean éstos estrellas, agujeros negros, átomos de gas o partículas estables, serán incapaces de verse entre sí quedando confinados a su horizonte de sucesos. Además, el horizonte de sucesos, lo mismo que el horizonte de sucesos de un agujero negro, emite radiación de Hawking. Esta radiación, junto con la baja densidad del universo, impediría a hipotéticos seres vivos disipar el calor que sus procesos metabólicos producen. Como consecuencia, cualquier ser vivo que eventualmente pudiera encontrarse todavía en el universo se freiría. En cambio, una quintaesencia variable con el tiempo y que aumentase suficientemente rápido hasta llegar a $w=-1/3$, no forma un horizonte de sucesos permanente, y la radiación de Hawking podría adoptar temperaturas suficientemente bajas con la suficiente rapidez como para no afectar a hipotéticos seres que estuvieran contemplando el fin del universo.

Otro de los factores de los que se ha prescindido en esta historia es la posible inestabilidad del protón. Se supone que el protón no se desintegra. También se ha supuesto que el fin del universo puede describirse con la física que hoy día conocemos, lo cual es susceptible de conducir a conclusiones completamente erróneas, en especial dados los intervalos de tiempo extraordinariamente largos que se barajan.

En cualquier caso, los seres que poblamos este planeta tenemos labores más urgentes de las que ocuparnos para evitar que la vida en la Tierra no llegue a un fin prematuro.

8.3 El futuro de la cosmología

Algo más inmediato que el futuro del universo es lo que el futuro depara a los cosmólogos. A lo largo de este texto quizá el lector tenga la sensación de que el modelo estándar junto con la inflación son capaces de explicarlo todo. Nada más lejos de la verdad. En algunos puntos se ha incidido sobre la precariedad de algunas ideas, en otros se ha decidido no mencionar determinados puntos críticos en aras de una mayor claridad explicativa. En este apartado se pretende dar un leve esbozo de la tarea ingente que le resta a los cosmólogos a la luz de algunos aspectos críticos del modelo.

8.3.1 La cosmología a examen: asignaturas aprobadas

El modelo estándar de la cosmología, también denominado modelo de la Gran Explosión caliente[13], basado en la existencia de una gran explosión en el inicio de

[13] Del inglés *Hot Big Bang*.

tiempos cosmológicos así como en etapas iniciales a altísimas temperaturas, es en la actualidad el único modelo capaz de explicar de forma simple, cuantitativa y con un mínimo de hipótesis, los llamados «tres pilares del modelo estándar»: la ley de Hubble, las abundancias de elementos ligeros y la existencia de la radiación cósmica de fondo altamente isótropa y a una temperatura de 2.73 K.

La incorporación de una breve fase de De Sitter en el universo primordial, la denominada inflación, permite resolver el problema de la conectividad causal y de la planitud. Asimismo, la inflación permite generar fluctuaciones adiabáticas invariantes de escala y gaussianas, de forma consistente con las anisotropías observadas en la radiación cósmica de fondo. La inflación también predice un universo euclídeo, tal y como indica la posición del primer pico acústico del espectro de anisotropías de la radiación cósmica de fondo.

Finalmente, las observaciones de supernovas de tipo Ia son consistentes con una expansión acelerada debida a una energía oscura de presión negativa $w < -1/3$, que proporciona la densidad de energía necesaria para obtener un universo euclídeo, consistente con el paradigma inflacionario, en un universo cuya materia no relativista es insuficiente para tal fin.

¿Todo cuadra? A grandes rasgos, sí. Sin embargo, quedan cuestiones de «detalle» que se enumerarán en el siguiente apartado y que se prevé que provocarán las futuras revoluciones cosmológicas, posiblemente en un futuro inmediato. Es interesante recordar que, a principios del siglo pasado y finales del anterior, se consideraba que la física era un edificio terminado, a falta de explicar «pequeños detalles» como el espectro del cuerpo negro y el experimento de Michelson-Morley, que dieron lugar a la teoría cuántica y a la teoría de la relatividad, respectivamente.

8.3.2 La cosmología a examen: algunas asignaturas pendientes

En orden aproximado de aparición en este texto, puede procederse a enumerar los puntos oscuros del modelo estándar cosmológico.

Primeramente hay que mencionar la **materia oscura**. Ha quedado razonablemente establecido que la materia no luminosa existe y representa la mayor parte de la masa del universo. También se han delineado sus propiedades generales y, por eliminación, se ha deducido que está formada mayormente por materia no bariónica fría. Sin embargo, **se desconoce su composición**. Éste no es un tema baladí, puesto que el descubrimiento de la existencia de la partícula o partículas supersimétricas que forman la materia oscura (¿?) puede permitir validar y establecer parámetros fundamentales de la teoría M[14].

[14] Teoría globalizadora de las teorías de supercuerdas que podría permitir unificar la relatividad general y la física cuántica.

También se desconoce el **origen y la ecuación de estado de la energía oscura** que acelera el universo. **Una constante cosmológica no puede venir explicada por una energía del vacío debida a partículas virtuales porque existe una discrepancia en muchos órdenes de magnitud.** Puede que la teoría M sea capaz de reducir el valor de la energía del vacío a términos compatibles con el parámetro de densidad de energía oscura actual. Si por el contrario la ecuación de estado de la energía oscura varía con el tiempo, estamos en presencia de una quintaesencia. ¿Cuál será su evolución? ¿Aumentará su valor hasta $w = -1/3$ permitiendo que en el futuro no exista un horizonte de sucesos? ¿O por el contrario su valor disminuirá hasta $w = -1$ o incluso hasta una energía fantasma que provoque un Gran Desgarrón? La próxima determinación del valor promedio actual de la ecuación de estado pasa previsiblemente por los futuros desarrollos que permitan, o bien reducir los errores fotométricos de las curvas de luz de supernovas, como sería el caso de telescopios ópticos de la clase 30-100m, o bien medir con precisión el efecto Sunyaev-Zel'dovich mediante amplios cartografiados en ondas milimétricas o submilimétricas[15].

La **teoría M**, además, permitiría estudiar los **instantes iniciales del universo**, a $T > 10^{15}$ GeV, en el límite de validez de la teoría general de la relatividad. Se espera que también permita estudiar la **posible variación de las denominadas «constantes» de la naturaleza**, responsables de aspectos fundamentales como las reacciones de nucleosíntesis, e incluso que pueda explicar el **origen de la expansión del universo**.

Llegados a este punto, resultará obvio para el lector que, o bien la **teoría M** es capaz de explicarlo casi todo, como explícitamente se pretende, o de que quizá se estén depositando excesivas esperanzas en el desarrollo de dicha teoría. Tarde o temprano la realidad terminará imponiéndose.

Otro aspecto fundamental del modelo actual de universo hace referencia a la **inflación**. ¿Tuvo realmente lugar? En este caso, ¿cuál es el origen y dependencia funcional del inflatón? ¿En qué momento tuvo lugar la inflación? Alternativamente, sería preciso recurrir a modelos como el del universo ecpirótico, que permitan explicar las limitaciones del modelo estándar y el espectro de las fluctuaciones iniciales.

Aunque se conocen las condiciones para que la **asimetría materia-antimateria** tenga lugar y que hay momentos en la historia del universo en que estas condiciones se cumplen, el mecanismo no está bien establecido.

El **desplazamiento al rojo al cual se observan las primeras estructuras** es un asunto eminentemente observacional que precisa una vez más de telescopios óptico-infrarrojos de clase 30-100m o incluso de observatorios en el infrarrojo lejano como *Herschel*. De esta manera se pueden poner condiciones a las teorías de formación de estructuras.

[15] Sin embargo, existe la incertidumbre del factor de llenado del haz (véase apartado 4.1.10).

Es de esperar que ulteriores avances en, por ejemplo, la determinación de las anisotropías de la radiación de fondo y la nucleocosmocronología permitan determinar con mayor precisión t_0, H_0 **y los parámetros de densidad**. Sin embargo, ¿por qué estos parámetros cosmológicos y otros como η, el número de especies de neutrino, etc. adoptan estos valores? Aunque esta pregunta escapa a la ciencia, cuyo objetivo fundamental es más bien el cómo que el porqué, la respuesta podría estar basada en principios antrópicos. Por ejemplo, en este contexto antrópico puede que la pregunta acerca del valor de la constante cosmológica no tenga respuesta: la constante cosmológica sería una variable aleatoria que podría tomar un amplio rango de valores. El valor que tiene en el universo actual es uno de los que es compatible con la existencia de vida. Por este motivo se da la notable circunstancia de que la energía oscura empieza a dominar prácticamente ahora. Si hubiera dominado mucho antes no habría sido posible formar estructuras que permitieran la existencia de observadores (ejercicio 8.22).

8.3.3 Futuros observatorios

En este apartado se comentarán brevemente algunos de los experimentos y observaciones con aplicación cosmológica que se están desarrollando en la actualidad o que lo harán en el futuro, y que podrían proporcionar respuestas a las anteriores «asignaturas pendientes» de la cosmología actual. No se pretende ser completo ni mucho menos exhaustivo, sino únicamente dar una perspectiva a grandes rasgos de las líneas en que previsiblemente podrían tener lugar los futuros avances en el campo de la cosmología.

Materia oscura

Como ya se mencionó en el capítulo primero, existen en la actualidad numerosos experimentos que aspiran a detectar y caracterizar la partícula o partículas responsables de la materia oscura. Por añadidura, si estas partículas fueran supersimétricas, sería posible delimitar la validez de las teorías de superunificación.

Entre los experimentos más destacados actualmente en operación cabe mencionar CDMS[16], CRESST[17], DAMA[18], EDELWEISS[19] y HDMS[20]. Las técnicas se basan, bien en detectar vibraciones causadas por el impacto de WIMPs sobre la matriz cristalina de cristales de silicio y germanio a temperaturas criogénicas, bien en el uso de detectores de centelleo. Hasta la fecha no se han obtenido resultados concluyentes.

[16] Cryogenic Dark Matter Search.
[17] Cryogenic Rare Event Search with Superconducting Thermometers.
[18] DArk MAtter.
[19] Expérience pour DEtecter Les WIMPS En Site Souterrain.
[20] Heildelberg Dark Matter Search Experiment.

GTC

El GTC[21] es un telescopio de primario segmentado de 10.4m de diámetro efectivo que entrará en operación en 2008, convirtiéndose entonces en el telescopio óptico-infrarrojo más grande del mundo, rivalizando con los KECK estadounidenses. Es un telescopio mayoritariamente español, con participación de México y de la Universidad de Florida, que se halla situado en el observatorio español del Roque de Los Muchachos en la isla de La Palma (Islas Canarias, España). El instrumento español de Día Uno, OSIRIS[22], tiene previsto, a través del proyecto denominado OTELO[23], cartografiar el universo hasta un desplazamiento al rojo de 6.7, cuando el universo tenía solamente un 10% de la edad actual, lo que permitirá estudiar la evolución de las galaxias y cúmulos de galaxias, entre otras aplicaciones cosmológicas. Unos años más tarde, otro instrumento español, EMIR[24], permitirá proseguir y complementar los estudios iniciados con OSIRIS.

En el futuro, los ELTs[25] segmentados como el telescopio estadounidense TMT[26] de 30m, los europeos de 50 m (EURO50, de Finlandia, Irlanda, España, Suecia y Reino Unido) ó de 100m (OWL[27], de ESO), tendrán, entre sus aplicaciones cosmológicas, el estudio de la evolución de las galaxias y la mejora de la fotometría de las curvas de luz de SNIa, que podría permitir estimar el valor promedio de la ecuación de estado de la energía oscura. El EURO50 podría estar operativo en 2014 mientras que el OWL podría estar operativo en 2015. Además, en este tipo de telescopios, la óptica adaptativa permitiría obtener resoluciones angulares del orden del milisegundo de arco.

HERSCHEL

El observatorio espacial infrarrojo *Herschel* de la Agencia Espacial Europea (ESA[28]) se lanzará en 2008. *Herschel* observará, gracias a distintos instrumentos y detectores en cuyo desarrollo interviene España, en el rango espectral de 60 hasta 670 μm. Dado que las galaxias presentan habitualmente un máximo de emisión térmica a unas 60-100 μm, *Herschel* permitirá estudiar las galaxias y su formación estelar hasta $z \approx 10$, así como los ULIRGs[29], galaxias extraordinariamente luminosas

[21] Gran Telescopio Canarias.
[22] Acrónimo inglés de Optical System for Imaging and low Resolution Integrated Spectroscopy, desarrollado por el Instituto de Astrofísica de Canarias en colaboración con el Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México.
[23] OSIRIS Tunable Emisión Line Object survey.
[24] Espectrógrafo Multiobjeto InfraRrojo.
[25] Del inglés Extremely Large Telescopes.
[26] Thirty Meter Telescope.
[27] OverWhelmingly Large telescope.
[28] European Space Agency.
[29] UltraLuminous InfraRed Galaxies.

en el infrarrojo, comparables a los cuásares más luminosos, que resultan de la fusión de galaxias ricas en gas.

PLANCK

Lanzado junto con *Herschel*, el satélite *Planck*, en el que también participa España, estudiará las anisotropías de la radiación cósmica de fondo sobre todo el cielo a longitudes de onda desde 350 μm hasta 1 cm con una sensibilidad inigualada, e incluyendo medidas de polarización. Además de proporcionar estimaciones precisas de los parámetros cosmológicos, permitirá dilucidar la posible existencia de una etapa inflacionaria en el universo primordial, mediante el estudio de la signatura que las ondas gravitatorias producidas por la inflación dejarían en el espectro de anisotropías. Asimismo, permitirá un amplio estudio sistemático del efecto Sunyaev-Zel'dovich térmico y cinético provocado por los varios miles de cúmulos ricos de galaxias que *Planck* detectará. De esta manera, y combinando con observaciones obtenidas con otros instrumentos, será posible confirmar la aceleración de la expansión y quizá estimar el valor medio de la ecuación de estado de la energía oscura, de forma independiente de las medidas de las SNIa (apartado 7.9.1).

ALMA

ALMA[30] es fruto de una colaboración entre Europa (ESO), Estados Unidos y Japón que resultará, en 2010, en el interferómetro de ondas milimétricas y submilimétricas más grande del mundo. Situado en el llano de Chajnantor (Chile) a 5000 m de altitud, constará de 64 antenas de 12 m de diámetro cada una, separadas por líneas de base regulables entre 150 m y 14 km. Se espera que permita detectar galaxias primordiales hasta $z \approx 20$ en pocos segundos de integración gracias a la corrección K negativa (4.1.3). Asimismo cartografiará las anisotropías de la radiación cósmica de fondo a escala inferior a los 2 minutos de arco con una sensibilidad de 2 μK en 1 hora de observación. También permitirá estudiar el efecto Sunyaev-Zel'dovich en mayor profundidad que PLANCK y así estimar la ecuación de estado promedio de la energía oscura.

LISA

Misión conjunta de ESA y NASA[31], LISA[32] consistirá en tres satélites separados unos 5 millones de km que se lanzarán posiblemente en los alrededores del año 2011, y que están destinados a la detección de ondas gravitatorias. LISA permitirá comprobar la teoría general de relatividad y observar el fondo cósmico de ondas gravitatorias. De este modo, LISA constituirá una sonda del universo primordial que permitirá observar el universo hasta prácticamente el tiempo de Planck.

[30] Atacama Large Millimeter Array.
[31] Nacional Aeronautics and Space Administration.
[32] Laser Interferometer Space Antenna.

8.4 Historia sinóptica de la cosmología moderna

La historia de la cosmología es merecedora, como ya lo ha sido en varias ocasiones, de libros dedicados específicamente a ella. Como cualquier historia humana, tiene sus episodios de suspense, de éxito intelectual, de sacrificio y de mezquindad. Un libro de texto puede beneficiarse del desarrollo histórico de las teorías si éste permite entender mejor sus conceptos y formulación. Sin embargo, puede resultar perjudicado si provoca la alteración de un orden lógico que, si bien históricamente incorrecto, puede ser pedagógicamente más claro.

Es sabido que la teoría de relatividad general fue aplicada por vez primera a la cosmología por A. Einstein en 1917. A cualquier lector inquieto le resultará extraño saber que las ecuaciones de Fridman son posteriores y, más aún, que la métrica de Robertson y Walker es todavía más tardía. De hecho, Einstein no derivó las ecuaciones de Fridman ni éste utilizó la métrica de Robertson-Walker para derivarlas. Einstein resolvió sus ecuaciones basándose en simplificaciones y Fridman se basó en argumentos acerca de la homogeneidad e isotropía para deducir sus ecuaciones a partir de las de Einstein. Este lector inquieto también se preguntará por qué Einstein introdujo y luego rechazó una constante cosmológica que hoy día parece aceptada o, cuanto menos, aceptable. Asimismo despertará su curiosidad la proposición de un universo estacionario con una creación de materia que viola un principio de conservación básico[33] si la teoría de la «Gran Explosión» parecía tan convincente. Éstas son algunas de las ocasiones en que la cronología no favorece la pedagogía. A continuación se proporciona una cronología muy escueta y básica de la cosmología, por otro lado muy conveniente e incluso necesaria, puesto que en este texto el desarrollo histórico ha sido sustancialmente alterado en aras de un orden lógico que permita una mayor claridad expositiva. En cuanto a libros, Overbye 1992 proporciona una introducción a la historia de la cosmología moderna, con hincapié en las disputas sobre el valor de la constante de Hubble, que podría ser de interés para el lector.

1826 Heinrich Wilhelm Olbers propone su paradoja.
1916 Albert Einstein publica la teoría general de la relatividad.
1917 Albert Einstein aplica la relatividad general al universo e introduce la constante cosmológica para forzar un universo estático.
Willem de Sitter postula un universo vacío en expansión con constante cosmológica, el llamado universo de De Sitter.
1922 Alexander Fridman prescinde de la constante cosmológica y halla las ecuaciones que predicen un universo en expansión o contracción como un resul-

[33] Incluyendo el universo ecpirótico.

tado natural de la teoría. En este caso, la curvatura determinaría si un universo es cerrado o abierto. Su aportación pasó inadvertida.

1922 Vesto Slipher comunica sus resultados sobre los desplazamientos al rojo de las «nebulosas espirales».

1929 Edwin **Hubble** publica que el desplazamiento al rojo es proporcional a la distancia.

1930 Arthur Eddington demuestra que el universo de Einstein se halla en equilibrio inestable.

1931 Georges Lemaître sugiere que la ley de Hubble es debida a la expansión del universo. Einstein reniega de la constante cosmológica, y acepta la expansión del universo.

1932 Einstein y De Sitter adoptan un modelo de Fridman con curvatura nula.

1933 Edward Milne formaliza el denominado «principio cosmológico».

1934 Georges Lemaître interpreta la constante cosmológica como debida a una energía del vacío con una ecuación de estado de fluido perfecto.

1935 Howard Percy Robertson y A. G. Walker deducen de forma independiente la métrica de un universo homogéneo e isótropo, lo cual permite un mayor formalismo en la deducción de las ecuaciones de Fridman.

1938 Paul Dirac presenta un modelo cosmológico en el que la constante de gravitación disminuye con el tiempo.

1948 Ralph Alpher, Hans Bethe y George Gamov ($\alpha\beta\gamma$) proponen un universo primigenio caliente y denso para explicar la **nucleosíntesis primordial,** basándose en la expansión. Predicen la existencia de una radiación cósmica de fondo. Ambas ideas son correctas, pero los modelos y las predicciones son erróneas. En aquel momento no se tomó su teoría en serio.

1948 En vista de la contradicción entre la edad del universo y el valor entonces estimado para H_0 y los parámetros de densidad, Fred Hoyle, Hermann Bondi y Thomas Gold proponen un universo estacionario con expansión y creación de materia basado en el principio cosmológico perfecto.

1951 William McCrea muestra que el campo de creación de partículas del modelo estacionario puede interpretarse como una contribución al tensor energía-momento con una ecuación de estado peculiar.

1964 Fred Hoyle y Roger Tayler demuestran que la abundancia de helio primordial depende del número de especies de neutrinos.

1965 Edward Harrison resuelve la paradoja de Olbers mediante la vida finita de las estrellas.

1965 Arno Penzias y Robert Wilson (Bell Labs.) descubren la **radiación cósmica de fondo de microondas** que Robert Dicke, James Peebles, Peter Roll y David Wilkinson interpretan como debida a las etapas primigenias del universo.

Ambas comunicaciones aparecen en artículos consecutivos del *The Astrophysical Journal Letters.*

1966 Jim Peebles reintroduce el concepto de nucleosíntesis primordial y muestra que la Gran Explosión predice correctamente la abundancia de helio observada.

1967 Andrei Sajárov enuncia los requisitos para que tenga lugar una asimetría barión-antibarión en el universo.
Yákov Borísovich Zel'dovich estima que la densidad de energía del vacío cuántico proporciona una constante cosmológica exageradamente elevada.
William Fowler, Fred Hoyle y Robert Wagoner prosiguen la labor de Peebles incluyendo el helio y el litio en la nucleosíntesis primordial.

1969 Charles Misner enuncia formalmente el problema del horizonte en el modelo estándar.

1969 Robert Dicke enuncia formalmente el problema de la planitud en el modelo estándar.

1974 Robert Wagoner, William Fowler y Fred Hoyle muestran que la Gran Explosión predice correctamente las abundancias de deuterio y litio.

1977 Gary Steigman, David Schramm y James Gunn determinan que el número máximo de familias de leptones es de cinco a partir de la relación entre la abundancia de helio primordial y el número de neutrinos.

1980 Guth formula la hipótesis de la inflación como una solución al problema del horizonte y la planitud.

1990 El satélite COBE muestra que el espectro de la radiación cósmica de fondo sigue muy exactamente el de un cuerpo negro a 2.73K.

1992 Los datos de COBE permiten detectar las anisotropías primarias de gran escala angular debidas al espectro de fluctuaciones primordiales (la denominada «normalización de COBE»).

1998 Riess *et al.* sugieren una expansión acelerada del universo basándose en las observaciones efectuadas con supernovas tipo Ia.

2002 Los datos obtenidos con el experimento *Boomerang* (de Bernardis *et al.* 2002) permiten determinar la posición del primer pico acústico y deducir que el universo tiene curvatura nula.

2003 El satélite WMAP permite determinar con precisión parámetros cosmológicos esenciales a partir de los picos acústicos.

8.5 Conclusión

Desde los albores del siglo pasado, el término cosmología ha pasado de ser patrimonio exclusivo de la filosofía a constituir una parte de la física que requiere, como se puede haber constatado a lo largo de este texto, de conocimientos multi-

disciplinares. Este proceso ha sido posible gracias tanto a desarrollos teóricos, como la relatividad general y el modelo estándar de la física de partículas, como a avances observacionales relacionados con la tecnología de telescopios desde tierra y desde el espacio y detectores cada vez más poderosos, sin olvidar ventanas espectrales de muy alta energía como rayos X y gamma. La estrecha vinculación de la cosmología con la física de partículas puede permitir arrojar luz sobre esta última. No en vano el universo primordial es el acelerador de partículas de mayor energía disponible.

Por consiguiente, el desarrollo de nuevas teorías, como la tan buscada y deseada teoría M, así como el desarrollo de nuevos y más poderosos telescopios en la Tierra y en el espacio provocará, sin duda dentro de poco tiempo, otra revolución cosmológica que permitirá cimentar o superar conceptos como la inflación, la ecuación de estado de la energía oscura o el mismo origen del universo.

8.6 **Resumen**

8.6.1 Formación de estructuras

Es un proceso complejo que abarca desde el fin de la inflación hasta nuestros días, en el que cabe distinguir las siguientes fases, cada una de ellas dominada por distintos procesos físicos:

1. Generación de las fluctuaciones iniciales.
2. Crecimiento lineal relativista de las fluctuaciones u oscilación de las mismas. Las fluctuaciones de materia no bariónica desacoplada se mantienen constantes.
3. Crecimiento lineal no relativista de las fluctuaciones u oscilación y amortiguación de las mismas.
4. Creación de la radiación de fondo cósmico.
5. Crecimiento lineal de las fluctuaciones de materia.
6. Crecimiento no-lineal de las fluctuaciones de materia.
7. Condensación y formación de objetos.

Las fluctuaciones iniciales se generan como resultado de fluctuaciones cuánticas del campo escalar responsable de la inflación (véase capítulo 5). Su espectro (7.31) se asume adiabático invariante de escala con una distribución gaussiana, como indica el espectro de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo, para escalas angulares mayores que la correspondiente al primer pico acústico.

Hasta el momento del equilibrio radiación-materia, las fluctuaciones de escalas mayores que la longitud de Jeans crecen como a^2. Las fluctuaciones de escalas menores, tanto de materia bariónica como no bariónica, no crecen sino que oscilan

acústicamente, hasta que el desacoplamiento de la materia oscura libera a ésta de las oscilaciones. Sin embargo, la materia oscura fría a escalas de interés astrofísico no puede crecer mientras domina la radiación.

Cuando domina la materia no relativista las fluctuaciones de materia oscura crecen como a, mientras que las de materia bariónica crecen al mismo ritmo que la oscura para longitudes de onda mayores que la longitud de Jeans, y oscilan acústicamente sin poder crecer, debido a la presión de radiación, para longitudes menores. Las fluctuaciones bariónicas de pequeña escala se amortiguan por difusión de fotones (amortiguación de Silk).

Cuando se produce el desacoplamiento de los fotones y se crea la radiación cósmica de fondo, las fluctuaciones bariónicas pueden crecer, incluso a las escalas en las que la amortiguación de Silk las ha borrado, con la ayuda de la materia oscura fría, que ha seguido creciendo.

Con el tiempo, el crecimiento deviene no lineal ($\delta \approx 1$) y forma las estructuras que componen el universo empezando, gracias a la materia oscura fría, por las estructuras de masas menores.

8.6.2 El futuro del universo

El universo se expandirá ilimitadamente. La expansión podría llegar a ser constante si la energía oscura fuera debida a una quintaesencia variable con el tiempo y con un potencial adecuado. En este último caso los horizontes de sucesos desaparecerían. La tabla 8.2 resumen los principales eventos del futuro del universo.

Edad (años)	Suceso
1.4×10^{10}	Instante actual. Se frena la formación de supercúmulos. Domina la energía oscura
10^{17}	Las enanas blancas se enfrían pasando a negras. Su temperatura es < 5 K
10^{19}	Las galaxias y sistemas solares se disgregan. Las galaxias pierden el 90% de masa estelar
10^{20}	El resto de planetas se estrellan contra los soles debido a la radiación gravitatoria
10^{23}	Los cúmulos de galaxias se disgregan por interacciones gravitatorias
$10^{66\text{-}102}$	La radiación de Hawking evapora los agujeros negros
10^{1500}	La materia de los objetos restantes se convierte en hierro mediante efecto túnel
$10^{10^{25}}$	Dichos objetos devienen agujeros negros por efecto túnel y se evaporan por radiación Hawking
Ω	El universo termina formado por partículas aisladas estables (fotones, electrones, ¿protones?)
A	¿Las fluctuaciones cuánticas generan un nuevo universo?

Tabla 8.2 Tabla resumen de las especulaciones sobre el futuro del universo.

8.6.3 La cosmología a examen

Podría resumirse lo expuesto mediante las siguientes tablas, que reflejan el sentimiento subjetivo del autor. Siempre he creído, no obstante, que al calificar los exámenes soy muy indulgente.

Concepto	Calificación	Comentarios
Gran Explosión (universo primordial a alta temperatura)[34]	Cum Laude	La nucleosíntesis primordial y la radiación de fondo no pueden ser satisfactoriamente explicadas de otra manera
Expansión del universo	Sobresaliente	Se infiere mayormente por eliminación de alternativas. Las evidencias directas son pobres, pero la relatividad general es sólida en este sentido
Materia oscura fría no bariónica	Notable alto	Existen múltiples indicios en la cinemática de distintos objetos así como en las anisotropías de la radiación de fondo. Además es necesaria para permitir el crecimiento de estructuras a pequeña escala. Finalmente no existe una teoría alternativa satisfactoria. Sin embargo, se desconoce(n) la(s) partícula(s) responsable(s)
Asimetría materia-antimateria	Notable	Se sabe que ha tenido que existir y se conoce el mecanismo a grandes rasgos
Constancia de «constantes» físicas	Notable bajo	Es difícil obtener medidas con la suficiente precisión
Energía oscura que acelera la expansión	Aprobado	Se precisan más medidas independientes (p. ej.: mediante efecto Sunyaev-Zel'dovich o Sachs-Wolfe integrado tardío)
Inflación	Pendiente	Evidencias indirectas solamente. Problemas de ajuste fino del inflatón y de su origen

Tabla 8.3 Calificaciones subjetivas de algunos conceptos cosmológicos.

Parámetro	Calificación	Comentarios
Ω_0	Sobresaliente	A partir de medidas del primer pico acústico de la radiación de fondo
Ω_{b0}	Notable alto	A partir de la nucleosíntesis primordial. Puede mejorar
Ω_{m0}	Notable	Debe mejorar
n	Notable	Del ajuste a las anisotropías de la radiación de fondo
H_0	Notable bajo	Debe mejorar, lo mismo que las edades de cúmulos
b	Notable bajo	Puede mejorar
$\Omega_{\Lambda 0}$	Aprobado	En la actualidad, su valor prácticamente se postula para obtener $\Omega_0=1$
w	Pendiente	Se requiere más precisión fotométrica

Tabla 8.4 Calificaciones subjetivas de determinaciones de parámetros cosmológicos.

[34] Incluyendo el universo ecpirótico.

8.7 Resumen de las eras y épocas cosmológicas del modelo estándar

Era	Época	Edad	Sucesos más importantes	Comentarios
De radiación	Planck	0	Inicio de la era. Singularidad inicial?	Todas las interacciones unificadas. Espuma 10-D de μagujeros negros
		4×10^{-44} s	Desacoplo del gravitón. Fin época	
	GUT	4×10^{-44} s	Inicio de la época GUT y propiamente de la era de radiación	Unificación de las interacciones menos la gravitación. Universo compuesto de materia GUT. Posible bariogénesis final
		10^{-36} s	Transición de fase de primer orden con rotura de simetría. Fin de época	
	Electro-débil	10^{-36} s	Inicio de la época	Unificación electrodébil. Universo compuesto de materia cuark y materia leptónica.
		10^{-10} s	Transición de fase de primer orden con rotura de simetría. Fin de época	
	Cuark	10^{-10} s	Inicio de la época	Todas las interacciones separadas. Universo compuesto por un plasma cuark-gluón y leptones.
		2.5×10^{-5} s	Transición (¿de primer orden?) cuark-hadrón. Fin de la época	
	Hadrónica	2.5×10^{-5} s	Confinamiento de los cuarks. Inicio de época	Dominio de la fuerza fuerte. Potenciales químicos nulos
		5×10^{-5} s	Principio aniquilación de piones. Fin de época	
	Leptónica	5×10^{-5} s	Inicio de la época	Dominio de la interacción débil
		9×10^{-5} s	Principio de la aniquilación de los muones	
		6×10^{-2} s	Desacoplamiento de los neutrinos	
		2 s	Congelación fracción neutrón/protón	
		4 s	Principio aniquilación e^--e^+. Fin de época	
	Fotónica	4 s	Inicio de la época	Dominio de los fotones. Con el final de esta época termina también la era de radiación
		200 s	Inicio de la nucleosíntesis primordial	
		6.1×10^4 a	Equilibrio radiación-materia. Fin de la época y de la era de radiación	

Era	Época	Edad	Sucesos más importantes	Comentarios
De materia	Del plasma	6.1×10^4 a	Inicio época y de la era de materia no relativista	
		2.1×10^5 a	Combinación del H. Fin de la época	
	Atómica	2.1×10^5 a	Inicio de época	Al final de esta época ya puede empezar formación estructuras
		2.6×10^5 a	Desacoplamiento de los fotones. Fin de época	
	Estelar	2.6×10^5 a	Desacoplamiento	Yoshida, Bromm y Hernquist 2004.
		$<2\times10^8$ a	Primeras estrellas	
	De las galaxias	$<8\times10^8$ a	Primeras galaxias	Iye *et al.*, 2006
	Cumular	$\sim10^9$ a	Primeros cúmulos	Miley *et al.*, 2004
De energía oscura	Supercumular	$<7\times10^9$ a	Primeros supercúmulos. Continúa en la actualidad	Gal y Lubin, 2004

Tabla 8.5 Cuadro resumen de las eras y épocas en que se ha dividido la historia del universo en este texto.

8.8 Ejercicios

8.1 Demostrar que $c_{sw}^2 = w$.

8.2 Despreciando el término de presión, analizar la evolución de las fluctuaciones
   a. De una única ecuación de estado de la forma $w = -1/3, -2/3,$ ó -1.
   b. En un caso general, cuando domine una ecuación de estado de la forma $w = -1/3, -2/3,$ ó -1.

8.3 Basándose en los resultados del ejercicio anterior, determinar la evolución de los potenciales de las fluctuaciones cuando la densidad evoluciona como determina:
   a. La ecuación de estado dominante.
   b. La materia no relativista (origen del efecto Sachs-Wolfe tardío).

8.4 Determinar la masa de Jeans en un caso general de dominio de una única ecuación de estado w (ecuación 8.7).

8.5 Analizar la evolución de las fluctuaciones cuando $\lambda > \lambda_J$ en un universo estático dominado por materia no relativista.

8.6 Demostrar que las siguientes expresiones son equivalentes a:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi(1+w)\sum_i (1+3w^i)\bar{\rho}_i\delta_i$$

   a. $\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = \frac{3}{2}(1+w)\sum_i (1+3w^i)\bar{\Omega}_i H^2\delta_i$.

   b. $\delta'' + \frac{(2-q)\delta'}{a} = \frac{3}{2a^2}(1+w)\sum_i (1+3w^i)\bar{\Omega}_i\delta_i$, donde $\delta' = \frac{d\delta}{da}$.

   c. $\delta_{zz} + \frac{q\delta_z}{1+z} = \frac{3}{2(1+z)^2}(1+w)\sum_i (1+3w^i)\bar{\Omega}_i\delta_i$, donde $\delta_z = \frac{d\delta}{dz}$.

8.7 Determinar la expresión de la masa de Jeans y calcular la masa de Jeans en masas solares, en un universo dominado por:
   a. Radiación. ¿A qué edad dejan de crecer las fluctuaciones de 1 $M_\odot$? ¿Y las de 10^{12} $M_\odot$? ¿En qué eras se sitúan estas edades?
   b. Materia no relativista antes del desacoplamiento.
   c. Materia no relativista cuando tiene lugar el desacoplamiento.

8.8 Imponiendo como soluciones funciones potenciales del tiempo, determinar la solución de las ecuaciones (8.13), (8.17), (8.34).

8.9 Determinar la relación entre la longitud de Jeans y el radio de Hubble para un universo dominado por radiación y para uno dominado por materia pulverulenta.

8.10 Asumiendo que una fluctuación es equiparable a un mini universo de curvatura positiva sumido en un universo euclídeo, determinar la evolución de δ_r en función del factor de escala para un universo dominado por radiación.

8.11 Obtener la ecuación (8.20) y su solución creciente (efecto Mészáros).

8.12 Obtener la expresión (8.25).

8.13 Deducir la expresión (8.30) y aplicarla al caso de que la materia oscura esté constituida por la partícula supersimétrica neutralino (suponer que su masa es entre 30 y 500 veces la del protón).

8.14 Obtener la aproximación de segundo orden a la evolución del factor de escala en un universo de curvatura positiva dominado por materia no relativista (ecuación 8.41).

8.15 Asumiendo que una fluctuación de materia es equiparable a un mini universo de curvatura positiva sumido en un universo euclídeo, determinar la evolución de δ_m en función del factor de escala para un universo dominado por materia no relativista (tomar un término más en cos$Q$ que en el ejercicio anterior).

8.16 Determinar la evolución de una fluctuación en el universo de Milne. ¿Por qué tiene sentido preguntarse cómo evoluciona una fluctuación en el modelo de Milne? ¿Cuáles son las implicaciones en este caso?

8.17 Deducir una expresión aproximada de la masa de Silk teniendo en cuenta que, según la teoría cinética, el coeficiente de difusión de los fotones es $D = \lambda c/3$,

donde $\lambda = (n_e \sigma_T)^{-1}$ es el recorrido libre medio de los fotones sometidos a esparcimiento Thomson. Suponer una fracción de ionización unidad y recuperar las unidades físicas. ¿Cuál es la masa de Silk en masas solares que se obtiene cuando tiene lugar la combinación? (tener en cuenta que la distancia radial a la que se pueden difundir los fotones es $\approx (Dt)^{1/2}$).

8.18 Obtener la expresión de la velocidad del sonido de un gas monoatómico perfecto (ecuación 8.46). Tener en cuenta que en un proceso adiabático

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}.$$

8.19 Determinar la sobredensidad que en el universo actual representan las galaxias y cúmulos de galaxias.

8.20 Estimar el valor de la función de transferencia en un caso general cuando $\lambda > \lambda_J$.

8.21 Deducir la ecuación (8.53) para el valor de una sobredensidad en un universo dominado por materia pulverulenta, cuando su densidad es mínima, suponiendo que puede asimilarse a un mini universo de curvatura positiva sumido en un universo de curvatura nula.

8.22 ¿Cuál es el máximo valor que podría adoptar la constante cosmológica en relación con el valor actual para que se formasen galaxias en este universo?

8.9 Bibliografía

8.9.1 Referencias

Bouwens, R. J. y Illingworth, G. D. (2006), *Nature* 443, 189.
De Bernardis, *et al.* (34 coautores) (2002), *ApJ* 564, 559
Efstathiou, G. y Silk, J. (1983), *Fund.Cosm.Phys.* 9, 1.
Gal, R. R. y Lubin, L. M. (2004), *ApJ* 607, L1.
Iye M., *et al.* (9 coautores) (2006) *Nature* 443, 186.
Mészáros, P. (1974), *A&A* 37, 225.
Miley G. *et al.* (37 coautores) (2004), *Nature* 427, 47.
Weinberg, S. (2002), *ApJ* 581, 810.
Yoshida, N.; Bromm, V. y Hernquist, L. (2004), *ApJ* 605, 579.

8.9.2 Textos de consulta

Longair, M. S. (1998), *Galaxy Formation*, Springer-Verlag.
Linder, E. V. (1997), *First Principles of Cosmology*, Addison-Wesley.

8.9.3 Textos recomendados para ampliación de conocimientos

Formación de estructuras

Coles, P. y Lucchin, F. (1995), *Cosmology. The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, Wiley.
Kolb, E. W. y Turner, M. S. (1990), *The Early Universe*, Addison-Wesley.
Peacock, J. A. (1999), *Cosmological Physics*, Cambridge University Press.

Función de transferencia

Eisenstein, D. J. y Hu, W. (1998), *ApJ* 496, 605.

El fin del universo

Dalal, N. y Griest, K. (2000), *Physics Letters B*, 490, 1.
Freese, K. y Kinney, W. H. (2003), *Physics Letters B*, 558, 1.

Historia de la cosmología

Overbye, D. (1992), *Corazones solitarios en el Cosmos*, Planeta.

8.9.4 Enlaces útiles

Página www de este texto

http://webpages.ull.es/users/jcepano

Generales

Diccionario en línea: http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
Buscador de pretirajes de artículos (astro-ph, y otros): http://www.arxiv.org
Página general de cosmología: http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5

Conceptos básicos de cosmología

http://homepages.wmich.edu/~korista/cosmology.html

Simulaciones numéricas de formación de estructuras (incluye animaciones)

http://cosmicweb.uchicago.edu/sims.html

El fin del universo

http://math.ucr.edu/home/baez/end.html

Historia de la cosmología

http://www.phys-astro.sonoma.edu/people/faculty/tenn/CosmologyBooksAndLinks.html

De algunos de los libros listados existe traducción al español.

Futuros observatorios

http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page (buscar WIMP y seguir los enlaces)
http://www.gtc.iac.es (GTC)
http://www.iac.es/project/OSIRIS (OSIRIS y OTELO)
http://www.esa.int (general de ESA)
http://www.eso.org (general de ESO)
http://sci.esa.int (HERSCHEL, PLANCK y LISA)
http://www.eso.org/projects/alma (ALMA)
http://lisa.jpl.nasa.gov (LISA)

Apéndice A | CONSTANTES

A.1 Físicas

Velocidad de la luz en el vacío	$c = 299792.458$ km/s
Constante de Planck	$h \equiv 2\,\pi\,\hbar = 6.62620\times10^{-34}$ J s
	$= 4.13570\times10^{-15}$ eV s
Electronvoltio	1 eV $= 1.6021892\times10^{-19}$ J
	$= 1.1604\times10^{4}$ K
Constante de gravitación	$G = 6.6720\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
Carga del electrón	$e = -1.60217653\times10^{-19}$ C
Constante de estructura fina	$\alpha \equiv e^2/(\hbar c) = (137.03604)^{-1}$
Masa en reposo del electrón	$m_e = 9.109534\times10^{-31}$ kg
	$= 0.5110034$ MeV
Masa en reposo del protón	$m_p = 938.272029$ MeV
Masa en reposo del neutrón	$m_n = 939.565530$ MeV
Sección eficaz de Thomson	$8\pi e^4/(3m_e^2c^4) = 6.652448\times10^{-29}$ m^2
Constante de Boltzmann	$k = 1.380662\times10^{-23}$ J K^{-1}
	$= 8.617347\times10^{-5}$ eV K^{-1}
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5.6693\times10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}
Energía de ligadura del deuterio	$= 2.22464$ MeV
Energía de ligadura del helio	$= 28.2969$ MeV

A.2 Astronómicas

Megapársec (10^6 pc)	1 Mpc $= 3.08567758\times10^{19}$ km
Masa solar	1 $M_\odot = 1.989\times10^{31}$ kg
Luminosidad solar	1 $L_\odot = 3.826\times10^{26}$ J s^{-1}
Densidad de flujo	1 Jy $= 10^{-26}$ W m^{-2} Hz^{-1}
Constante de Hubble	$H_0 = 100\,h_0$ km s^{-1} Mpc^{-1}
Edad de Hubble	$H_0^{-1} = 9.7782\,h_0^{-1}$ Ga
Radio de Hubble	$cH_0^{-1} = 2997.92\,h_0^{-1}$Mpc

Apéndice B | PEDAGOGÍA

B.1 Principios pedagógicos

Este texto ha sido escrito con la intención de proporcionar explicaciones claras y sencillas acerca de distintos aspectos de la cosmología, conservando, empero, el rigor formal necesario en un texto de nivel universitario. Se ha procurado acompañar el texto con figuras descriptivas que permitan visualizar fácilmente la física involucrada y aclarar conceptos de especial dificultad. En resumen, se ha acompañado el rigor formal con la pedagogía que permite aprehenderlo y asimilarlo.

Con el fin de primar la pedagogía, se ha preferido sacrificar la cadena histórica de acontecimientos y descubrimientos. Seguir el curso del devenir histórico a veces obstaculiza la claridad expositiva, que sólo se puede lograr a través de un desarrollo ordenado y lógico de los conceptos. Por este motivo, se ha efectuado una cuidadosa ordenación de los capítulos y de los distintos apartados dentro de cada uno de ellos. Es, por tanto, pedagógicamente recomendable que tanto el alumno como el profesor sigan el orden que establece el texto.

Cada capítulo se complementa con un resumen final y con ejercicios, a los que se hace referencia en los lugares apropiados dentro del texto, destinados a enriquecer y hacer más atractivos los conocimientos impartidos. También al final de cada capítulo se proporcionan referencias y bibliografía recomendada y para ampliación de conocimientos. Estas últimas están destinadas a alumnos o profesores a los que les interese complementar determinados apartados. Finalmente, se proporcionan páginas de Internet relacionadas con los contenidos del capítulo.

Además de proporcionar los conocimientos teóricos necesarios, también se proporcionan aplicaciones prácticas. Por ejemplo, fórmulas susceptibles de fácil programación para calcular distintas magnitudes, para un modelo cosmológico dado, a partir de sus parámetros característicos, o apartados de aplicación a cartografiados del universo.

De entre los conceptos que considero habitualmente más difíciles de explicar por parte del profesor y de entender correctamente por parte del alumno, se hallan la curvatura en tres dimensiones espaciales, la expansión del universo, los horizontes cosmológicos y los defectos topológicos, seguidos, a distancia, por la conectividad causal y la inflación. Por este motivo, he dedicado particular atención a estos conceptos, documentándolos con ejemplos, gráficas y figuras.

Aunque el texto tiene el máximo grado de actualidad en el momento de su publicación, dado que la cosmología es una disciplina viva que evoluciona con gran rapidez, en la página en Internet del autor http://webpages.ull.es/users/jcepano se proporciona información complementaria a la del texto. Asimismo, y por petición de profesores de esta disciplina o de materias relacionadas que acrediten tal condición, se puede proporcionar un repositorio de preguntas tipo test de opción múltiple.

Finalmente, aunque se traducen al español todos los términos ingleses, en muchos casos se indica la versión inglesa original para que cuando el alumno consulte textos o revistas especializadas escritas en este idioma, esté en condiciones de identificar el término o acrónimo correspondiente.

B.2 Organización

B.2.1 Conocimientos previos

Para abordar este texto son recomendables algunos conocimientos previos de astrofísica a nivel elemental: estructura y evolución estelar, que incluirá conceptos tales como secuencia principal y los resultados de distintos estadios evolutivos de las estrellas, el concepto de cúmulo globular, de galaxia espiral y elíptica y de cúmulo de galaxias, etc. Se supone que los alumnos estudiarán esta asignatura después de un curso general básico de astrofísica. Por este motivo, se ha obviado el capítulo con que realizan su apertura otros textos clásicos que abordan la cosmología.

B.2.2 Ideas destacadas

A lo largo del texto se han señalado en negrita conceptos importantes, conclusiones o bien puntualizaciones destacadas. En tipo cursiva se indican palabras extranjeras o también comentarios de especial relevancia para la interpretación correcta del texto. Finalmente, también en cursiva y negrita se han resaltado puntualizaciones de especial importancia.

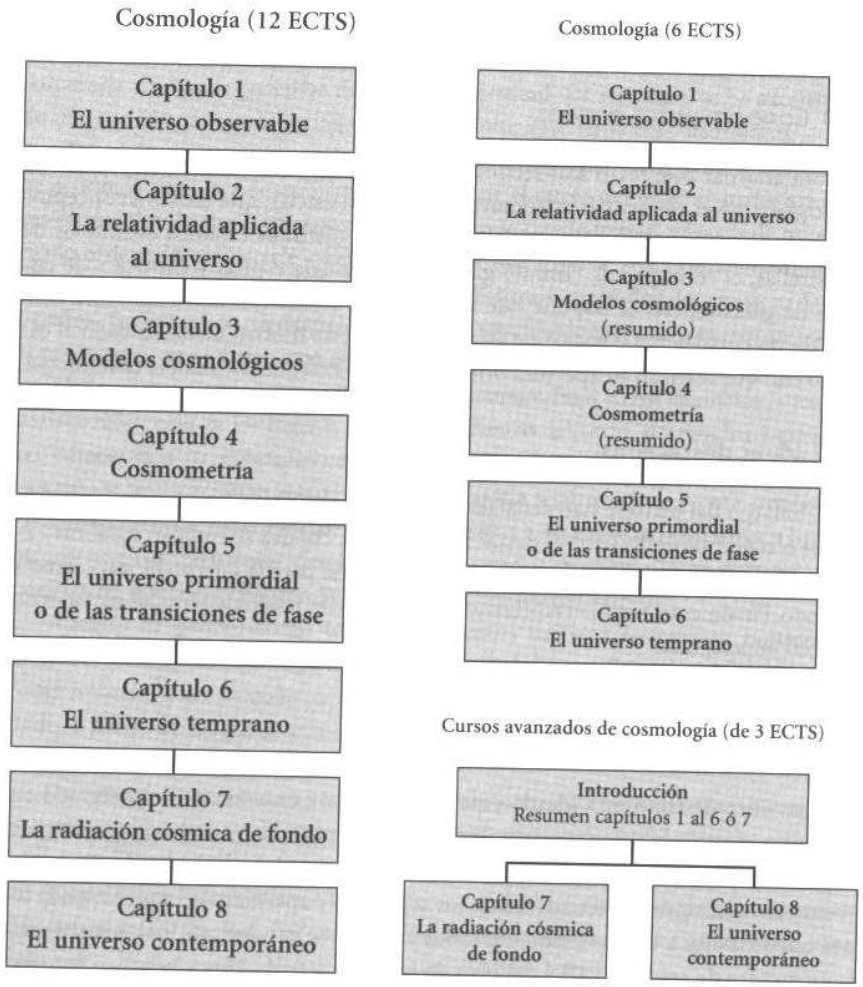
B.3 Diseño de cursos

Este libro de texto está ideado especialmente para enseñanzas de postgrado en cosmología, pero también puede utilizarse para impartir astronomía extragaláctica o, incluso, asignaturas de introducción a la astrofísica dentro del grado. Para ello basta con seleccionar adecuadamente los capítulos y apartados a impartir, en la línea que se indica a continuación. En todos los casos se supone que los cursos siguen la estructura de créditos ECTS del plan de estudios actualmente vigente en España.

B.3.1 Cosmología

Este texto completo y sus ejercicios permiten impartir cómodamente un curso anual de cosmología de unos 12 créditos ECTS.

Alternativamente puede estructurarse para un curso de cosmología de 6 créditos ECTS en el postgrado y dos cursos adicionales avanzados de postgrado o de doctorado de 3 créditos ECTS. Para el curso de 6 créditos se resumiría el temario impartido en los capítulos 3 y 4 y se finalizaría el curso en el capítulo 6. Uno de los cursos de 3 créditos estaría basado en el capítulo 7 (radiación cósmica de fondo) y el otro en el 8 (universo contemporáneo), tras una breve introducción para repasar algunos conceptos de los capítulos anteriores.



En el caso de que los alumnos ya hubieran cursado una asignatura de relatividad general, podría reducirse el temario del capítulo segundo.

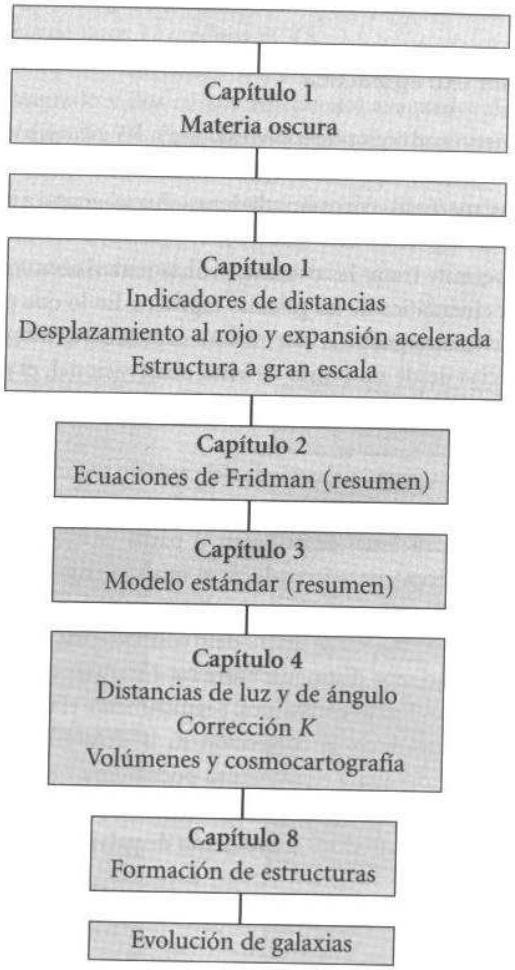
B.3.2 Astronomía extragaláctica

Después de una introducción fenomenológica a las galaxias y sus propiedades, pueden utilizarse distintos capítulos del presente texto, en todo o en parte, para impartir varios de los apartados correspondientes a una asignatura de astronomía extragaláctica.

El capítulo 1 permite tratar las evidencias de la materia oscura, correspondientes al apartado de cinemática de las galaxias espirales. En lo que podrían ser las últimas lecciones de esta asignatura, este mismo capítulo permite estudiar los indicadores de distancias desde un punto de vista observacional, el desplazamiento al rojo de las galaxias, así como la estructura a gran escala del universo y la expansión acelerada del mismo.

A continuación, una versión abreviada del capítulo segundo permite introducir de manera somera la métrica de Robertson-Walker y la ecuación de Einstein, permitiendo llegar a las ecuaciones de Fridman. A partir de ellas, y tras utilizar un resumen del capítulo tercero para introducir el modelo concordante, pueden utilizarse los apartados del capítulo 4 correspondientes a distancias de luz y de ángulo para complementar, en el marco de un modelo cosmológico, los indicadores de distancias, y que el alumno sepa distinguir entre las distancias estimadas con luminosidades y con longitudes físicas constantes. Seguidamente el capítulo 4 también podría utilizarse para introducir la corrección K, la determinación de volúmenes propios y la cosmocartografía. La asignatura podría finalizar con la formación de estructuras en un universo en expansión a partir del capítulo 8, como introducción a un apartado observacional sobre la evolución de galaxias con el que podría concluir la asignatura.

Astronomía extragaláctica (6 ECTS)



B.3.3 Introducción a la astrofísica

Para esta asignatura se podría utilizar gran parte del capítulo 1 como una introducción general a la cosmología básica en cuanto a los observables del universo y la interpretación del desplazamiento al rojo, entre otros aspectos.

Este libro no solamente constituye una herramienta para el estudio y la docencia de la cosmología en los niveles de grado y de posgrado, sino también un texto de referencia para el especialista tanto teórico como observacional. En su vertiente docente está destinado a estudiantes universitarios con alguna formación básica en astrofísica, sin que se precisen conocimientos previos de relatividad general. De hecho, se ha procurado que el libro sea autosuficiente en todo momento. Partiendo del nivel más simple, propio de una asignatura introductoria, el grado de dificultad del texto progresa de tal modo que varios de los capítulos finales pueden impartirse todo o en parte en los cursos de máster o de doctorado. Se ha primado la claridad expositiva con ejemplos y ejercicios pedagógicos que permitan comprender los conceptos más difícilmente aprehensibles, manteniendo, sin embargo, el rigor académico.

Cosmología física abarca todos los aspectos relevantes de la cosmología moderna, sin eludir los campos más novedosos. Incluye 200 ejercicios, 100 figuras y numerosas tablas resumen, abundantes referencias bibliográficas, textos para ampliación de conocimientos y direcciones de internet útiles.

JORDI CEPA, licenciado en Física por la Universidad de Barcelona y doctor en Astrofísica por la Universidad de La Laguna, es profesor titular del Departamento de Astrofísica de la Universidad de La Laguna e investigador del Instituto de Astrofísica de Canarias. Autor de numerosas publicaciones científicas en revistas internacionales, es investigador principal del primer instrumento español del telescopio GTC.

-akal-
www.akal.com

ISBN 978-84-460-2533-7